Electrodinámica clásica

M. Brédov, V. Rumiántsev,
I. Toptiguin

Editorial Mir Moscú

Electrodinámica clásica

M.Brédov, V.Rumiántsev, I.Toptiguin

Electrodinámica clásica

М. М. Бредов
В. В. Румянцев
И. Н. Топтыгин

Классическая электродинамика

Под редакцией И. Н. Топтыгина

Издательство «Наука»
Москва

M. Brédov, V. Rumiántsev, I. Toptiguin

Electrodinámica clásica

Dirigido por I. Toptiguin

Editorial Mir
Moscú

Traducido del ruso por el ingeniero Antonio Ballesteros Elías

Impreso en la URSS

На испанском языке

© издательство «Наука». 1985
© traducción al español, editorial Mir. 1986

Indice

Introducción a la edición española 12

Parte I. Teoría microscópica de los fenómenos electromagnéticos en el vacío

Capítulo I. Teoría especial de la relatividad y cinemática relativista 15

§ 1. Principio de la relatividad y transformaciones de Lorentz 15

1.1. Espacio y tiempo en mecánica clásica (15). 1.2. Principio de la relatividad de Einstein (20). 1.3. Transformaciones de Lorentz (23).

§ 2. Ciertos corolarios de las transformaciones de Lorentz 26

2.1. Reducción de las escalas. Transformaciones de volumen (26). 2.2. Relatividad de la simultaneidad. Tiempo propio (27). 2.3. Transformación relativista de la velocidad (28). 2.4. Transformación de la dirección. Aberración de la luz (29). 2.5. Forma visible de los cuerpos en movimiento rápido (31).

§ 3. Sentido geométrico de las transformaciones de Lorentz. Intervalo y causalidad 33

3.1. La transformación de Lorentz como giro en el mundo cuatridimensional (33). 3.2. Tres tipos de intervalos. Causalidad (36).

§ 4. Vectores y tensores cuatridimensionales 38

4.1. Definición de vector. Componentes contra y covariantes (38). 4.2. Tensores cuatridimensionales (41). 4.3. Operaciones diferenciales (43). 4.4. Velocidad y aceleración cuatridimensionales de una partícula (44).

§ 5. Acción para una partícula libre. Energía e impulso 45

5.1. Principio de la acción mínima para una partícula libre (45). 5.2. Energía e impulso de la partícula libre (47). 5.3. Relación entre masa y energía (49).

§ 6. Cinemática de las partículas relativistas 51

6.1. Desintegración de las partículas (52). 6.2. Umbral energético de la reacción (52). 6.3. Cinemática de las reacciones de dos partículas (53). 6.4. Transformación del volumen de fase y de la función de distribución (55).

Capítulo II. Teoría especial de la relatividad y fenómenos electromagnéticos 57

§ 7. Interacción entre las partículas cargadas y el campo electromagnético 57

7.1. Interacción en la teoría de la relatividad. Carga eléctrica y campo electromagnético (57). 7.2. Acción de las partículas ubicadas en el campo electromagnético. Potencial cuatridimensional (59).

§ 8. Ecuaciones de movimiento de una partícula relativista en el campo electromagnético. Intensidad del campo 60

8.1. Función de Lagrange y ecuaciones de movimiento (60). 8.2. Fuerza de Lorentz. Intensidad del campo electromagnético (62). 8.3. Transformación gradiental de potenciales (63). 8.4. Funciones de Hamilton (64).
§ 9. Ecuación de movimiento en forma covariante. Tensor del campo electromagnético 64
9.1. Variaciones de la acción y ecuación de movimiento (64). 9.2. Relación entre el tensor del campo y las intensidades E, H (67).
§ 10. Transformación de las intensidades del campo electromagnético. Invariantes del campo 69
10.1. Tranformación de las intensidades (69). 10.2. Invariantes del campo (69).
§ 11. Movimiento de una partícula relativista por campos eléctrico y magnético cruzados. Deriva eléctrica 71
11.1. Movimiento en un campo magnético homogéneo (71). 11.2. Deriva eléctrica (72). 11.3. Movimiento hiperbólico (75).
§ 12. Teorema de Larmor 77

Capítulo III. Ecuaciones del campo electromagnético 79
§ 13. Deducción de las ecuaciones de Maxwell en forma covariante partiendo del principio de la acción mínima 79
13.1. Acción para un sistema constituido por partículas y un campo electromagnético (79). 13.2. Densidad de corriente cuatridimensional (82). 13.3. Ecuaciones de Maxwell (86).
§ 14. Forma tridimensional de las ecuaciones de Maxwell y su ligazón con las leyes experimentales de electromagnetismo 88
14.1. Ecuaciones de Maxwell en forma tridimensional (88). 14.2. Forma integral de las ecuaciones de Maxwell (90). 14.3. Sistemas de unidades de medición de las magnitudes eléctricas y magnéticas (93).
§ 15. Condiciones de frontera para los vectores del campo electromagnético 95
15.1. Condiciones para los componentes normales (95). 15.2. Condiciones para los componentes tangenciales (97).
§ 16. Tensor energía-impulso del campo electromagnético. Vector de Poynting 98
16.1. Tensor energía-impulso de las partículas relativistas (98). 16.2. Tensor de energía-impulso del campo electromagnético (101). 16.3. Energía del campo. Vector de Poynting. Tensor de tensiones de Maxwell (103).
§ 17. Unicidad de la resolución de las ecuaciones de Maxwell 106
§ 18. Ecuaciones para los potenciales electromagnéticos 107

Capítulo IV. Campo electromagnético continuo en el vacío 109
§ 19. Propiedades generales del campo electromagnético continuo 109
§ 20. Integración de la ecuación de Poisson 112
20.1. Forma integral de la ecuación de Poisson (112). 20.2. Unicidad de la solución del problema electrostático (114). 20.3. Solución del problema de frontera con ayuda de la función de Green (115).
§ 21. Potencial a grandes distancias del sistema de cargas. Momentos dipolar y cuadripolar 117
§ 22. Energía y fuerzas de interacción en el campo electrostático 121

22.1. Energía del campo electrostático (121). 22.2. Sistema de cargas en un campo externo (125).
§ 23. Potencial de la capa doble 127

Capítulo V. Campo magnético continuo en el vacío 130
§ 24. Propiedades generales del campo magnético continuo en el vacío 130
24.1. Ecuaciones fundamentales (130). 24.2. Ley de Biot — Savart (132). 24.3. Potencial seudoescalar del campo magnético y hojas magnéticas (133). 24.4. Fórmula de Ampére (134).
§ 25. Momento magnético 135
§ 26. Energía y fuerzas en el campo magnético continuo 139
26.1. Energía magnética de las corrientes estacionarias (139). 26.2. Energía de un sistema de contornos con corriente. Coeficientes de autoinducción e inducción mutua (139). 26.3. Sistema de corrientes en el campo exterior (141). 26.4. Fuerzas en el campo magnético continuo (142).

Capítulo VI. Ondas electromagnéticas 144
§ 27. Ecuaciones de onda 144
27.1. Ecuaciones del campo electromagnético al no haber cargas (144). 27.2. Ejemplo de solución de la ecuación de onda — ondas planas (145).
§ 28. Ondas planas monocromáticas 148
28.1. Amplitud, frecuencia y vector de onda. Fase de una onda plana monocromática (148). 28.2. Transformación de la frecuencia y el vector de onda. Efecto Doppler (150). 28.3. Polarización de una onda plana (151).
§ 29. Ondas no monocromáticas. Descomposición espectral 152
§ 30. Coherencia e interferencia 158
30.1. Descripción del campo no coherente de radiación con ayuda del tensor correlativo. Tiempo y longitud de la coherencia (158). 30.2. Influencia de la coherencia temporal y espacial sobre la interferencia de las ondas (162). 30.3. Polarización parcial de las ondas electromagnéticas (167).
§ 31. Forma hamiltoniana de las ecuaciones del campo electromagnético 171
31.1. Tipos propios de oscilaciones (modos) del campo electromagnético (172). 31.2. Número de oscilaciones propias (174). 31.3. Hamiltoniano y forma hamiltoniana de las ecuaciones del campo (175).

Capítulo VII. Campos de cargas en movimiento 177
§ 32. Potenciales retardados 177
32.1. Función de Green de la ecuación de onda (177). 32.2. Elección de los potenciales retardados (182). 32.3. Descomposición espectral de los potenciales retardados (183).
§ 33. Principio de Huygens y fórmula de Kirchhoff 184
33.1. Deducción de la fórmula de Kirchhoff (185). 33.2. Óptica geométrica. Difracción de Fresnel (188). 33.3. Difracción de Fraunhofer (192).
§ 34. Campo electromagnético de una carga puntual en movimiento arbitrario 194
34.1. Potenciales de Lienar y Wiechert (194). 34.2. Intensidad del campo (196). 34.3. Descomposición espectral de los potenciales de Linear — Wiechert (197).

Capítulo VIII. Radiación y dispersión de ondas electromagnéticas 198
§ 35. Radiación de una partícula relativista cargada 198
35.1. Distribución angular de la radiación (198). 35.2. Pérdida de energía e impulso de la partícula cargada (200). 35.3. Distribución espectral de la radiación (204).
§ 36. Radiación de un sistema no relativista de partículas cargadas 208
36.1. Radiación eléctrica de dipolo (208). 36.2. Radiación cuadripolar y magnético-dipolar (210). 36.3. El campo a próximas distancias (212). 36.4. Ejemplos de radiación de los sistemas más sencillos (214).
§ 37. Radiación de los cuerpos macroscópicos. Antenas 215
37.1. Vector de Hertz (215). 37.2. Radiación de la antena. Diagrama direccional (de radiación) (216). 37.3. Principio de reciprocidad (219).
§ 38. Respuesta de la radiación 221
38.1. Interacción de la partícula cargada con su propio campo electromagnético (221). 38.2. Cálculo de la fuerza de frenado de radiación partiendo de la ley de conservación de la energía (222).
§ 39. Radiación y dispersión de las ondas electromagnéticas por un oscilador 224
39.1. Radiación del oscilador. Anchura natural de las rayas espectrales (225). 39.2. Dispersión de las ondas electromagnéticas por el oscilador (227).
§ 40. Dispersión de las ondas electromagnéticas por las partículas libres 229
40.1. Fórmula de Thomson (229). 40.2. Dispersión coherente y no coherente (230).

Parte II. Electrodinámica de medios polarizables y magnetizables

Capítulo 1. Ecuaciones del campo electromagnético en medios polarizables y magnetizables 233
§ 1. Enfoque macroscópico y microscópico a la descripción de los fenómenos electromagnéticos en medios 233
1.1. Ecuaciones microscópicas del campo. Cargas y corrientes extrañas e inducidas (234). 1.2. Mediación de las ecuaciones de Maxwell (235).
§ 2. Ecuaciones del campo electromagnético en medios 240
2.1. Ligazón entre las cargas y corrientes inducidas con los momentos dipolares específicos. Ecuaciones de Maxwell en medios (240). 2.2. Otra forma de ecuaciones del campo en medios. Vector de la inducción eléctrica generalizada (245).
§ 3. Tensor de la constante dieléctrica compleja. Dispersión temporal 247
3.1. Función de respuesta y constante dieléctrica (247). 3.2. Propiedades de la constante dieléctrica con frecuencias reales (249). 3.3. Propiedades de la constante dieléctrica con valores complejos de la frecuencia (253).
§ 4. Tensor de la constante dieléctrica compleja. Dispersión espacial 256
§ 5. Relaciones de Kramers — Krönig 260
§ 6. Apantallado de Debye 265
6.1. Potencial electrostático de una carga puntual en un medio (265). 6.2. Radio de Debye (268).

§ 7. Disipación de la energía del campo en medios dispersantes 272
§ 8. Energía del campo electromagnético y flujo de energía en un medio dispersante 275
§ 9. Ecuaciones de electrodinámica en medios en movimiento 283
9.1. Ecuaciones de Maxwell y ecuaciones materiales (283). 9.2. Condiciones de frontera (287). 9.3. Ecuaciones de Maxwell con vector de inducción generalizado (289).
§ 10. Fuerzas que actúan sobre los elementos del medio en el campo electromagnético 290
10.1. Fuerzas que actúan sobre un dieléctrico en un campo eléctrico continuo (290). 10.2. Fuerzas que actúan sobre un material magnético ubicado en un campo magnético continuo (294). 10.3. Fuerzas en el campo electromagnético alternativo (295).
§ 11. Campos medio y eficaz en los medios 298

Capítulo II. Campo eléctrico continuo en medios 304
§ 12. Campo eléctrico en el entorno de los conductores 304
§ 13. Campo eléctrico en medios no conductores 308
§ 14. Correlaciones termodinámicas para los dieléctricos en un campo eléctrico exterior 310
14.1. Energía interna y energía libre de un dieléctrico (310). 14.2. Variación de la energía interna de un dieléctrico con la conexión isotérmica del campo (313). 14.3. Simetría del tensor de la constante dieléctrica (315).
§ 15. Fuerzas que actúan sobre los dieléctricos líquidos en el campo eléctrico. Electrostricción 316
§ 16. Constante dieléctrica estática 317
16.1. Relación entre constante dieléctrica estática y las fluctuaciones del vector de polarización del medio al no haber campo eléctrico exterior (317). 16.2. Constante dieléctrica de un medio con moléculas polares (321). 16.3. Constante dieléctrica de un medio con moléculas no polares (322).
§ 17. Fenómenos de transporte en un medio ubicado en un campo eléctrico continuo 324
17.1. Corriente eléctrica y flujo de calor en el medio en presencia de un campo eléctrico exterior (324). 17.2. Efecto Peltier (326). 17.3. Efecto Thomson (327). 17.4. Fuerza termoelectromotriz (327). 17.5. Relaciones de Thomson (328).
§ 18. Estimación de la conductividad con la aproximación del tiempo de relajación 328
§ 19. Sustancia piezo y ferroeléctrica 332
19.1. Efecto piezoeléctrico (332). 19.2. Sustancias ferroeléctricas (333).

Capítulo III. Campo magnético continuo en medios 339
§ 20. Clasificación de los materiales magnéticos 339
§ 21. Campo magnético continuo en un medio condicionado por corrientes 340
§ 22. Relaciones termodinámicas para los materiales magnéticos en el campo magnético 341
§ 23. Desimantación adiabática 344

§ 24. Teorema de Bohr — Van Lenven 347
§ 25. Efectos de transporte en el campo magnético 350
§ 26. Ferromagnetismo 351
§ 27. Propiedades magnéticas de los superconductores 354
Capítulo IV. Ondas electromagnéticas en medios 358
§ 28. Ondas electromagnéticas planas en medios isótropos. Ondas longitudinales y transversales 358
§ 29. Ondas electromagnéticas en medios anisótropos 363
§ 30. Propagación de ondas en un medio no homogéneo. Ondas superficiales. Efecto pelicular 366
30.1. Ondas superficiales (367). 30.2. Efecto pelicular normal (370). 30.3. Efecto pelicular anormal (374). 30.4. Efecto pelicular con altas frecuencias (381).
§ 31. Ondas electromagnéticas en guíaondas 383
§ 32. Reflexión y refracción de ondas electromagnéticas volumétricas transversales en el límite de separación de los medios 387
§ 33. Constante dieléctrica del plasma y de medios cuasiplásmicos con frecuencias finitas 390
33.1. Cálculo de la función $\varepsilon(k, \omega)$ del gas electrónico con k y ω finitas (390). 33.2. Oscilaciones longitudinales de un gas electrónico sin colisiones no degenerado (392). 33.3. Oscilaciones transversales del gas electrónico sin colisiones no degenerado (395). 33.4. Oscilaciones iónico-acústicas (396). 33.5. Descripción hidrodinámica de las ondas en el plasma homogéneo isótropo (398).
§ 34. Descripción magnetohidrodinámica de las ondas electromagnéticas en el plasma en un campo magnético 402
34.1. Sistemas de ecuaciones de hidrodinámica magnética (402). 34.2. Ondas magnetohidrodinámicas (406).
§ 35. Paso de las ondas electromagnéticas por medios girótropos 408
§ 36. Propagación de la radiación dura en los cristales 412
36.1. Ecuaciones fundamentales de la teoría de difracción de los rayos X en los metales (412). 36.2. Aproximaciones cinemática y dinámica en la teoría de difracción de los rayos X (415). 36.3. Sección de la dispersión difractiva de los rayos X en cristales de volumen finito (417). 36.4. Efectos térmicos durante la difracción de los rayos X (422).
Capítulo V. Radiación de ondas electromagnéticas por partículas rápidas en medios 425
§ 37. Radiación de las partículas rápidas en un medio espacial-homogéneo 425
37.1. Descripción de las pérdidas de energía de partículas rápidas no relativistas en una sustancia en los márgenes del formalismo dieléctrico (425). 37.2. Frenado de una partícula rápida a cuenta de la emisión de plasmones volumétricos (428). 37.3. Radiación de Vavilov — Cherenkov (431).
§ 38. Generación de ondas electromagnéticas durante el movimiento de una partícula rápida en un medio espacial-homogéneo. Radiación transitoria. Excitación de plasmones superficiales 432
§ 39. Radiación gamma y de rayos X durante el movimiento de partículas rápidas cargadas por los cristales 437

Capítulo VI. Procesos electromagnéticos no lineales en medios 440
§ 40. Polarización no lineal 440
40.1. Expresión fenomenológica general para la polarizabilidad no lineal (440). 40.2. Efectos de no linealidad cuadráticos según el campo (442). 40.3. Efectos de no linealidad cúbicos según el campo (444).
§ 41. Modelos clásicos que aseguran la existencia de la no linealidad de la susceptibilidad 444
41.1. Susceptibilidad no lineal del gas de electrones libres (444). 41.2. No linealidad ligada con el anharmonismo de las oscilaciones (445).
Complementos 448
Comp. I. Elementos de álgebra y análisis tensorial en el espacio euclidiano tridimensional 448
Comp. I.1. Definición de tensor (448). Comp. I.2. Operaciones con tensores (450). Comp. I.3. Simetría de tensores (451). Comp. I.4. Tensores invariantes $\delta_{\alpha\beta}$ y $e_{\alpha\beta\gamma}$ (451). Comp. I.5. Conversión de un tensor simétrico de II rango a la forma diagonal (452). Comp. I.6. Transformación de los tensores haciendo la inversión del sistema de coordenadas. Seudotensores (454).
Comp. II. Datos adicionales sobre los tensores en el espacio cuatridimensional seudoeuclidiano 455
Comp. II.1. Ligazón entre los tensores cuatri y tridimensionales (455). Comp. II.2. Teorema de Ostrogradski — Gauss en el 4-espacio (455).
Comp. III. Principio variacional para los sistemas continuos 457
Comp. III.1. Vibraciones de un medio elástico como límite de las vibraciones de masas puntuales discretas (457). Comp. III.2. Forma lagrangiana de las ecuaciones de movimiento de un medio continuo (459).
Comp. IV. Función delta de Dirac 462
Comp. IV.1. Definición y propiedades generales (462). Comp. IV.2. Ciertas representaciones de las funciones delta (464). Comp. IV.3. Representación de la función delta mediante las integrales de contorno en el plano complejo (466).
Comp. V. Conversión de las magnitudes eléctricas y magnéticas del sistema SI al de Gauss y viceversa 467
Comp. VI. Acerca del tensor energía — impulso 469
Comp. VI.1. Simetría del tensor energía — impulso (469). Comp. VI.2. Acerca de la unicidad de determinación del tensor energía — impulso de campo (471).
Comp. VII. Funciones esféricas de Legendre 471
Comp. VIII. Campo eléctrico continuo dentro de una cavidad esférica en un dieléctrico 473
Comp. IX. Campo reactivo en un dieléctrico 475
Comp. X. Lugar de la electrodinámica clásica en el cuadro físico del universo 476
Bibliografía 480
Indice alfabético de materias 486

Introducción a la edición española

La exposición de la electrodinámica se realiza en el presente curso como parte de la física teórica. El manual está fundamentalmente dirigido a los estudiantes de física. Pero, al mismo tiempo, gracias a la correspondiente elección del material y al estilo de la exposición, el libro puede ser empleado como material informativo para los colaboradores científicos e ingenieros. Los autores han tendido a reflejar en la obra el nivel contemporáneo de desarrollo de electrodinámica clásica y las tendencias actuales en la enseñanza de física teórica como asignatura básica de todas las disciplinas relacionadas con las especialidades físicas.

Con el fin de alcanzar estos objetivos, al exponer cualquier asignatura física hay que apoyarse en el empleo de los principios generales, fundamentales de física. Debido a esto, desde un principio, la electrodinámica se expone en forma de una teoría consecutivamente relativista. También desde este punto de vista práctico semejante enfoque de la electrodinámica es preferible; con frecuencia es más económico y de mayor fiabilidad incluso cuando los efectos relativistas son muy débiles.

Claro está, que semejante estilo presupone la familiarización previa de los lectores con la mecánica clásica, en particular con los formalismos lagrangianos y hamiltonianos y con los principios variacionales de mecánica, asimismo, entre ellos, para los sistemas continuos. Un breve resumen de este último problema ha sido incluido en el presente texto en forma del complemento III. Además, se suponen ciertos conocimientos de la teoría especial de la relatividad (TER) y de las leyes experimentales de electromagnetismo, así como de las ecuaciones de Maxwell. Es deseable que el lector tenga alguna información sobre termodinámica. Por regla, los indicados materiales pueden ser hallados en cursos suficientemente sustanciales de física general y de mecánica clásica.

La acentuación de los principios fundamentales favorece a que en el lector se formen representaciones físicas generales y esto es uno de los principales objetivos del estudio de física teórica. Las nociones generales tienen singular valor porque, en particular, ellas influyen de modo sustancial en la estimación no sólo de los hechos científicos existentes hoy día, sino de aquellos que aparecerán en el más próximo futuro. Pero, al mismo tiempo, hay que recordar que la nueva información sobre la naturaleza se adquiere al realizar experimentos, por lo que la física teórica en general y la electro-

dinámica en particular, deben tener tal estructura que la comprensión y generalización de nuevos hechos experimentales transcurra por la vía más natural y operativa. Este último principio ha influenciado en alto grado sobre la elección del material expuesto en el libro y sobre el estilo de la exposición.

Hemos tendido a exponer los fundamentales resultados obtenidos hacia el tiempo presente en electrodinámica clásica, prestando la mayor atención a aquellos momentos que conducen al lector a los parágrafos dedicados al electromagnetismo, asignatura que en el presente se desarrolla con intensidad.

Al dirigir la atención de los lectores hacia dichos momentos tendíamos a conseguir que la asimilación del material por los lectores fuera activa y, por lo tanto, eficaz. Si el lector se siente en particular interesado por cualquier problema, él tiene la posibilidad de hacer uso de literatura especial cuya relación se aduce al final del libro. En considerable grado dicha relación está constituida por los resúmenes de los últimos años publicados en la revista "Успехи физических наук" ["Exitos de las ciencias fósicas" (en ruso)]. Esta se edita no sólo en ruso, sino que se traduce por completo al inglés en los EE.UU. Entre los artículos originales sólo se han incluido en la relación aquellos que fueron directamente utilizados al escribir el libro.

A pesar del adjetivo "clásica", la electrodinámica es una ciencia moderna, viva y en desarrollo. Parte considerable de los resultados obtenidos en los últimos tiempos en la teoría del electromagnetismo, se refiere a la interacción del campo electromagnético con la materia. Por regla, muchos de esos problemas no han sido aun reflejados en los textos de electrodinámica existentes. Por ello, cerca de la mitad del presente libro está dedicada a las cuestiones relacionadas con dicha interacción.

El libro consta de partes aisladas, pero íntimamente ligadas entre sí. Por esta razón, en su segunda parte se ha adoptado la numeración independiente de los parágrafos. Las fórmulas se citan sin indicar la parte del libro en todos aquellos casos cuando ello no puede conducir a equivocaciones. Parte del material se ofrece en los complementos. En ellos se incluyen cuestiones de carácter matemático (acerca de los tensores, las funciones delta, las funciones esféricas de Lagrange), la enunciación lagrangiana de las ecuaciones del movimiento de un medio continuo, algunos problemas de electrostática de dieléctricos, información adicional sobre el tensor energía — impulso, el problema del lugar de electrodinámica clásica en el cuadro general físico del universo.

Designamos el producto vectorial con el signo de multiplicar $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$, el escalar, en la forma $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ o bien $\boldsymbol{ab}$.

La selección del material para el libro y las variantes de su exposición se fundamentan en la experiencia de enseñanza de física en las dos facultades físicas del Instituto Politécnico de Leningrado. Estamos sumamente agradecidos a nuestros colegas, el contacto con los cuales, insustituible tanto

desde el punto de vista científico, como pedagógico, ha favorecido en alto grado al perfeccionamiento del libro.

La idea de crear semejante libro de texto surgió en la mente del catedrático M. M. Brédov. Tratándonos con él, adquirimos muchas de sus ideas pedagógicas. En algunos de los parágrafos de la primera parte del libro han sido utilizadas las tesis de sus conferencias. Esta circunstancia, así como un profundo respeto hacia M. M. Brédov, nos obligó a incluirlo entre los coautores del texto, que fue escrito después de su fallecimiento.

Leningrado, diciembre 1984

V. V. Rumiántsev
I. N. Toptiguin

Parte I

Teoría microscópica de los fenómenos electromagnéticos en el vacío

Capítulo I. Teoría especial de la relatividad y cinemática relativista

La teoría especial de la relatividad (TER), en la que se basa en este libro la exposición de la mecánica y electrodinámica relativistas, fue creada por las obras de A. Einstein y otros eminentes físicos y matemáticos (H. A. Lorentz, A. Poincaré, M. Minkowski, P. Planck, etc.) a comienzo del presente siglo*). A su vez, la base de la TER fueron las representaciones acerca de las propiedades del espacio, tiempo y movimiento confeccionadas en la mecánica clásica, pero profundizadas, analizadas desde un punto de vista crítico y, en algunos importantes puntos, variadas, completadas por Einstein de acuerdo con nuevos datos experimentales, obtenidos en física hacia aquellos tiempos, al estudiar los fenómenos electromagnéticos, en particular en los medios en movimiento. Por esta causa, comenzaremos este parágrafo, dedicado a los fundamentos de la TER, por un breve resumen de algunas nociones de la mecánica clásica necesarias para la posterior exposición. Suponemos que dichas nociones son conocidas por el lector y sólo tienen que ser mencionadas.

§ 1. Principio de relatividad y transformaciones de Lorentz

1.1. Espacio y tiempo en mecánica clásica. De esta mecánica (newtoniana) es bien conocida la noción de sistema inercial (de Galileo) de referencia: éste es un sistema tal en el que un punto material, que no está en interacción con cualesquiera otros cuerpos, se encuentra en movimiento uniforme y rectilíneo o bien en reposo. Existe un conjunto infinito de sistemas inerciales, ya que todo sistema en movimiento respecto del sistema inercial dado a la velocidad constante sin rotación, también es inercial.

En diferentes sistemas inerciales las coordenadas y el tiempo son expresados unos por otros mediante sencillas correlaciones lineales. Sea que el sistema S' está en movimiento con relación al sistema S a una velocidad $V = \text{const}$ dirigida por el eje x, con la particularidad de que en el momento $t = 0$ los orígenes de los sistemas de coordenadas coincidían y que sus

*) Las obras de los fundadores de la TER pueden ser halladas en el compendio [77].

correspondientes ejes eran paralelos (fig. 1.1). En semejante caso, las coordenadas x', y', z' y el tiempo t' en el sistema S' están relacionadas con x, y, z, t determinadas en el sistema S, por las correlaciones

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \tag{1.1}$$

llamadas *transformaciones de Galileo*.

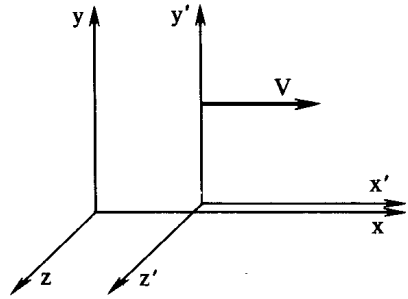

Fig. 1.1

Debe llamar nuestra atención el hecho de que el tiempo no sufre transformación, es igual en todos los sistemas inerciales, él tiene carácter absoluto. Esta propiedad del tiempo en la mecánica clásica fue expresada con claridad por su fundador — Newton: "El tiempo absoluto, matemático real es independiente de por sí y por su esencia, no tiene relación con nada del exterior, transcurre uniformemente y de otro modo se denomina duración".

De las transformaciones de Galileo (1.1) sigue la ley de composición de las velocidades en la mecánica clásica: si v y v' son las velocidades de un punto material respecto de los sistemas S y S'

$$v' = v - V. \tag{1.2}$$

La composición de las velocidades se realiza de acuerdo con la ley de la suma de vectores (regla del paralelogramo) y en nada se limitan por su magnitud absoluta.

Los sistemas inerciales de referencia se distinguen de los sistemas no inerciales porque en los primeros las leyes de física se enuncian de la forma más sencilla. En los sistemas inerciales los fenómenos físicos también parecen ser más sencillos que en los no inerciales: en ellos no se sobrepone el movimiento variado del propio sistema de referencia.

Cuando en un espacio, considerado con relación a un sistema inercial arbitrario, no hay cuerpos materiales o campos, él se considera homogéneo

*) *I. Newton.* Principios matemáticos de la filosofía de la naturaleza. Obras Completas del académico A. N. Krylov, t. VII, M.-L., Editorial de la A C de la URSS, 1936.

e isótropo y el tiempo, homogéneo. Por homogeneidad del espacio entendemos la equivalencia de todas sus partes: todo sistema mecánico ubicado en una región del espacio libre, tomada al azar, se moverá del mismo modo que en cualquier otro lugar. Con otras palabras, la conducta de iguales sistemas mecánicos con las mismas condiciones iniciales será idéntica en diversas partes del espacio homogéneo. Por su conducta no podremos distinguir una región del espacio de otra.

La isotropía del espacio significa la equivalencia en él de todas las direcciones: la conducta del sistema mecánico no depende de su orientación. Y, por fin, la homogeneidad del tiempo quiere decir que todos sus momentos son equivalentes: el movimiento de un sistema mecánico transcurrirá de la misma manera independientemente de en qué momento de tiempo fue "puesto en marcha", es decir, cuando fueron fijadas las condiciones iniciales del movimiento. Claro está, que dichas condiciones deberán ser las mismas para distintas "puestas en marcha".

Cuando hablamos de la igualdad de transcurso de los fenómenos mecánicos en diversas situaciones, lo que se desprende de las propiedades de simetría del espacio y el tiempo, hasta el momento teníamos en cuenta un determinado sistema inercial de referencia o bien sistemas inmóviles entre sí y sólo desplazados en la magnitud de cierto vector o girados a cierto ángulo. Pero como ya hemos dicho, hay un conjunto infinito de sistemas inerciales en movimiento a velocidades constantes, unos respecto de otros. Debido a esto, surge una importante pregunta: ¿cómo transcurrirán los fenómenos mecánicos en los sistemas inerciales en movimiento? ¿Podemos determinar si el sistema de referencia en el que observamos uno u otro fenómeno mecánico se mueve o está en reposo observando el movimiento de ciertos cuerpos?

La respuesta a estas preguntas nos la ofrece el pricipio de relatividad mecánica clásica, que es la generalización de los datos experimentales acerca de las propiedades del movimiento mecánico:

para iguales condiciones iniciales, los fenómenos mecánicos transcurren de igual forma en todos los sistemas inerciales.

Esto quiere decir que todos los sistemas inerciales son equivalentes, ninguno de ellos por nada se destaca, es privilegiado. El movimiento sólo puede ser determinado respecto de cierto cuerpo o sistema de ejes relacionados con él, tiene carácter relativo, no existe movimiento "absoluto".

Conviene remarcar la importancia de la reserva acerca de la igualdad de las condiciones iniciales. Si las condiciones iniciales de movimiento de los cuerpos en diversos sistemas inerciales son distintas, el movimiento de los cuerpos transcurrirá de forma diferente. P. ej., un balón lanzado verticalmente hacia arriba en el vagón de un tren, se moverá por una recta en el sistema relacionado con el vagón, pero su trayectoria será una parábola en el sistema ligado a la Tierra. La diferencia de movimiento está relacionada con la desigualdad de las condiciones iniciales en dos sistemas: el tren y la

Tierra. Al no exigir la identidad de las condiciones iniciales, sólo podemos afirmar la igualdad de las leyes de mecánica (ecuaciones diferenciales de movimiento), pero no de los propios movimientos (es decir, las coordenadas, velocidades, trayectorias de los cuerpos) en distintos sistemas inerciales.

La expresión matemática del principio de relatividad de la mecánica clásica es la invariancia de sus ecuaciones de movimiento en lo que atañe a las transformaciones de Galileo (1.1). Escribamos la ecuación de movimiento de una partícula de masa m en el sistema S:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = F, \tag{1.3}$$

donde F es la fuerza que actúa sobre dicha partícula, r, el radio vector de ésta. De las fórmulas (1.1) sigue: $d^2r/dt^2 = d^2r'/dt'^2$, es decir, la aceleración de la partícula es la misma en los dos sistemas inerciales. Además, en la mecánica clásica la masa es una magnitud invariante, igual en todos los sistemas de referencia: $m' = m$. Esta misma propiedad es propia de la fuerza: $F' = F$.

La invariancia de la fuerza es una afirmación menos evidente, por lo que la examinaremos con mayor detalle. En los sistemas inerciales de referencia sólo existen las fuerzas de interacción entre los cuerpos que pueden depender de la posición relativa de ellos y de su velocidad relativa. Para mayor precisión, sea que la partícula a examinar está en interacción con un cuerpo de pequeñas dimensiones. Si en el sistema S designamos su radio vector por R y la velocidad por u, la fuerza F dependerá de las diferencias $r - R$, $\mathrm{v} - u$:

$$F = F(r - R,\ \mathrm{v} - u). \tag{1.4}$$

Pero al pasar a otro sistema inercial, de acuerdo con las transformaciones de Galileo (1.1) y la ley de composición de velocidades (1.2),

$$r - R = r' - R', \qquad \mathrm{v} - u = \mathrm{v}' - u',$$

es decir, la distancia entre los cuerpos y sus velocidades relativas no varían. Es de importancia que, de acuerdo con los datos experimentales, en la región de aplicación de la mecánica clásica incluso la propia interacción entre los cuerpos no depende de en qué sistema inercial ella se examina. Por esto

$$F'(r' - R',\ \mathrm{v}' - u') = F(r - R,\ \mathrm{v} - u), \tag{1.5}$$

o sea, tanto las propias funciones F (fuerzas), como sus argumentos son iguales.

Así, pues, al pasar al sistema S' la ecuación (1.3) conserva su aspecto

$$m'\frac{d^2r'}{dt'^2} = F', \tag{1.6}$$

con la particularidad de que la masa, la fuerza y la aceleración son iguales en los dos sistemas, sólo varían las designaciones de dichas magnitudes. Esto significa que la ecuación de movimiento (1.3) queda invariante respecto de las transformaciones de Galileo. Pero entonces, en correspondencia con el contenido del principio de relatividad, las soluciones de las ecuaciones (1.3) y (1.6), también serán idénticas con iguales condiciones iniciales.

Prestemos atención a una importante propiedad de la interacción entre los cuerpos reflejada en las fórmulas (1.4) — (1.5). La fuerza depende de las coordenadas (y, posiblemente, de las velocidades) de los cuerpos en interacción tomadas en un mismo momento de tiempo, lo que quiere decir que si la posición de uno de los cuerpos varía, el segundo, sentirá dicha variación en el mismo momento de tiempo que ella se produce. La transmisión de la interacción transcurre de inmediato, es decir, a velocidad infinitamente grande.

La suposición acerca de la velocidad infinita de transmisión de las inter acciones (a veces se habla de la propagación de señales), contenida en las ecuaciones de la mecánica clásica, se halla en plena correspondencia con el carácter absoluto del tiempo. En efecto, supongamos que en el sistema S hay un dispositivo que de forma isótropa, en todas direcciones, emite una "señal" que se propaga a velocidad infinita. Los respectivos instrumentos ubicados en cualesquiera puntos del espacio y sistemas inerciales, que respecto de S se mueven a velocidades finitas, fijan la indicada señal en el mismo momento que ella fue emitida. Es decir, tales señales pueden servir de "marcas del tiempo" con las que será registrado en todos los sistemas inerciales un lapso igual, es decir, el tiempo absoluto $t' = t'' = \ldots = t$.

De modo análogo determinamos la simultaneidad: si dos señales han sido emitidas simultáneamente de dos puntos diferentes en el sistema S, ellas serán fijadas de manera simultánea por el correspondiente instrumento en el sistema S'. Los sucesos simultáneos en un sistema inercial, también lo son en cualquier otro. En física clásica la simultaneidad es absoluta.

1. Existen sistemas inerciales de referencia, con relación a los cuales la partícula libre (punto material) está en movimiento uniforme y rectilíneo (el reposo es un caso particular de semejante movimiento).

2. En cualquier sistema inercial de referencia, el espacio libre de la materia es homogéneo e isótropo y el tiempo homogéneo.

3. Con iguales condiciones iniciales, todo fenómeno mecánico transcurre de la misma forma en todos los sistemas inerciales de referencia (principio de relatividad).

4. Las interacciones entre cuerpos materiales y las señales que transmiten la información pueden propagarse a velocidad infinita.

5. Las coordenadas y el tiempo en dos sistemas inerciales de referencia están relacionados por las transformaciones de Galileo (1.1). En todos los sistemas inerciales el tiempo es igual, o sea, es absoluto. La simultaneidad también es absoluta.

1.2. Principio de la relatividad de Einstein. Las investigaciones experimentales y teóricas de los fenómenos electromagnéticos, especialmente en los cuerpos en movimiento, requirieron revisar y precisar las representaciones fundamentales sobre el espacio, tiempo y movimiento. Aquí no vamos a discutir los fundamentos experimentales de la TER, suponemos que el lector los conoció en el curso de física general*). Expondremos las propiedades fundamentales del espacio, tiempo y movimiento como hoy día se entienden. Con ello, para garantizar la sucesión, nos basaremos en los p. 1 — 5 enunciados al final del § 1.1.

1. El postulado sobre la existencia de los sistemas inerciales y su definición quedan en pleno rigor en la TER.

2. Los límites de aplicación de la afirmación sobre las propiedades de simetría del espacio y el tiempo (homogeneidad e isotropía del espacio libre, homogeneidad del tiempo) se amplían y difunden no sólo a los fenómenos mecánicos, sino también a todos los fenómenos físicos (electromagnéticos, térmicos, procesos de interacción de las partículas elementales, etc). P. ej., esto significa que la consecuencia de la homogeneidad del espacio será el transcurso igual de todo fenómeno físico (oscilaciones del péndulo, emisión de las ondas de radio (hertzianas) por la antena, desintegración de una partícula elemental, etc.) en cualquier lugar del espacio libre. De forma análoga, se generalizan los conceptos de isotropía del espacio y homogeneidad del tiempo.

3. El principio de relatividad de la mecánica clásica se generaliza para todos los fenómenos físicos sin exclusión y se convierte en una de las leyes más generales de la naturaleza. En este sentido generalizado, él puede ser enunciado de la siguiente forma:

I. Todo fenómeno físico transcurre del mismo modo en todos los sistemas de referencia inerciales si las condiciones iniciales son las mismas.

4. Las interacciones entre los cuerpos y las señales que transmiten la información no pueden propagarse a velocidad infinita. Existe una velocidad maxima (límite) de propagación de las interacciones. Múltiples datos experimentales nos indican que dicha velocidad límite coincide con la de la luz en el vacío*).

Por regla, esta afirmación recibe el nombre de postulado de la constan-

---

*) Una perfecta exposición de los experimentos que yacen en la base de la TER y la formación de sus ideas fundamentales desde el punto de vista histórico, el lector hallará en el libro de L. I. Mandelshtam [2].

*) Al describir diversos fenómenos físicos podemos hacer uso de dos tipos de magnitudes: de coordenadas y físicas. Como las primeras reflejan en mayor grado la elección de la red de coordenadas y temporal y requieren el conocimiento de reglas especiales para tratarlas, ellas no se emplean en el presente libro. Todas las afirmaciones dadas aquí y más adelante en el texto sólo se refieren a las magnitudes físicas. El lector puede familiarizarse con el empleo de las magnitudes de coordenadas en el libro de A. A. Logunov [63].

cia de la velocidad de la luz en el vacío. Este puede ser formulado de otra forma equivalente:

II. La velocidad de la luz en el vacío es igual en todos los sistemas de referencia inerciales, no depende del movimiento de la fuente o receptor de la luz.

Es fácil comprender que las dos enunciaciones aducidas son equivalentes. Si la velocidad límite de propagación de las señales y de las interacciones variara al pasar de un sistema de referencia a otro, perdería su carácter límite: al pasar de uno a otro sistema inercial, sería posible tanto disminuir la velocidad, como aumentarla. Por consiguiente, al postular la existencia de la velocidad límite, debemos obligatoriamente considerarla igual en todos los sistemas de referencia inerciales, es decir, como magnitud invariante. El hecho de que precisamente la velocidad de la luz (o sea, la de propagación de las ondas electromagnéticas) coincide con la velocidad límite de transmisión de las interacciones, no desempeña un papel decisivo para la TER, pero es una importante propiedad del propio campo electromagnético.

El conjunto de los postulados I y II recibe el nombre de *principio de relatividad de Einstein**). Con facilidad vemos que estos postulados contradicen a la mecánica clásica. Como pudimos apreciar, las leyes de mecánica clásica serán iguales en todos los sistemas inerciales si las coordenadas y el tiempo se transforman según las fórmulas de Galileo (1.1). Pero de éstas sigue la ley de composición de las velocidades (1.2). Si la velocidad de la luz en el sistema S es igual a c, de acuerdo con (1.2), en otro sistema inercial

$$\mathbf{v}' = c - V. \tag{1.7}$$

Por su módulo la velocidad $\mathbf{v}'$ puede ser tanto mayor como menor que c en función del ángulo entre c y V, lo que demuestra la incompatibilidad del postulado sobre la constancia de la velocidad de la luz respecto de las transformaciones de Galileo y, por lo tanto, con las leyes de la mecánica clásica. Por esto, si queremos admitir las tesis (1) — (4), aducidas más arriba, debemos renunciar de las transformaciones de Galileo y del carácter absoluto del tiempo, es decir, del p. 5 en el § 1.1.

Einstein analizó profundamente las propiedades del tiempo y el concepto de simultaneidad. Demostró que la mecánica clásica atribuía al tiempo tales propiedades que, hablando en general, no concuerdan con el experimento y podrían considerarse correctas aproximadamente sólo a pequeñas velocidades de movimiento. Uno de los puntos fundamentales del análisis einsteiniano de la noción de tiempo, es la sincronización de los relojes, o sea, el establecimiento de un tiempo único en **los límites de un mismo sistema de referencia inercial.** Si dos relojes están ubicados en un punto del es-

*) Por primera vez este principio fue enunciado en su obra básica dedicada a la TER [102].

pacio su sincronización se realiza directamente: las agujas se ponen en una misma posición (suponemos que los relojes son iguales y su precisión ideal). ¿Pero cómo verificar la sincronización de los relojes ubicados en diferentes puntos del espacio A y B?

Einstein propuso sincronizar los relojes con señales luminosas que, como vemos, se propagan a velocidad de transmisión de las señales e interacciones máxima posible en la naturaleza. Emitamos del punto A en el momento t_1 una corta señal luminosa que se refleja en cierto espejo en el punto B y retorna al punto A en el momento t_2. Los tiempos de propagación de la señal a la ida y la vuelta son finitos (¡la velocidad de la señal es finita!) e iguales (¡la isotropía del espacio!). Por esta causa, el reloj en el punto B se sincronizará con el reloj en el punto A, si sus indicaciones t_B en el momento de llegada de la señal están ligadas con las indicaciones del reloj A en el momento de la emisión (t_1) y de retorno (t_2) de la señal con las relaciones

$$t_1 = t_B - r_{AB}/c, \qquad t_2 = t_B + r_{AB}/c,$$

donde r_{AB} es la distancia entre los puntos A y B. De aquí hallamos la posición en la que hay que poner las agujas del reloj B al llegar la señal: $t_B = (t_1 + t_2)/2$. Es evidente en absoluto que la sincronización de los relojes puede realizarse con ese mismo resultado emitiendo la señal del punto B y recibiéndola en el punto A. Este mismo procedimiento de sincronización es posible aplicarlo para los puntos C, D, etc. y así sincronizar todos los relojes inmóviles, unos respecto de otros, ubicados en cierto sistema inercial S: todos ellos mostrarán igual tiempo t.

¿Es posible sincronizar los relojes en movimiento con relación al sistema S con los relojes inmóviles en S? Los experimentos mentales con señales luminosas, análogos al descrito, muestran que semejante sincronización es imposible, que no existe para todos los sistemas inerciales con tiempo único. Con el fin de cerciorarnos de esto, examinemos el aleccionador ejemplo de "tren" einsteiniano.

Sea que el observador A se encuentra en la mitad de un largo "tren" en movimiento a velocidad relativista y el observador B en la Tierra, cerca de la línea de ferrocarril. Los instrumentos C y D, ubicados en la cabeza y la cola del tren, emiten a iguales distancias de A ciertos destellos luminosos que llegan a los observadores A y B, simultáneamente, en el momento cuando éstos se alcanzan. ¿A qué conclusiones pueden llegar los observadores en el tren y en la Tierra del hecho de la llegada simultánea a ellos de las señales de C y D?

El observador A: las señales fueron emitidas desde puntos alejados de mí a iguales distancias y llegaron al mismo tiempo, por lo tanto, también se emitieron simultáneamente.

El observador B: las señales llegaron a mí al mismo tiempo, pero en el momento de su emisión la cabeza del tren estaba más cerca de mí que la co-

la. Esto significa, que la señal de la cola hizo mayor recorrido y fue emitida antes que la señal de la cabeza.

Este ejemplo muestra que el reloj en el sistema del tren (S') sólo está sincronizado desde el punto de vista del observador inmóvil respecto de S'. Para el observador en el sistema S (la Tierra) los relojes en los puntos C, D, A muestran distinto tiempo. Por esto, los acontecimientos simultáneos en el sistema S' (destellos en C y D) no lo son en el sistema S. Esto también quiere decir, que la sincronización del reloj del observador B, que está en la Tierra, con el reloj en el tren es imposible, ya que en dos sistemas inerciales diferentes, en movimiento uno con relación al otro, el tiempo es distinto, $t' \neq t$. Esto no excluye la posibilidad de que el tiempo coincida en diversos sistemas en un momento aislado, p. ej., los observadores A y B al encontrarse pueden establecer las agujas de sus relojes de igual manera. Pero ya en cualquier posterior momento las indicaciones de los relojes se distinguirán.

1.3. Transformaciones de Lorentz. Sobre la base de las propiedades del espacio, tiempo y movimiento en la TER, estudiadas más arriba, necesitamos establecer las fórmulas que puedan sustituir las transformaciones de Galileo para transformar las coordenadas y el tiempo al pasar de un sistema de referencia inercial a otro. La lógica de la deducción ha de ser la siguiente: partiendo de los postulados de física, vamos a formular por sucesivas etapas las exigencias matemáticas a las que deben satisfacer las fórmulas de las transformaciones y en cada una de las etapas, buscar las respectivas limitaciones para las fórmulas buscadas, hasta que determinemos su estructura definitiva.

1. De la homogeneidad del espacio y el tiempo se desprende que las transformaciones deben ser lineales:

$$x' = \alpha x + \alpha' y + \beta' z + \beta t + p, \text{ etc.}, \tag{1.8}$$

donde $\alpha, \beta, \alpha', \ldots$ son coeficientes constantes. Si estas magnitudes fuesen funciones de las coordenadas y el tiempo (es decir, entre las variables con raya y sin ella la relación fuese no lineal), esto significaría que la ley de transformación (1.8) sería distinta para diversos puntos del espacio y diferentes momentos de tiempo. Esto contradiría la homogeneidad del espacio y el tiempo, o sea, por la ley de transformación podrían distinguirse unas regiones del espacio (y el momento de tiempo) de otras. Pero, claro está, que los coeficientes α, β, etc. pueden depender de la velocidad relativa.

2. Ahora, concreticemos los sistemas que examinamos (fig. 1.1). Sea que los ejes correspondientes son paralelos y el movimiento relativo transcurre a lo largo del eje x a una velocidad V, mientras que los orígenes de referencia han sido elegidos de forma que para $t = 0$ el punto $x' = y' = z' = 0$ (origen de coordenadas del sistema S') coincide con el punto $x = y = z = 0$ (origen de coordenadas del sistema S). Las agujas del reloj en el sistema S' son establecidas de modo que en el momento de la coinciden-

cia de los orígenes de coordenadas muestren el tiempo $t' = 0$. En tales condiciones, los términos independientes en las igualdades (1.8) (la constante p, etc.) se reducirán a cero.

Más adelante veremos que el plano xy coincide con el plano $x'y'$, lo que significa que con $z' = 0$ deberemos tener $z = 0$, con la particularidad de que estas igualdades han de realizarse con todo valor de x', y', t' y, respectivamente, de x, y, t. Esto sólo es posible si la ligazón entre z y z' tiene el aspecto $z' = kz$, $k = \text{const}$. Debido a la arbitrariedad de las direcciones de los ejes y y z (¡isotropía del espacio!), igual ligazón con el mismo coeficiente k deberá existir entre y e y'; $y' = ky$.

Ahora examinemos las transformaciones de x' y t'. Escribámosla en la forma

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta t + \alpha' y + \beta' z, \\ t' &= \sigma x + \delta t + \sigma' y + \delta' z. \end{aligned} \tag{1.9}$$

En el plano $x' = 0$ tenemos $x = Vt$ para toda z e y, ya que el sistema S' se mueve respecto de S a velocidad V. Poniendo estos valores de x y x' en la primera igualdad (1.9) tendremos $\alpha' = \beta' = 0, \beta = -\alpha V$. Para finalizar, dirijámonos a la fórmula de transformación para t'. En el sistema S' hemos establecido el reloj de manera que para $x = 0$ y $t = 0$ también $t' = 0$, lo que sólo es posible cuando $\sigma' = \delta' = 0$. Como resultado obtenemos las siguientes fórmulas para las transformaciones:

$$\begin{aligned} x' = \alpha(V)(x - Vt), \quad y' = k(V)y, z' = k(V)z, \\ t' = \sigma(V)x + \delta(V)t, \end{aligned} \tag{1.10}$$

donde en los coeficientes se indica de forma explícita la dependencia de la velocidad relativa.

3. Hagamos ahora uso de la equivalencia de los sistemas S y S'. Ella significa que las fórmulas para pasar de S' a S deben desprenderse de las fórmulas de transformación (1.10) sustituyendo V por $-V$:

$$\begin{aligned} x = \alpha(-V)(x' + Vt'), \quad y = k(-V)y', \quad z = k(-V)z', \\ t = \sigma(-V)x' + \delta(-V)t'. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Examinemos primero las fórmulas para y y z, casos (1.10) y (1.11), cuya diferencia sólo consiste en la dirección de la velocidad relativa que en ambos casos es perpendicular al plano yz. Pero las dos direcciones son equivalentes (¡isotropía del espacio!), por lo que $k(-V) = k(V)$. Haciendo la transformación de y a y', después de y' a y tendremos $y = k^2y$, o sea, $k^2 = 1$, $k = \pm 1$. El valor $k = -1$ responde a la orientación inversa de los ejes y e y', por lo que sólo para el valor $k = 1$ habrá correspondencia con la fig. 1.1.

Dirijámonos a las transformaciones (1.11) y pongamos en la fórmula para x los valores de x' y t' de (1.10):

$$x = [\alpha(-V)\alpha(V) + V\sigma(V)\alpha(-V)]x + \alpha(-V)V[\delta(V) - \alpha(V)]t. \tag{1.12}$$

Para que esta igualdad sea válida para todos x y t los coeficientes de transformación deben satisfacer la relación

$$\delta(V) = \alpha(V). \tag{1.13}$$

La segunda relación que sigue de (1.12) nos hará falta. En lugar de ella es más cómodo hacer uso del postulado de la constancia (o con mayor precisión, de invariancia) de la velocidad de la luz.

4. Supongamos que en el momento cuando coinciden los sistemas S y S' ($t = t' = 0$) de los orígenes de referencia coincidentes, se emite una corta señal luminosa. El punto de intersección del frente de onda con el eje x se mueve en el sistema S a una velocidad $x/t = c$. Pero debido a que la señal luminosa se propaga por todos los sistemas de referencia a igual velocidad, la del frente en el sistema S' será la misma $x'/t' = c$. Partiendo de estas condiciones, de (1.10), dividiendo término por término la ecuación para x' por la ecuación para t', obtendremos

$$c = \frac{\alpha(c - V)}{\sigma c + \alpha}.$$

De aquí

$$\sigma(V) = -\frac{V}{c^2}\alpha(V). \tag{1.14}$$

Con el fin de determinar el coeficiente $\alpha(V)$ examinemos las ecuaciones de un frente de onda esférico en los sistemas S y S':

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2, \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2. \tag{1.15}$$

En estas ecuaciones hemos hecho de nuevo uso de la propiedad de invariancia de la velocidad de la luz, por ello c es igual. Como $y' = y$, $z' = z$

$$(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2. \tag{1.16}$$

Con ayuda de (1.10), (1.13) y (1.14) de la última ecuación obtenemos

$$\alpha^2(1 - V^2/c^2)(c^2t^2 - x^2) = (ct)^2 - x^2,$$

de donde

$$\alpha(V) = \pm(1 - V^2/c^2)^{-1/2}. \tag{1.17}$$

Aquí, de nuevo, sólo hay que tomar el signo más, ya que el menos corresponde a la dirección opuesta de los ejes x y x'.

Poniendo en un todo único los resultados (1.10) — (1.17) llegamos a las fórmulas relativistas de transformación de las coordenadas y el tiempo (transformaciones de Lorentz):

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{1.18}$$

Las transformaciones inversas se obtienen de (1.18) sustituyendo V por $-V$:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{1.19}$$

Para reducir la anotación de las fórmulas de las transformaciones relativistas introducimos designaciones utilizadas con frecuencia

$$\beta = V/c, \qquad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}. \tag{1.20}$$

Para estas designaciones

$$x' = \gamma(x - Vt), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad ct' = \gamma(ct - \beta x). \tag{1.21}$$

Para $V/c \ll 1$ obtendremos $\sqrt{1 - V^2/c^2} \approx 1$ y las transformaciones de Lorentz (1.18) se convierten en las de Galileo (1.1). Así, pues, estas últimas sólo son aplicables a pequeñas velocidades relativas de movimiento de los sistemas de referencia en comparación con la velocidad límite c. Para $V \to c$ los coeficientes en las fórmulas (1.18), (1.19) se reducen a la infinidad y las propias transformaciones de Lorentz pierden su sentido. Esto es explicable porque los sistemas de referencia sólo pueden estar ligados con cuerpos materiales macroscópicos, cuyas velocidades relativas no pueden alcanzar la velocidad límite c.

§ 2. Ciertos corolarios de las transformaciones de Lorentz

2.1. Reducción de las escalas. Transformaciones de volumen. Supongamos que en el sistema S' hay una barra rígida inmóvil de longitud l_0 (escala) orientada a lo largo del eje x'. ¿Qué longitud tendrá esa misma barra en el sistema S? Determinemos esta longitud de la siguiente forma: simultáneamente (en el sistema S) hacemos marcas en el eje x frente a los extremos de la escala, que en dicho sistema se mueve a una velocidad V. La distancia entre las marcas (inmóviles en el sistema S) se toma como la longitud l de la escala en movimiento en lo que atañe a S.

Para calcular la longitud l hacemos uso de las transformaciones de Lorentz (1.18). Sea que a los extremos de la barra corresponden en el sistema S' las coordenadas x_1', x_2'. Las marcas se hacen en el sistema S en los puntos x_1, x_2 en un mismo momento de tiempo $t_1 = t_2 = t$. De (1.18) tenemos

$$x_2' - x_1' = (x_2 - x_1)/\sqrt{1 - V^2/c^2};$$

pero $x_2' - x_1' = l_0$, es decir, la longitud de la barra inmóvil, $x_2 - x_1 = l$, es la longitud de la barra en movimiento. Por esto,

$$l = l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}, \tag{2.1}$$

o sea, al estar la barra en movimiento ella se acorta (contracción de Lorentz — Fitzgerald).

En las fórmulas (1.18) vemos que la escala orientada de forma perpendicular respecto de la velocidad relativa no sufre contracción de Lorentz. Por esto, el volumen $\mathcal{V}$ de un cuerpo en movimiento sólo disminuye a cuenta de la dimensión transversal:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0\sqrt{1 - V^2/c^2}. \tag{2.2}$$

Vemos que la longitud y el volumen de los cuerpos en la TER son distintos en diferentes sistemas inerciales, en tanto que en mecánica clásica estas magnitudes son invariantes, es decir, iguales en todos los sistemas de referencia.

Hay que señalar que la reducción de la escala en movimiento o la disminución del volumen de un cuerpo que se mueve, son efectos reales y no aparentes. Ellos se establecen como resultado de la medición de las distancias entre los marcos reales, que fijan la posición de los extremos de la barra en el sistema de referencia elegido.

2.2. Relatividad de la simultaneidad. Tiempo propio. En el § 1.2 se indicó que en la TER la noción de simultaneidad pierde su carácter absoluto. Ahora vamos a examinar este problema desde el punto de vista cuantitativo. Supongamos que en el sistema S' en los puntos con coordenadas x_1' y x_2' sucedieron simultáneamente ($t_1' = t_2'$) dos sucesos. Mediante (1.19) hallamos en el sistema S el intervalo de tiempo entre estos dos sucesos:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{V(x_2' - x_1')}{c^2\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{2.3}$$

Este resultado muestra que la simultaneidad tiene carácter absoluto sólo entre aquellos sucesos que transcurren en puntos coincidentes del espacio. Con $x_1 = x_2$ el tiempo entre los sucesos $\Delta t = 0$ en todos los sistemas si $\Delta t' = 0$. En el caso cuando los sucesos están separados en el espacio, siendo ellos simultáneos en un sistema de referencia, hablando en general, no lo son en otros sistemas.

Comparemos ahora los intervalos de tiempo registrados en los relojes ubicados en sistemas inerciales en movimiento e inmóvil. Sea que un reloj está en reposo en el sistema S, otro en S'. Mientras que en el sistema S' transcurre el intervalo de tiempo τ en el sistema S, de acuerdo con (1.19), pasará mayor tiempo

$$\Delta t = \tau/\sqrt{1 - V^2/c^2}. \tag{2.4}$$

Para las diferenciales de los tiempos en los dos sistemas, obtenemos la relación

$$d\tau = \sqrt{1 - V^2/c^2}\,dt. \tag{2.5}$$

Vemos que en el sistema en movimiento el tiempo transcurre con mayor lentitud.

Tanto el volumen espacial como el tiempo son distintos en diferentes sistemas inerciales. Pero su producto es invariante, de lo que podemos cer-

ciorarnos multiplicando las igualdades (2.2) y (2.4):

$$\gamma\Delta t = \gamma_0 \tau = \text{inv.} \tag{2.6}$$

El tiempo registrado por un reloj inmóvil con relación a cierto objeto, recibe el nombre de tiempo propio de éste. La fórmula (2.5) proporciona la ligazón entre el tiempo propio de los objetos en reposo en el sistema S' y el tiempo t registrado en el sistema S. El tiempo propio también puede ser determinado para objetos en movimiento variado. En este caso para $d\tau$ se conserva la determinación (2.5), en la que V tiene el sentido de la velocidad del sistema inercial que acompaña instantáneamente el objeto que examinamos y que, por lo tanto, coincide con la velocidad del propio objeto. El intervalo finito de tiempo propio se obtiene integrando (2.5):

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v^2(t)/c^2}\, dt, \tag{2.7}$$

donde $v(t)$ es la velocidad del objeto en el sistema S.

2.3. Transformación relativista de la velocidad. Estudiemos el movimiento arbitrario de cierto cuerpo de pequeñas dimensiones. Por definición $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$ son los componentes cartesianos de la velocidad del cuerpo en el sistema S y $v_x' = \frac{dx'}{dt}$, $v_y' = \frac{dy'}{dt}$, $v_z' = \frac{dz'}{dt}$ los componentes cartesianos de la velocidad de ese mismo cuerpo en el sistema S', si las variables con raya y sin ella están ligadas mediante las relaciones (1.18). Con el fin de hallar la ligazón entre v' y v reescribimos (1.18) para las diferenciales $dx' = \frac{dx - V dt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$, $dy' = dy$, $dz' = dz$, $dt' = \frac{dt - V dx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$ y dividiendo las tres primeras igualdades por dt', término a término, obtenemos,

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \qquad v_y' = \frac{v_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}, \qquad v_z' = \frac{v_z\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}. \tag{2.8}$$

Estas fórmulas expresan la ley relativista de composición de velocidades que sustituye la regla del paralelogramo (1.2) de la mecánica clásica.

En el límite $V/c \ll 1$, las fórmulas (2.8) se convierten en (1.2) y para $v \to c$ aseguran el carácter límite de la velocidad de la luz c. Así, si $v_x \to c$, $v_y = v_z = 0$, $v_y' = v_z' = 0$, y

$$v_x' = \frac{c - V}{1 - V/c} = c, \tag{2.9}$$

en correspondencia con el principio de invariancia de la velocidad de la luz. El resultado no variará si la velocidad de la luz está dirigida al encuentro de V. En el numerador y denominador de la anterior fórmula variarán los signos delante de V, pero el resultado de la composición de velocidades será el

anterior. No obstante, hay que remarcar que durante la composición de velocidades sólo queda invariable el valor absoluto de la velocidad de la luz. Su dirección puede cambiar al pasar a otro sistema.

El resultado (2.9) no significa que en la TER ninguna velocidad puede superar la de la luz. La velocidad de un rayo luminoso en la pantalla, suficientemente alejada de la fuente, la velocidad de fase de una onda, la velocidad de alejamiento o acercamiento de las partículas en un sistema de laboratorio, etc., pueden ser mayores que c. La TER sólo afirma que a velocidades mayores que la de la luz es imposible transmitir la información y las interacciones.

2.4. Transformación de la dirección. Aberración de la luz. La transformación de la velocidad (2.8) lleva a la transformación de los ángulos Θ, Φ que determinan su dirección. Sea Θ el ángulo entre la velocidad de un cuerpo v y la velocidad relativa V, en tanto que Φ es el correspondiente ángulo azimutal registrado en el plano perpendicular a V. Con (2.8) hallamos: $v_y'/v_z' = v_y/v_z$. Esto quiere decir que el ángulo azimutal Φ no se transforma:

$$\Phi = \Phi'. \tag{2.10}$$

La fórmula de transformación del ángulo Θ se halla del modo siguiente:

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}{v_x} = \frac{v' \operatorname{sen}\Theta'}{\gamma(v' \cos\Theta' + V)}. \tag{2.11}$$

Aquí hemos hecho uso de las fórmulas (2.8), sustituyendo en ellas V por $-V$.

Para el movimiento relativista relativo de los sistemas de referencia ($V \to c$) en todos los casos tenemos $\Theta \ll \Theta'$, salvo en aquel cuando la velocidad de la partícula en el sistema S' también es próxima a c y está dirigida en sentido opuesto a V.

Para la luz $v' = c$, y (2.10) — (2.11) también nos proporcionan

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{\operatorname{sen}\Theta'}{\gamma(\beta + \cos\Theta')}, \qquad \Phi = \Phi'. \tag{2.12}$$

Estas fórmulas describen la transformación de la dirección de un rayo de luz al pasar a otro sistema (fenómeno de aberración de la luz). Si $\beta \ll |\cos\Theta'|$ de (2.12) obtenemos en primer orden para V/c:

$$\operatorname{tg}\Theta' - \operatorname{tg}\Theta = \frac{\beta \operatorname{tg}\Theta'}{\cos\Theta'},$$

es decir, la variación del ángulo $\Delta\Theta = \Theta' - \Theta$ es una pequeña magnitud del orden de $\beta = V/c$. Por esto, con la primera aproximación

$$\Delta\Theta = \frac{V}{c} \operatorname{sen}\Theta'. \tag{2.13}$$

La aberración de la luz y la fórmula elemental (2.13) han desempeñado notorio papel en la historia del desarrollo de la TER. Supongamos que en cierto sistema de referencia S' ("sistema de la estrella fija") la dirección de los rayos de luz forman un ángulo $\Theta' = \pi/2$ con el sentido de la velocidad de la Tierra V (que vamos a considerar paralela a la superficie terrestre). Entonces, la estrella será vista por un telescopio instalado en la Tierra bajo un ángulo $\Delta\Theta \doteq V/c$ respecto de la vertical (fig. 2.1). Después de medio año, cuando el sentido de V cambia por el opuesto, variará también la dirección hacia la estrella. De este modo, las estrellas fijas realizarán movimientos visibles por la cúpula celeste, cuya causa es el movimiento de la Tierra por su órbita. La fórmula (2.13) se confirma bien con las observaciones.

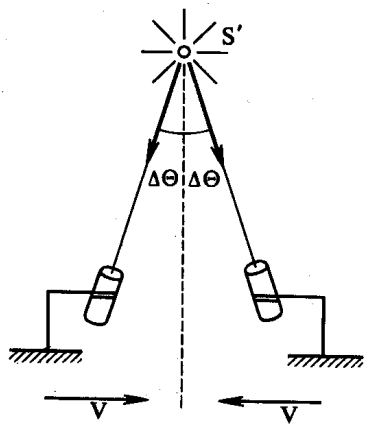

Fig. 2.1

Para finalizar, detengámonos en la transformación de las dimensiones angulares de los haces luminosos. Sea que en cierto sistema S' el haz luminoso se propaga dentro del ángulo sólido $d\Omega' = \operatorname{sen}\Theta' d\Theta' d\Phi'$. ¿Qué dimensiones angulares tendrá ese mismo haz en el sistema S?

En este sistema $d\Omega = -d\cos\Theta d\Phi$, donde los ángulos Θ y Φ han de ser expresados por Θ' y Φ' por medio de las fórmulas (2.11). Es cómodo calcular primero el $\cos\Theta$:

$$\cos\Theta = \frac{\cos\Theta' + \beta}{1 + \beta\cos\Theta'}, \tag{2.14}$$

con la particularidad de que la extracción de la raíz se elige de modo que $\cos\Theta = \cos\Theta'$ siendo $\beta = 0$. Diferenciando (2.14) expresamos $d\Omega$ por $d\Omega'$:

$$d\Omega = \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta\cos\Theta')^2} d\Omega'. \tag{2.15}$$

Como siempre, la transformación inversa se alcanza cambiando de lugar las magnitudes con raya y sin ella y variando el signo de β.

Para comprender mejor el sentido de la transformación del ángulo sólido, imaginémonos que en el sistema S' hay una fuente que emite la luz de forma isótropa en todas direcciones. Dentro del ángulo sólido $d\Omega'$ es emitida parte de toda la emisión igual a $dN = d\Omega'/4\pi$. La magnitud $f' = dN/d\Omega = 1/4\pi$ es la función de distribución por los ángulos de la luz emitida. En el sistema S esa misma parte de la emisión dN, de acuerdo con (2.15), corresponderá a otro ángulo sólido, de manera que

$$dN = \frac{1 - \beta^2}{4\pi(1 - \beta\cos\Theta)^2} d\Omega. \tag{2.16}$$

Podemos ver que la distribución isótropa de la luz por las direcciones en un sistema en otro sistema será anisótropa. La nueva función de distribución

$$f(\Theta) = \frac{1 - \beta^2}{4\pi(1 - \beta\cos\Theta)^2} \tag{2.17}$$

se hará notoriamente anisótropa a la velocidad relativista relativa, cuando $1 - \beta \ll 1$. En este caso, las emisiones en la dirección de la velocidad relativa ($\Theta = 0$) y en la dirección opuesta ($\Theta = \pi$) se refieren como

$$f(0)/f(\pi) = (1 + \beta)/(1 - \beta) \approx 4\gamma^2 \gg 1.$$

Esto significa que cualquier fuente de luz en movimiento a velocidad relativista emitirá, fundamentalmente adelante, en dirección del movimiento dentro de un cono con ángulo de abertura*)

$$\Theta_0 = \gamma^{-1} \ll 1, \tag{2.18}$$

incluso si la emisión en el sistema acompañante es próxima a la isótropa. Esta propiedad de la emisión juega notorio papel para partículas con $v \approx c$.

2.5. Forma visible de los cuerpos en movimiento rápido. Como todos los cuerpos están sometidos a la contracción de Lorentz, lo que sigue con claridad del § 2.1, sería de suponer que un observador en movimiento a velocidad relativista debería ver todos los objetos aplastados en dirección del movimiento. Así, una esfera parecería un elipsoide de revolución aplastado, un cubo tendría la forma de paralelepípedo, etc. Pero esta representación es incorrecta. Los efectos de la TER (velocidad finita de la luz y contracción de Lorentz) conducen de hecho a que los cuerpos considerados en un haz de rayos paralelos de luz (es decir, en un ángulo sólido pequeño) no parecen aplastados, sino girados a cierto ángulo α con relación al observador.

*) Es fácil comprobar con (2.17) que $f(\Theta_0)/f(0) \approx 1{,}4$. Para $\Theta \gg \Theta_0$, pero para $\Theta \ll 1$, la razón $f(\Theta)/f(0) \approx (\Theta_0/\Theta)^4 \ll 1$.

Para ilustrar esta afirmación examinemos un ejemplo: un cubo fotografiado en un haz de rayos paralelos de luz. Supongamos que un cubo opaco con arista l_0 está en movimiento en un sistema de referencia a una velocidad V con relación al observador. Este lo fotografía en el momento cuando los rayos de luz emitidos por la superficie del cubo llegan al objetivo de la cámara de fotografiar bajo ángulo recto a la dirección del movimiento (en el sistema de la cámara (fig. 2.2)). ¿Qué imagen será fotografiada?

Los rayos emitidos simultáneamente por diversos puntos de la arista $A'B'$ en el sistema S' (del cubo) alcanzarán la placa fotográfica al mismo tiempo. La longitud de la placa AB será la misma que en el caso del cubo inmóvil y sólo se determinará por la contracción condicionada por la distancia hasta el objeto y la distancia focal de la cámara de fotografiar. Tomemos esa longitud como la 1.

En el cubo inmóvil la imagen de la arista $E'F'$ parecería en los rayos paralelos coincidente con la imagen de $A'B'$. Al estar el cubo en movimiento, los rayos de la arista $E'F'$ deberían ser emitidos antes en un tiempo $\Delta t = l_0/c$ y, entonces, llegarán a la placa fotográfica al mismo tiempo que los rayos de $A'B'$. En el momento cuando la luz se emite, la arista $E'F'$ ocupaba la posición $E_1'F_1'$ y hasta la emisión de la luz por la arista $A'B'$ pasó un recorrido Vl_0/c. Por lo tanto, ahora las imágenes de las aristas $A'B'$ y $E'F'$ tendrán una longitud $V/c = \beta$ y no nula como en el caso del cubo inmóvil. Toda la arista $A'B'F'E'$ será fotografiada en forma del rectángulo $ABFE$ (fig. 2.3) con una relación 1: β entre los lados.

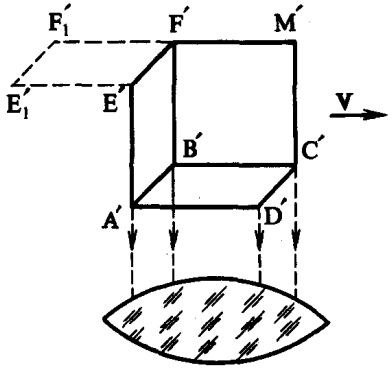

Fig. 2.2

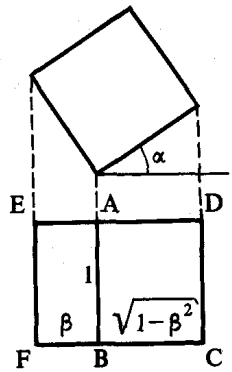

Fig. 2.3

Los rayos que crearon la imagen de las aristas $A'B'$ y $C'D'$ se emiten simultáneamente en el sistema S. Como sigue de las transformaciones de Lorentz (1.21), en el sistema S' los rayos que parten de la arista $C'D'$ deben ser emitidos antes que de la arista $A'B'$ en un tiempo $\Delta t' = \gamma Vl/c^2$, donde l es la longitud de las aristas $B'C'$ y $A'D'$ en el sistema S. Podemos considerar que en el sistema S' han transcurrido dos sucesos a una distancia $\Delta x' = l_0$, con la particularidad de que tuvieron lugar uno a un tiempo $\Delta t'$ después del otro. En el sistema S la distancia entre los sucesos se determina con ayuda de (1.19):

$$l = \Delta x = \gamma(\Delta x' - V\Delta t') = l_0\sqrt{1-\beta^2}.$$

Así, pues, las aristas $B'C'$ y $A'D'$, paralelas a la dirección del movimiento, han sufrido la contracción corriente de Lorentz. Sus imágenes (tomando en consideración la contracción en la cámara de fotografiar) tendrán una longitud $\sqrt{1-\beta^2}$.

Las restantes aristas del cubo no serán fotografiadas, ya que en el momento de tiempo que consideramos se hallan en el lado que para el observador es invisible. Esto significa que en la fotografía veremos la parte posterior (respecto de la dirección del movimiento) del cubo, o

sea, éste parecerá girado a un ángulo $\alpha = \text{arc sen}\,(V/c)$ (fig. 2.3), pero su forma no será alterada. Si el tiempo fuera absoluto y válidas las transformaciones de Galileo, las aristas $A'D'$ y $B'C'$ no sufrirían la contracción de Lorentz, los segmentos AD y BC tendrían en la placa fotográfica una longitud igual a uno y la forma del cubo no será alterada.

§ 3. Sentido geométrico de las transformaciones de Lorentz. Intervalo y causalidad

3.1. La transformación de Lorentz como giro en el mundo cuatridimensional. A muchos de los resultados de la cinemática relativista se les puede dar un sencillo sentido geométrico. Semejante acceso facilita su interpretación y permite desarrollar el elegante aparato matemático de la TER.

Como en la TER el tiempo pierde su carácter absoluto y depende del sistema de referencia, para representar las relaciones cinemáticas, es lógico hacer uso de la variedad cuatridimensional espacio — tiempo, para lo que también se emplea la denominación, que va dejando de ser usada, de "mundo" o con mayor detalle, "mundo cuatridimensional de

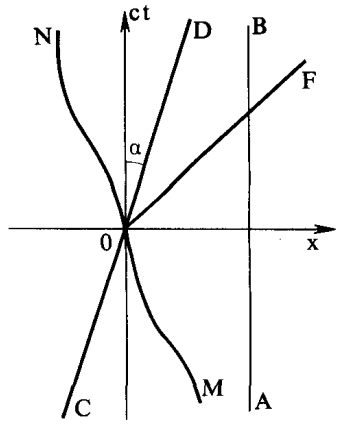

Fig. 3.1

Minkovski". Representemos en la fig. 3.1 la sección bidimensional del espacio cuatridimensional y en ejes perpendiculares entre sí tracemos x y ct (es cómodo multiplicar el tiempo por c para que las coordenadas tengan la misma dimensión). Puntos aislados en el espacio — tiempo cuatridimensional indican las coordenadas espaciales y el tiempo de cierto "suceso". La secuencia de estados cinemáticos de todo cuerpo (o sea, sus coordenadas en diversos momentos de tiempo) es representado por la "línea universal".

En el sistema inercial dado no sólo los cuerpos en movimiento, sino los que están en reposo, poseen sus líneas universales (a diferencia de la trayectoria en la mecánica clásica). Así, la línea universal de un cuerpo en reposo en el punto x_0 (en el espacio) del eje x, será la recta AB paralela al eje ct que

pasa por x_0; la línea universal de un cuerpo en movimiento a velocidad constante $v = \text{const}$ (que pasa siendo $t = 0$ por el origen de coordenadas) es la recta CD ($\text{tg}\,\alpha = v/c$); la línea universal de un cuerpo en movimiento a velocidad variable $v(t)$ es la curva MN; la línea universal de un rayo luminoso emitido en el momento $t = 0$ del origen de coordenadas en dirección del eje x, es la bisectriz del ángulo OF entre los ejes de coordenadas.

Ahora, aclaremos el sentido geométrico de las transformaciones de Lorentz. Escribámoslo sólo para x y ct:

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \qquad ct' = \gamma(ct - \beta x). \tag{3.1}$$

Hemos obtenido una transformación lineal homogénea que mucho recuerda la transformación de rotación en el espacio tridimensional euclidiano. Escribamos, p. ej., la transformación de rotación al ángulo φ en el plano xy en un espacio ordinario:

$$x' = x\cos\varphi + y\,\text{sen}\,\varphi, \qquad y' = -x\,\text{sen}\,\varphi + y\cos\varphi. \tag{3.2}$$

En la fig. 3.2 están representados los nuevos ejes x', y' obtenidos como resultado de semejante transformación. La más importante propiedad de ésta es la conservación de la distancia entre cualesquiera dos puntos:

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \tag{3.3}$$

La distancia $r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ entre los puntos 1 y 2 queda invariable durante la transformación de rotación.

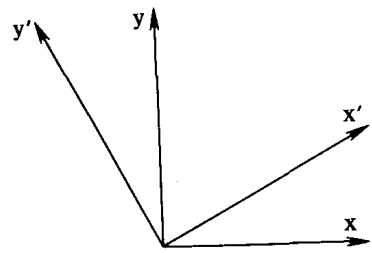

Fig. 3.2

Con el fin de aclarar las similitudes y las diferencias entre el giro en el espacio euclidiano y la transformación de Lorentz, escribamos (3.1) mediante funciones hiperbólicas:

$$x' = x\,\text{ch}\,\psi - ct\,\text{sh}\,\psi, \qquad ct' = -x\,\text{sh}\,\psi + ct\,\text{ch}\,\psi, \tag{3.4}$$

donde

$$\text{ch}\,\psi = \gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}, \text{sh}\,\psi = \beta\gamma = (V/c)(1 - V^2/c^2)^{-1/2}, \tag{3.5}$$

y, como debe ser,

$$\text{ch}^2\psi - \text{sh}^2\psi = 1. \tag{3.6}$$

La transformación (3.4) también tiene la propiedad de dejar invariante cierta combinación cuadrática de las coordenadas x y ct, es decir, el intervalo

$$s_{12} = \sqrt{(ct_1 - ct_2)^2 - (x_1 - x_2)^2}. \qquad (3.7)$$

En realidad, de (3.4) — (3.6) sigue directamente que $(ct_2' - ct_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 = (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2$, por lo que $s'_{12} = s_{12} = \text{inv}$. El intervalo s_{12} puede considerarse como la "distancia" entre los puntos x, ct del plano. Pero el cuadrado de la diferencia entre las coordenadas espaciales entra con signo menos en la expresión para el intervalo. El espacio en el que la distancia entre los puntos está determinada por la fórmula (3.7) recibe el nombre de seudoeuclidiano. Entre éste y el espacio euclidiano, además de evidente parecido, hay notorias diferencias. P. ej., en el espacio euclidiano el cuadrado de la distancia entre dos puntos $r_{12}^2 \geqslant 0$, con la particularidad de que la igualdad de esta magnitud a cero significa que los puntos 1 y 2 coinciden. En el espacio seudoeuclidiano s_{12}^2 puede tener cualquier signo y la reducción del intervalo a cero es también posible para dos puntos absolutamente distintos en el espacio — tiempo cuatridimensional.

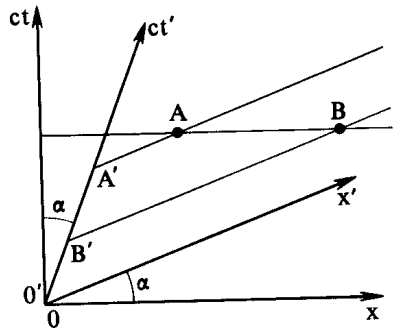

Fig. 3.3

A continuación, examinemos la posición de los nuevos ejes x', ct' en un plano seudoeuclidiano. Tracemos las coordenadas x y ct en los ejes de un sistema rectangular de coordenadas (fig. 3.3). El punto $x' = 0$, coincidente con el origen de coordenadas del sistema S', está en movimiento en el sistema S a una velocidad V. Evidentemente, su línea universal será el eje de tiempo ct' del sistema S'. Así, pues, dicho eje estará inclinado hacia el ct en un ángulo $\alpha = \text{arctg}(V/c)$. El eje x' del nuevo sistema puede ser determinado con ayuda de la condición $c = 0$. Pero de acuerdo con (3.1) en el antiguo sistema S ésta será la recta $ct = \beta x$ que pasa por el origen de coordenadas y que forma el mismo ángulo $\alpha = \text{arctg}(V/c)$ con el eje x (fig. 3.3).

¡El nuevo sistema de coordenadas es oblicuo! Sería incorrecto si intentáramos hallar relación entre x', ct' y x, ct directamente en la fig. 3.3 por

medio de la proyección de segmentos, como es fácil hacerlo en el caso euclidiano (fig. 3.2). Las transformaciones de Lorentz no sólo hacen girar los ejes, sino que también varían las escalas de las coordenadas por los ejes.

Haciendo uso de la fig. 3.3 es fácil proporcionar la interpretación geométrica de diversos corolarios de las transformaciones de Lorentz. P. ej., examinemos la relatividad de la simultaneidad. En el sistema S las líneas de igual tiempo son rectas parelelas al eje Ox. En el sistema S', rectas paralelas a $O'x'$ que no coinciden con las líneas de igual tiempo en el sistema S. Por ello, los sucesos en S, hablando en general, no serán simultáneos en S'. P. ej., entre los sucesos A y B, simultáneos en S, en S' pasará un intervalo de tiempo $\Delta t' = A'B'/c$, con la particularidad de que el acontecimiento B sucederá antes*).

Existe un divulgado procedimiento para verificar la transformación de Lorentz (3.1) que, de modo formal, es idéntico a la transformación de rotación (3.2) en el plano euclidiano. Esto es alcanzado introduciendo la coordenada temporal imaginaria ict y un ángulo de rotación imaginario. Sustituyamos en (3.1) ψ por $-i\varphi$ y hagamos uso de las fórmulas $\operatorname{ch}(-i\varphi) = \cos\varphi$, $\operatorname{sh}(-i\varphi) = -i\operatorname{sen}\psi$.

Obtenemos

$$x'^1 = x^1\cos\varphi + x^4\operatorname{sen}\varphi, \qquad x'^4 = -x^1\operatorname{sen}\varphi + x^4\cos\varphi, \tag{3.8}$$

donde $x^1 = x$, $x^4 = ict$. En semejantes variables el intervalo toma el aspecto

$$s_{21}^2 = -(x_2^1 - x_1^1)^2 - (x_2^4 - x_1^4)^2, \tag{3.9}$$

es decir, sólo se diferenciará por el signo del cuadrado de la distancia r_{12}^2 entre los puntos en el plano euclidiano.

Pero hay que tener en cuenta que la introducción de la coordenada imaginaria temporal sólo conduce a un parecido formal con el espacio euclidiano. Claro está, que de este modo no se excluye la profunda diferencia interna entre estas dos geometrías — euclidiana y seudoeuclidiana. Por esta causa, en adelante haremos uso de la coordenada real temporal $x^0 = ct$.

3.2. Tres tipos de intervalos. Causalidad. Generalicemos la determinación del intervalo (3.7) para el caso cuatridimensional:

$$s_{21}^2 = (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = \\ = c^2(t_2 - t_1)^2 - r_{21}^2, \tag{3.10}$$

donde r_{21} es la distancia ordinaria entre los puntos 1 y 2 (en el espacio). En función de las relaciones entre las coordenadas temporales ct y espaciales x, y, z de dos puntos, s_{21}^2 puede ser positivo, negativo o nulo. Se emplea la siguiente terminología: con $s_{21}^2 > 0$ el intervalo se denomina *cuasitemporal*, con $s_{21}^2 < 0$, *cuasiespacial*, con $s_{21}^2 = 0$, *cuasiluminoso* o *nulo*.

*) Muchas otras aclaraciones geométricas de las relaciones fundamentales en la TER serán halladas por el lector en los libros [89, 93].

El carácter del intervalo está íntimamente ligado con la causalidad, él determina la posibilidad del nexo causal entre los sucesos que transcurren en los puntos 1 y 2 en el espacio y el tiempo. Si $s_{21}^2 > 0$ el suceso 2 puede estar relacionado causalmente con el suceso 1 (o a la inversa): del punto 1 podemos enviar una señal a velocidad $v = r_{21}/(t_2 - t_1) < c$ que provocará el suceso 2. Esto también es posible en el caso del intervalo nulo, pero la señal sólo debe propagarse a la velocidad límite c. Los sucesos separados por intervalos cuasiespaciales no pueden estar condicionados causalmente, ya que las señales no pueden propagarse a velocidad $v = r_{21}/(t_2 - t_1) > c$.

En función de las propiedades del intervalo $s = \sqrt{c^2t^2 - x^2}$, el plano seudoeuclidiano (x, ct) puede ser dividido, entre el origen de coordenadas (suceso 0) y los puntos en el plano, en tres regiones que por sus propiedades son distintas. Tracemos las bisectrices de los ángulos entre los ejes de coordenadas (fig. 3.4). La región 1 posee las siguientes propiedades: a) todo suceso que en esta región se representa con cierto punto, en cada sistema inercial transcurre después del suceso 0 (esto se desprende de la desigualdad

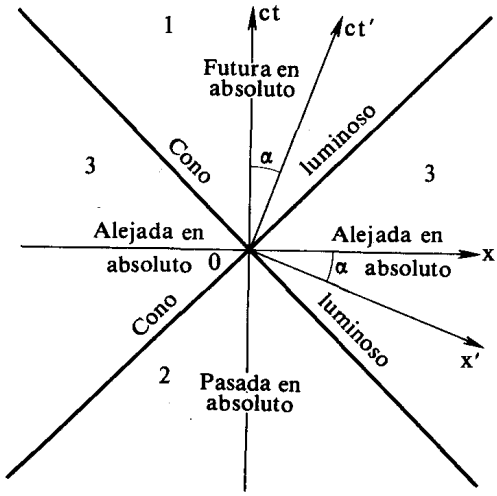

Fig. 3.4

$s^2 > 0$ para todos los puntos de esta región); b) existe un sistema de referencia tal, en el que el suceso que examinamos está en el mismo punto (del espacio) que el suceso nulo, es decir, los sucesos son monolugares. Para hallar semejante sistema es suficiente trazar un rayo por el origen de coordenadas y el punto que consideramos. El ángulo α entre dicho rayo y el eje ct determinará la velocidad $V = c\,\mathrm{tg}\,\alpha$ del sistema inercial S' buscado con relación al sistema inicial S. La región 1 recibe el nombre de "futura en absoluto" respecto del suceso 0.

La región 2, en lo que atañe a 0, es "pasada en absoluto". En ella, todos los sucesos, en cualesquiera sistemas inerciales, transcurren antes del suceso 0 y pueden ser convertidos en monolugares por medio de la selección del correspondiente sistema inercial.

Propiedad análoga poseen cualesquiera dos sucesos separados por un intervalo cuasitemporal: las nociones "más tarde" y "antes" no son para ellos absolutas. Esto significa que si en cierto sistema los tiempos de estos sucesos $t_2 > t_1$, en cualquier otro sistema serán asimismo $t_2' > t_1'$.

Por fin, la región 3 se caracteriza por que cualquier suceso puede transcurrir en ella simultáneamente con el suceso 0. Para ello es suficiente elegir un sistema inercial cuyo eje x' pase por el origen de coordenadas y el suceso que examinamos. Pero no existe un sistema tal en el que él sea monolugar con el suceso 0. En este sentido todos los puntos de la región 3 son alejados en absoluto del punto 0.

Claro está que en el espacio — tiempo cuatridimensional también existen las indicadas regiones. Ellas están separadas por la hipersuperficie tridimensional $s^2 = 0$ (cono luminoso). Las regiones internas de dicho cono son pasada y futura en absoluto, en tanto que la exterior, alejada en absoluto del origen de coordenadas.

§ 4. Vectores y tensores cuatridimensionales

4.1. Definición del vector. Componentes contra y covariantes. Para la enunciación cuantitativa de las leyes de la naturaleza, tomando en consideración los requisitos de la TER, tenemos que estudiar los fundamentos de álgebra vectorial y tensorial en el espacio cuatridimensional seudoeuclidiano. Esta se confecciona por analogía con el álgebra tensorial en el espacio tridimensional euclidiano. Con el fin de ayudar a los lectores ofrecemos en el Complemento I un resumen, expuesto de modo elemental, de las nociones fundamentales de álgebra de los tensores tridimensionales y en el Complemento II, cierta información complementaria (en comparación con la expuesta en este parágrafo) sobre álgebra y análisis de los tensores cuatridimensionales*).

Comencemos por la definición del vector en el espacio cuatridimensional (o, para abreviar, 4-vector).

Examinemos las coordenadas de un punto (suceso) en el espacio cuatridimensional y variémoslas poniendo supraíndices desde 0 hasta 3:

$$x^0 = ct, \qquad x^1 = x, \qquad x^2 = y, \qquad x^3 = z. \tag{4.1}$$

*) Una denominación más precisa de estos objetos es "tensores afines". En adelante vamos a omitir el adjetivo "afines", ya que en este libro no se utilizan tensores de otro tipo.

Como ya sabemos, al pasar de un sistema inercial a otro, estas magnitudes se transforman con las fórmulas

$$x^{0'} = x^0 \operatorname{ch}\psi - x^1 \operatorname{sh}\psi, \qquad x^{1'} = -x^0 \operatorname{sh}\psi + x^1 \operatorname{ch}\psi,$$
$$x^{2'} = x^2, \qquad x^{3'} = x^3, \tag{4.2}$$

donde $\operatorname{th}\psi = V/c$.

Demos la siguiente definición del 4-vector que generaliza la definición del vector en el espacio tridimensional: recibe el nombre de vector *cuatridimensional* $A^i(A^0, A^1, A^2, A^3)$ el conjunto de cuatro magnitudes que al pasar a otro sistema de referencia inercial se transforma lo mismo que las 4-coordenadas, es decir, con las fórmulas (4.2):

$$A^{0'} = A^0 \operatorname{ch}\psi - A^1 \operatorname{sh}\psi, \qquad A^{1'} = -A^0 \operatorname{sh}\psi + A^{'} \operatorname{ch}\psi,$$
$$A^{2'} = A^2, \qquad A^{3'} = A^3. \tag{4.3}$$

Sin embargo, si por analogía con el espacio tridimensional euclidiano quisiéramos calcular el cuadrado del vector A^iA^i (la suma por los índices desde 0 hasta 3 que se repiten), nos cerciorariamos con facilidad que esa magnitud no será invariante de la transformación de Lorentz (o sea, del giro en el espacio cuatridimensional). El invariante resulta ser la composición de los componentes del aspecto

$$(A^{0'})^2 - (A^{1'})^2 - (A^{2'})^2 - (A^{3'})^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - A^3)^2. \tag{4.4}$$

En el caso de las coordenadas de 4-puntos, esto es el intervalo (3.10):

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \tag{4.5}$$

La validez de las igualdades (4.4) se comprueba con facilidad por las fórmulas (4.3).

Con el fin de determinar el cuadrado de un 4-vector y el producto escalar de dos 4-vectores como magnitudes invariantes, en la consideración se introducen dos clases de componentes de un mismo vector, es decir, covariantes y contravariantes*). Los componentes contravariantes se designan con supraíndices (A^i), los covariantes, con subíndices (A_i). Determinemos la ligazón entre los componentes contra y covariantes del vector:

$$A_0 = A^0, \qquad A_1 = -A^1, \qquad A_2 = -A^2, \qquad A_3 = -A^3. \tag{4.6}$$

De (4.3), (4.6) sigue que la transformación de Lorentz para un vector covariante tiene el aspecto:

$$A_0^{'} = A_0 \operatorname{ch}\psi + A_1 \operatorname{sh}\psi, \qquad A_1^{'} = A_0 \operatorname{sh}\psi + A_1 \operatorname{ch}\psi,$$
$$A_2^{'} = A_2, \qquad A_3^{'} = A_3. \tag{4.7}$$

---

*) Veremos en el § 4.3 que los componentes covariantes son transformables, lo mismo que los del gradiente de la función escalar, por las coordenadas cuatridimensionales; los componentes contravariantes no son transformables como el gradiente, sino que como las propias coordenadas.

Ahora, compongamos la suma de los productos entre los componentes covariantes y los contravariantes:

$$A_i A^i = A_0 A^0 + A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3. \tag{4.8}$$

Esta suma, que llamaremos cuadrado del 4-vector, resulta ser el invariante de la transformación. De forma análoga se determina el producto escalar de dos vectores:

$$A_i B^i = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3. \tag{4.9}$$

Este puede ser escrito mediante los componentes temporales A_0, B_0 y espaciales $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ de los vectores del modo siguiente:

$$A_i B^i = A_0 B^0 - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}.$$

Como sigue de (4.6) es indiferente cuál de los vectores en el producto es covariante y cuál, contravariante. Los dos productos, (4.8) y (4.9), son los invariantes de la transformación de Lorentz. Pero una suma análoga, compuesta sólo de componentes covariantes o bien sólo de contravariantes, no tiene una ley sencilla de transformación, por lo que no tiene sentido.

El término "escalar" es sinónimo de la palabra "invariante". Esta es una magnitud con un mismo valor en todos los sistemas de referencia inerciales: $A_{i'} A^{i'} = A_i A^i$, etc.

Las fórmulas de las transformaciones (4.3) y (4.7) pueden ser escritas en forma abreviada

$$A^{i'} = a^i_k A^k, \qquad A_{i'} = a^k_i A_k, \tag{4.10}$$

donde a^i_k, a^k_i son matrices de transformación que tienen índices covariantes y contravariantes. De acuerdo con (4.3), (4.7) se representan con las siguientes tablas:

$$(a^i_k) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & -\operatorname{sh}\psi & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a^k_i) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

Como vemos en estas tablas $a^i_k \neq a^k_i$, es decir, el tipo de las matrices es diferente en función de qué índice es superior, el primero o el segundo y cuál, el inferior. Pero las dos matrices son simétricas, o sea, $a^i_k = a^k_i$, $a^k_i = a^i_k$.

Multiplicando entre sí las matrices (4.11) veremos que su producto es igual a la matriz unitaria:

$$(a^i_k a^k_l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(¡suma por k!). Designando por δ_i^l los elementos de la matriz unitaria, obtendremos

$$a_k^i a_l^k = \delta_l^i, \qquad a_i^k a_l^i = \delta_l^k. \tag{4.12}$$

Notemos que aquí la suma se realiza bien por los primeros índices, o bien por los segundos, con la particularidad de que uno de ellos es inferior y el otro, superior. Claro está, que la matriz unitaria es simétrica $\delta_k^l = \delta_l^k$ y, en ella, la disposición de los índices superior e inferior es arbitraria.

Con ayuda de (4.12) es fácil hallar las transformaciones inversas a (4.10). Multiplicando la primera fórmula (4.10) por a_i^l y sumando por i, obtenemos

$$a_i^l A^{i'} = \delta_k^l A^k = A^l. \tag{4.13}$$

De manera análoga obtenemos:

$$A_l = a_l^i A_i', \tag{4.14}$$

De las fórmulas (4.13) y (4.10) se desprende que la matriz a_k^i de la transformación directa de los componentes contravariantes de un vector es al mismo tiempo la matriz inversa de la transformación de sus componentes covariantes. Esto aclara el sentido de los términos: contravariante, transformable mediante la matriz inversa de transformación del vector covariante.

4.2. Tensores cuatridimensionales. Adoptemos la siguiente definición: recibe el nombre de 4-tensor de II rango el conjunto de 16 magnitudes transformables como el producto de los componentes de dos 4-vectores al pasar de un sistema integral a otro. Lo mismo que los 4-vectores, los 4-tensores pueden ser covariantes (T^{ik}) y contravariantes (T_{ik}), así como mixtos (T_i^k y T_k^i). Con ello, hablando en general, $T_i^k \neq T_k^i$, es decir, el tensor mixto depende de cuál de los índices, el primero o segundo, es covariante y cuál, contravariante. De acuerdo con esto, son posibles las siguientes leyes de transformación del 4-tensor de II rango:

$$\begin{aligned} T^{ik'} &= a_m^i a_n^k T^{mn}, \qquad T_{ik}' = a_i^m a_k^n T_{mn}, \\ T_i^{k'} &= a_i^m a_n^k T_m^n, \qquad T_k^{i'} = a_m^i a_k^n T_n^m. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Con ayuda de las fórmulas (4.12) es fácil hallar las transformaciones inversas. Los tensores de rangos más altos se determinan de forma análoga.

El tensor métrico g_{ik} es uno de los más sencillos tensores de II rango:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Transformando este tensor con ayuda de (4.11), (4.12) para otro sistema inercial nos cercioramos de que dicho tensor es invariante y que sus compo-

nentes son iguales en todos los sistemas. Elevando uno de los índices con la regla (4.6), es decir, pasando al tensor mixto, obtenemos

$$g_i^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \delta_i^k. \tag{4.17}$$

Este es un tensor unitario bien conocido de la teoría de los tensores tridimensionales. Por fin, subiendo también el segundo índice obtenemos $g^{ik} = g_{ik}$, es decir, los componentes contravariantes coinciden con los covariantes.

Mediante el tensor métrico se realiza la bajada y subida del índice en cualquier 4-vector o bien 4-tensor: de (4.6) y (4.16) se deduce que

$$A_i = g_{ik}A^k, \qquad A^i = g^{ik}A_k \tag{4.18}$$

(la suma por el índice k! que se repite). Por esta razón, el intervalo (4.5) puede ser escrito por medio de g_{ik} en la forma

$$s^2 = g_{ik}x^i x^k, \tag{4.19}$$

y el producto escalar en las formas

$$A_i B^i = g_{ik}A^i B^k = g^{ik}A_i B_k. \tag{4.20}$$

La fórmula (4.19) aclara por qué el tensor g_{ik} recibe el nombre de métrico: permite determinar la "distancia" invariante entre dos puntos en el espacio cuatridimensional seudoeuclidiano o bien, como también suelen decir, se establece la métrica de este espacio.

Para las aplicaciones hay un importante 4-tensor más, o sea, el tensor unitario antisimétrico de IV rango e^{iklm}. Se determina por analogía con el correspondiente tensor tridimensional $e_{\alpha\beta\gamma}$ (véase el p. 1.4) de acuerdo con dos condiciones:

1. $e^{0123} = 1$.

2. e^{iklm} cambia de signo al conmutar dos índices cualesquiera.

Como resultado, diferentes de cero (e iguales $a \pm 1$) sólo quedan aquellos componentes en los que 4 índices son distintos; este número es igual a $4! = 24$. Al pasar al sistema con raya, tenemos

$$e'^{0123} = a_p^0 a_q^1 a_r^2 a_s^3 e^{pqrs}. \tag{4.21}$$

En virtud de la definición de e^{pqrs}, aducida más arriba, el miembro derecho de (4.21) es el determinante de la matriz de transformación (4.11). Pero dicho determinante es igual a uno, lo que directamente sigue de la forma explícita de la matriz y de la fórmula $\mathrm{ch}^2\psi - \mathrm{sh}^2\psi = 1$. Así, pues, $e'^{0123} = 1$. La variación de disposición de los índices conduce a la conmutación de las filas del determinante, lo que acarrea el cambio del signo durante cada transposición elemental (conmutación de dos filas). Pero precisamente

el tensor e^{iklm} también posee tales propiedades, de forma que

$$e'^{iklm} = e^{iklm}, \tag{4.22}$$

es decir, e^{iklm}, lo mismo que g^{ik}, es un tensor invariante.

El 4-tensor $T^{ik...lm}$ es denominado real o, simplemente tensor, si durante la inversión de las coordenadas en el espacio (transformación $x'^0 = x^0$, $x'^\alpha = -x^\alpha$, $\alpha = (1, 2, 3)$) él se transforma como el producto de las coordenadas $x^i x^k ... x^l x^m$. Al contrario, si con semejante transformación el tensor adquiere el factor adicional — 1, recibe el nombre de seudotensor (comp. con el caso tridimensional, p. 1.6). De acuerdo con esta definición g^{ik} es el tensor real y e^{iklm}, el seudotensor.

Algunos datos más acerca de los 4-tensores han sido aducidos en los Complementos II. Ellos no son necesarios para continuar la lectura del presente libro, pero serán útiles con el fin de comprender mejor el material.

4.3. Operaciones diferenciales. Hallemos la regla de transformación relativista del operador del gradiente $\frac{\partial}{\partial x^i}$. En el sistema con raya

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^k};$$

pero de acuerdo con (4.13)

$$x^k = a^k_l x^{l'},$$

por lo que

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} = a^k_i$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = a^k_i \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{4.23}$$

La relación obtenida coincide con la ley de transformación del vector covariante (4.10), por lo tanto el operador $\frac{\partial}{\partial x^k}$ es un vector covariante. Su parte espacial coincide con el operador tridimensional ∇, mientras que la temporal es la derivada $\frac{\partial}{\partial x^0}$:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla\right). \tag{4.24}$$

El operador contravariante del gradiente puede ser designado como $\frac{\partial}{\partial x_k}$ y, de acuerdo con (4.6), tiene el siguiente aspecto:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, -\nabla\right), \tag{4.25}$$

con la particularidad de que $x_0 = x^0$, $x_\alpha = -x^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$).

Ahora son evidentes las siguientes afirmaciones:

1. $\frac{\partial \Phi}{\partial x^k}$, vector covariante si Φ es una función escalar de 4-coordenadas.

2. $\frac{\partial A^i}{\partial x^k}$, $\frac{\partial A^i}{\partial x_k}$, $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$, correspondientemente 4-tensores de II rango mixto, contravariante y covariante.

3. $\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$, divergencia cuatridimensional, invariante de las transformaciones de Lorentz.

4. $\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}$, rotor cuatridimensional, tensor de II rango antisimétrico.

5. $$-\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \equiv \Box, \tag{4.26}$$

operador de d'Alembert, invariante de la transformación de Lorentz. La aplicación del operador de d'Alembert, a cierta magnitud no hace que varíe la ley de transformación de ella; p. ej., $\Box\Phi$ es un escalar, $\Box A_i$, es un vector covariante, etc.

4.4. Velocidad y aceleración cuatridimensionales de una partícula. La velocidad tridimensional de una partícula $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ no es un 4-vector. Esto sigue, por lo menos, de que la ley de transformación (2.8) de las magnitudes v_x, v_y, v_z no coincide con (4.3) ó (4.7). Pero la velocidad puede ser con facilidad definida de nuevo de forma que se convierta en un 4-vector. Previamente hallemos la relación entre el tiempo propio de la partícula τ y el intervalo. Haciendo uso de la invariancia del intervalo podemos escribir:

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k = c^2 d\tau^2. \tag{4.27}$$

La primera igualdad es la definición de un pequeño intervalo en el sistema S; la segunda, su valor en un sistema que acompaña instantáneamente a la partícula, en el cual $dx^\alpha = 0$ ($\alpha = 1, 2, 3$) y $dx^0 = c\,d\tau$. De (4.27) hallamos:

$$d\tau = \frac{ds}{c},$$

de donde se desprende que $d\tau$ es invariante, ya que ds y c también lo son. Por consiguiente, si determinamos la 4-velocidad por medio de las derivadas de las coordenadas según el tiempo propio

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau}, \tag{4.29}$$

el conjunto de tales derivadas formará un 4-vector. Empleando la fórmula (2.5) determinamos la relación entre la 4-velocidad y la velocidad tridimen-

sional **v**:

$$u^i = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right); \tag{4.30}$$

de (4.30) hallamos:

$$u_i u^i = c^2. \tag{4.31}$$

Como es natural, la 4-aceleración se determina mediante las segundas derivadas de las coordenadas según el tiempo propio:

$$w^i = \frac{d^2x^i}{d\tau^2}. \tag{4.32}$$

Esta puede ser expresada por la aceleración tridimensional w y por la velocidad **v**. Diferenciando (4.31) por su tiempo propio obtenemos

$$u_i w^i = 0, \tag{4.33}$$

es decir, la 4-velocidad y 4-aceleración son perpendiculares entre sí.

§ 5. Acción para una partícula libre. Energía e impulso

5.1. Principio de la acción mínima para una partícula libre. La mecánica de las partículas relativistas se construye con facilidad partiendo del principio de la acción mínima. Semejante acceso permite, desde un principio, asegurar fácilmente el fundamental requerimiento de la TER, es decir, la covarianza relativista de las ecuaciones de mecánica, lo que significa su anotación en forma tal que sea válida en todo sistema de referencia inercial.

Como sabemos de la mecánica clásica, la magnitud fundamental de la que se deducen las ecuaciones de movimiento, es la acción S, o sea la integral por el tiempo de la función de Lagrange tomada a lo largo de la trayectoria de movimiento de la partícula entre dos puntos fijados 1 y 2:

$$S = \int_{(1)}^{(2)} L\,dt. \tag{5.1}$$

En los puntos 1 y 2 se prefijan las coordenadas de la partícula y los momentos de tiempo cuando ella pasa por dichos puntos. La acción es estacionaria en las trayectorias reales (físicas), o sea, su primera variación se reduce a cero:

$$\delta S = 0. \tag{5.2}$$

La función de Lagrange para una partícula libre no relativista tiene el aspecto

$$L = \frac{mv^2}{2}. \tag{5.3}$$

Vamos a exigir que la acción buscada para la partícula libre relativista tenga las dos siguientes propiedades: a) invariancia relativista, lo que es necesario para que se cumpla el principio de relatividad: igualdad de las leyes de mecánica en todos los sistemas inerciales; b) con $v/c \ll 1$, la función de Lagrange de una partícula relativista debe convertirse en la expersión (5.3), conocida en la mecánica clásica.

El segundo requerimiento es un corolario del principio de correspondencia. Este es uno de los principios generales de física que desempeña notorio papel al confeccionar nuevas teorías físicas. Dicho principio exige que las ecuaciones de cierta teoría general que contiene como caso particular una teoría deducida con anterioridad de carácter más estrecho, con las correspondientes condiciones se conviertan en las ecuaciones de la teoría particular. En nuestro caso, la mecánica clásica es la teoría particular, en tanto que la teoría física general es la mecánica relativista. Pero las ecuaciones de esta última se convierten a pequeñas velocidades en las ecuaciones clásicas, cuya validez en el ámbito de su aplicación se confirma por la experiencia general de la humanidad. Con anterioridad, ya hicimos uso del principio de correspondencia cuando exigimos que para $V/c \ll 1$ las transformaciones de Lorentz se convirtieron en las de Galileo.

Retornemos al problema de la acción para la partícula relativista. Al no actuar fuerzas o campos, la única magnitud relativista invariante que caracteriza el movimiento de la partícula del punto 1 al punto 2 del espacio-tiempo cuatridimensional es la longitud de su línea universal entre los respectivos puntos. Por esto, escribamos la acción en la forma

$$S = \alpha \int_{(1)}^{(2)} ds, \tag{5.4}$$

donde α es una constante invariante. Con el fin de reducirla a la forma (5.1) pasemos a la integración por t, escribiendo $ds = \dfrac{ds}{dt}\, dt$. Pero de acuerdo con (4.28) y (2.5)

$$\frac{ds}{dt} = c\sqrt{1 - v^2/c^2}, \tag{5.5}$$

donde $\mathbf{v}(t)$ es la velocidad tridimensional de la partícula. Así, pues, la acción toma el aspecto

$$S = \alpha c \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt, \tag{5.6}$$

por consiguiente, según (5.1), la función de Lagrange

$$L = \alpha c \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

El valor de la constante α se establece partiendo del principio de correspondencia: a $v/c \ll 1$, tenemos

$$L = \alpha c - \frac{\alpha v^2}{2c}.$$

Comparando con (5.3) el miembro derecho que contiene v^2, hallamos $\alpha = -mc$, donde m es la masa de la partícula. Con ello, en el límite relativista obtenemos

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \tag{5.7}$$

Aquí m, o sea, la masa de la partícula relativista, incluso en reposo, es una magnitud invariante. En ocasiones, para esta masa se emplea en la literatura la denominación "masa en reposo" a diferencia de la masa de la partícula en movimiento dependiente de la velocidad (véase el § 5.3).

Recordemos que las funciones de Lagrange que se diferencian en la constante, son físicamente equivalentes; por eso, la constante mc^2 en (5.7) puede ser desechada y, de este modo, obtenemos la función no relativista de Lagrange (5.31). En el caso general, la función de Lagrange de una partícula libre relativista tiene el aspecto

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{5.8}$$

5.2. Energía e impulso de la partícula libre. Del método lagrangiano en mecánica, sabemos cómo se expresa con la función de Lagrange el impulso generalizado $\boldsymbol{p}$ y la energía $\mathscr{E}$:

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}, \qquad \mathscr{E} = \boldsymbol{p} \cdot \mathbf{v} - L. \tag{5.9}$$

Calculando estas magnitudes mediante la diferenciación de (5.8), hallamos

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{5.10}$$

$$\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{5.11}$$

La ecuación de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = 0, \tag{5.12}$$

ya que L no depende de $\boldsymbol{r}$ se reduce a la igualdad $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = 0$, es decir, $\boldsymbol{p} = \text{const}$. Esto es plenamente lógico: tanto el impulso como la energía de la partícula libre son integrales de movimiento.

La comparación de las fórmulas (5.10) y (5.11) para $\boldsymbol{p}$ y $\mathscr{E}$ conducen a una útil relación entre el impulso, la velocidad y la energía de una partícula

relativista:

$$p = \frac{\mathscr{E}\mathbf{v}}{c^2}. \tag{5.13}$$

La fórmula (4.30) que proporciona la definición de 4-velocidad, permite escribir $p^\alpha = mu^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$), $\frac{\mathscr{E}}{c} = mu^0$; pero mu^i es un 4-vector, ya que m es invariante. Así, pues, la energía dividida por la velocidad de la luz y el impulso tridimensional de la partícula forman el 4-vector energía — impulso:

$$p^i = mu^i = \left(\frac{\mathscr{E}}{c}, p\right). \tag{5.14}$$

El establecimiento de este hecho permite transformar con facilidad la energía y el impulso de un sistema inercial a otro:

$$p_x = \frac{p_x' + V\mathscr{E}'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, p_y = p_y', p_z = p_z', \mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}' + p_x'V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{5.15}$$

Haciendo uso de la invariancia del cuadrado del 4-impulso hallamos la relación entre la energía y el impulso de la partícula libre. Las expresiones del cuadrado del 4-impulso es igual en los sistemas S y S':

$$p^i p_i = \left(\frac{\mathscr{E}}{c}\right)^2 - p^2 = \left(\frac{\mathscr{E}'}{c}\right)^2 - p'^2. \tag{5.16}$$

Sea S' el sistema en reposo de una partícula en el que $v' = 0$. De acuerdo con (5.10), (5.11), $p' = 0$ y $\mathscr{E}' = mc^2$. De (5.16) obtenemos

$$\mathscr{E}^2 = c^2p^2 + m^2c^4. \tag{5.17}$$

En un sistema de referencia inercial la energía de la partícula expresada por un impulso coincide con la función de Hamilton $\mathscr{H}(p)$. Así, pues,

$$\mathscr{H}(p) = \mathscr{E}(p) = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}. \tag{5.18}$$

Con el fin de que (5.18) concuerde con (5.11) delante de la raíz se ha elegido el signo positivo.

En la naturaleza hay partículas (p. ej., fotones, cuantos de luz, etc.) cuya masa en reposo es igual a cero. Pero éstos, lo mismo que objetos con $m \neq 0$, poseen energía e impulso entre los que hay una ligazón expresada con la fórmula (5.17) para $m = 0$:

$$\mathscr{E} = cp. \tag{5.19}$$

De (5.11) sigue que tales partículas sólo pueden tener energía finita si su velocidad $v = c$. Claro está que la fórmula (5.19) es aproximadamente válida para cualquier partícula con $m \neq 0$ si para ella $p \gg mc$. Semejantes partículas reciben el nombre de ultrarrelativistas. Pero para $m \neq 0$ la velocidad v de la partícula siempre es menor que c. Esto se desprende de (5.11):

para $v \to c$ la energía de la partícula crece hasta el infinito, lo que lógicamente es imposible.

5.3. Relación entre masa y energía. Examinemos el límite relativista de las ecuaciones (5.10), (5.11). Suponiendo que $v/c \ll 1$ de (5.10) obtenemos $p = mv$, lo que con plenitud corresponde a la conocida expresión para el impulso de una partícula libre no reltivista. Durante la descomposición de (5.11) conservamos el término que contiene v^2/c^2 y obtenemos

$$\mathscr{E} = mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \tag{5.20}$$

El segundo sumando es la energía cinética de la partícula no relativista. En lo que atañe al primer sumando mc^2, éste es una constante. Como sabemos de la mecánica clásica la energía total de una partícula, se determina hasta la constante aditiva. Por esto, surge la pregunta: ¿debemos considerar la magnitud

$$\mathscr{E}_0 = mc^2 \tag{5.21}$$

como la "energía en reposo" de una partícula inmóvil capaz de manifestarse en diversos procesos físicos o bien esta magnitud es una constante no observada y sin sentido físico que puede anularse cambiando el comienzo de la lectura de la energía? Con el fin de hallar la respuesta, dirijámonos al experimento.

En los fenómenos donde no varían las masas de las partículas y éstas no sufren transformaciones, las constantes mc^2 no juegan ningún papel, ya que las diferencias de energía observadas en el experimento son las de las partículas no relativistas en reposo y en movimiento de las que las constantes desaparecen. Así, p. ej., si sobre una partícula en reposo comienza a actuar cierta fuerza que le comunica una velocidad $v \ll c$, la variación de la energía de la partícula

$$\Delta\mathscr{E} = \mathscr{E} - \mathscr{E}_0 = \frac{mv^2}{2}$$

coincide con la conocida expresión para la energía no relativista, y la constante mc^2 no se manifiesta de ninguna manera en semejante proceso. El rasgo característico de tales procesos (no relativistas) es la conservación aproximada de la masa en reposo de las partículas que en ellos participan.

P. ej., al quemar el combustible corriente (químico) según la reacción del tipo

$$C + O_2 = CO_2 + Q$$

en un acto se desprende las energía Q en forma de energía cinética de las moléculas o bien fotones de un orden de varios electronvoltios (eV). Esto significa que la masa de las moléculas de CO_2 es menor que la suma de las masas de C y O_2 en una magnitud de un orden $\Delta m = Q/c^2$. La energía en reposo de la molécula CO_2 constituye $\mathscr{E}_0 = mc^2 \approx 4 \cdot 10^9$ eV; así; pues, la

variación relativa de la masa en reposo $\Delta m/m \approx 10^{-9}$, es decir, esta magnitud se conserva con enorme exactitud. Por esta razón, al estudiar los fenómenos en los que participan partículas no relativistas (transformaciones químicas, mecánica no relativista de los medios continuos, etc.) la conservación de la masa en reposo de las partículas participantes en semejantes procesos se considera como una ley exacta de la naturaleza.

En las reacciones nucleares la variación relativa de la masa es mucho mayor. P. ej., en la reacción

$$^2\mathrm{H} + {}^3\mathrm{H} = {}^4\mathrm{He} + n + Q,$$

que desempeña notorio papel en el problema de la síntesis termonuclear controlada, al núcleo de helio ^{4}He (partícula α) y al neutrón se les comunica una energía cinética $Q \approx 17{,}6$ MeV. La variación relativa de la masa $\Delta m/m$ es aquí de un orden de $3 \cdot 10^{-3}$.

Pero en la naturaleza, también transcurren tales procesos en los que $\Delta m/m$ alcanza decenas de tanto por ciento e incluso puede ser $\Delta m/m = 1$, o sea, las partículas cuya masa en reposo difiere de cero se transforman en partículas sin masa. Un ejemplo pueden ser las transformaciones de los pares electrón-positrón o bien de muones en fotones de alta energía, o sea, cuantos γ:

$$e^+ + e^- \to 2\gamma, \mu^+ + \mu^- \to 2\gamma.$$

De este modo, en el caso general de los procesos relativistas la masa en reposo de las partículas (y, por lo tanto, de los cuerpos macroscópicos) no se conserva.

En todos los procesos enumerados, una u otra parte de la energía en reposo de las partículas iniciales $\Delta \mathscr{E}_0 = \Delta mc^2$ se convirtió en la energía cinética de las partículas formadas (incluidos los fotones) y, por su intermedio, en otros tipos de energía. Esto quiere decir, que la energía en reposo $\mathscr{E}_0 = mc^2$ es también una realidad física como lo son otros tipos de energía. Todo cuerpo inmóvil de masa m contiene una energía $\mathscr{E}_0 = mc^2$. Haciendo uso de (5.11) esta última fórmula puede ser generalizada para el caso de un cuerpo en movimiento, escribiendo

$$\mathscr{E} = m_* c^2, \tag{5.22}$$

donde

$$m_* = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{5.23}$$

es la masa total o bien la masa que depende de la velocidad. Con semejante generalización cada sistema de partículas, en movimiento o en reposo, si tiene una energía total $\mathscr{E}$, también tendrá una masa equivalente a ella

$$m_* = \frac{\mathscr{E}}{c^2}. \tag{5.24}$$

La masa determinada de este modo puede ser adjudicada a cualquier objeto. Es equivalente a la energía, pero de ella sólo se diferencia por el factor universal c^2. Pero en adelante vamos a llamar en nuestro libro masa sólo a la magnitud invariante m, o sea, a la masa en reposo. La energía $\mathscr{E}$ recibe con frecuencia el nombre de "total" a diferencia de la energía "cinética"

$$T = \mathscr{E} - mc^2 \tag{5.25}$$

que no contiene la energía en reposo.

§ 6. Cinemática de las partículas relativistas

Una información útil y diversa sobre los procesos de colisión y desintegración de las partículas, puede ser obtenida sólo partiendo de las leyes de la conservación de la energía y el impulso sin prefijar en forma explícita las interacciones entre las partículas. Lo mismo que en mecánica clásica, en la relativista, la energía y el impulso son integrales del movimiento: recordemos que la conservación del impulso está relacionada con la homogeneidad del espacio y la conservación de la energía, con la homogeneidad del tiempo. Como las indicadas propiedades de simetría del espacio-tiempo en la TER se cumplen como mecánica clásica, las leyes de la conservación de la energía y el impulso también tienen lugar en la mecánica relativista.

El problema cinemático general puede formularse del siguiente modo. Sea que tenemos varias partículas a, b, ..., que al principio estaban alejadas entre sí a considerables distancias, por lo que no se encontraban en interacción; en este estado inicial los 4-impulsos de esas partículas serán designados por $p_a^i, p_b^i, \ldots$, respectivamente ($i = 0, 1, 2, 3$). Seguidamente, supongamos que durante su movimiento las partículas se aproximan y entran en interacción. Al resolver problemas cinemáticos el carácter de sus interacciones no desempeña notorio papel y puede ser muy diverso: es posible que sean colisiones elásticas para las que el número de las partículas y sus tipos quedan invariables o bien desintegraciones y colisiones inelásticas cuando pueden variar el número de las partículas, sus tipos y estado interno. Este proceso de interacción nos permitimos escribirlo simbólicamente en la forma

$$a + b + \ldots \to m + n + \ldots$$

Considerando que en el estado final las partículas m, n, ... se hallan de nuevo a considerables distancias entre sí, tienen 4-impulsos $p_m^i, p_n^i, \ldots$ y no están en interacción, podemos escribir la ley de la conservación del 4-impulso de todo el sistema de la igualdad de la suma de los 4-impulsos de todas las partículas antes y después de la interacción:

$$p_a^i + p_b^i + \ldots = p_m^i + p_n^i + \ldots$$

Estas igualdades se cumplen en cualquier sistema de referencia inercial. También es conveniente recordar que el cuadrado de todo 4-impulso es in-

variante y, por lo tanto, tiene igual valor en todos los sistemas de referencia inerciales.

En este parágrafo examinaremos problemas cinemáticos típicos. Ellos permitirán que el lector asimile con mayor rapidez las fórmulas de la mecánica relativista*). Además, estos problemas son de interés de por sí. En todas las fórmulas aducidas más adelante elegimos un sistema de unidades en el que $c = 1$. En particular, en dicho sistema las unidades de masa y energía coinciden.

6.1. Desintegración de las partículas.

Problema. La partícula de masa M se desintegra en dos partículas de masas m_1, m_2. Hallar la energía de los productos de la desintegración en el sistema en reposo de la partícula que se desintegra.

Solución. Partimos de la ley de la conservación del 4-impulso escrita en el sistema en reposo de la partícula inicial:

$$P_0^i = p_{10}^i + p_{20}^i, \tag{6.1}$$

donde $P_0^i, p_{10}^i, p_{20}^i$ son los 4-impulsos de las partículas inicial y formadas: $P_0^i = (M, 0), p_{10}^i = (\mathscr{E}_{10}, p_{10}) p_{20}^i = (\mathscr{E}_{20}, p_{20})$. En la anotación tridimensional (6.1) es equivalente a las leyes de la conservación de la energía y del impulso tridimensional:

$$M = \mathscr{E}_{10} + \mathscr{E}_{20}; 0 = p_{10} + p_{20}. \tag{6.2}$$

Como $\mathscr{E}_{10} \geqslant m_1$, $\mathscr{E} \geqslant m_{20}$, de la primera igualdad obtenemos la condición necesaria para la desintegración espontánea (sin comunicar energía del exterior) de la partícula:

$$M \geqslant m_1 + m_2. \tag{6.3}$$

Después de sencillas transformaciones de (6.2), haciendo uso de (5.16), obtenemos

$$\mathscr{E}_{10} + \mathscr{E}_{20} = M, \mathscr{E}_{10} - \mathscr{E}_{20} = \frac{m_1^2 - m_2^2}{M},$$

de donde

$$\mathscr{E}_{10} = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}, \qquad \mathscr{E}_{20} = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M}. \tag{6.4}$$

Las energías $\mathscr{E}_{10}$, $\mathscr{E}_{20}$ son también fáciles de calcular en el sistema del laboratorio, respecto del cual la partícula inicial está en movimiento a velocidad V. Para ello, hay que prefijar el ángulo θ_0 entre $p_{10} = -p_{20}$ y V y emplear la fórmula (5.13).

6.2. Umbral energético de la reacción.

Problema. La partícula de masa m_1 choca con la partícula en reposo de masa m_2. Como resultado se forman varias partículas de una masa sumaria $M > m_1 + m_2$. Cuando la partícula que choca tiene pequeña energía cinética, la reacción está prohibida por la ley de la conservación de la energía. Hallen la energía cinética mínima $T_{1\min}$ de la partícula que choca, con la que la reacción es posible desde el punto de vista energético.

Solución. El valor de $T_{1\min}$ se determina partiendo de la condición de que las partículas formadas están en reposo en el centro de masas (en el sistema del laboratorio las partículas no pueden estar en reposo, ya que esto contradiría la ley de la conservación del impulso). Por consiguiente, en el sistema del centro de masas el 4-impulso total después de la reacción $P_0'^i = (M, 0)$. Antes de la reacción, en este mismo sistema, el 4-impulso es P_0^i, con la particulari-

*) Una considerable cantidad de problemas para entrenarse, encontrará el lector en el compendio [16].

dad de que $P_0^i = P_0'^i$. Pero como $P_0^i P_{0i}$ es un invariante, podemos escribir

$$P_i P^i = P_{0i} P_0^i = P'_{0i} P_0'^i, \tag{6.5}$$

donde $P^i = (\mathscr{E}_{1\text{mín}} + m_2, p_{1\text{mín}})$ es el 4-impulso total en el sistema de laboratorio antes de la reacción. Poniendo en (6.5) los valores de los 4-impulsos, tendremos

$$(\mathscr{E}_{1\text{mín}} + m_2)^2 - p_{1\text{mín}}^2 = M^2,$$

de donde, con ayuda de las igualdades $T_{1\text{mín}} = \mathscr{E}_{1\text{mín}} - m_1$ y $\mathscr{E}_{1\text{mín}}^2 - p_{1\text{mín}} = m_1^2$, obtenemos

$$T_{1\text{mín}} = \frac{M^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_2}. \tag{6.6}$$

6.3. Cinemática de las reacciones de dos partículas. Reciben el nombre de reacciones de dos partículas las transformaciones de las partículas elementales que transcurren por el esquema

$$a + b \to c + d,$$

cuando durante la interacción de dos partículas a y b, éstas se convierten en otras dos partículas c y d. Un caso particular de semejante proceso es la dispersión elástica con la que las masas de las partículas no varían, pero cambian las energías y las direcciones de movimiento. Por regla, toda reacción debe ser considerada en dos sistemas de referencia: del laboratorio (L) y del sistema del centro de inercia (C). En el sistema C es cómodo realizar el análisis teórico de las interacciones de las partículas; en el sistema L se hacen experimentos reales.

Todas las correlaciones cinemáticas, a las que satisfacen las reacciones de dos partículas, se deducen de la ley de la conservación del 4-impulso

$$p_a^i + p_b^i = p_c^i + p_d^i, \tag{6.7}$$

que es válida en cualquier sistema de referencia y de la invariancia del cuadrado del 4-impulso. Diferentes magnitudes cinemáticas (energías de las partículas antes y después de la reacción, impulsos, ángulos de su desviación, etc.) que es cómodo expresar por los parámetros invariantes

$$\begin{aligned} s &= (p_a^i + p_b^i)(p_{ai} + p_{bi}), \\ t &= (p_a^i - p_c^i)(p_{ai} - p_{ci}), \\ u &= (p_a^i - p_d^i)(p_{ai} - p_{di}), \end{aligned} \tag{6.8}$$

donde s, t, u son invariantes relativistas, ya que ellas representan los cuadrados de los 4-impulsos. Estas magnitudes están ligadas mediante la relación que se desprende de (6.7):

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2, \tag{6.9}$$

donde el cuadrado de la masa de cada una de las partículas coincide con el cuadrado del 4-impulso:

$$m_a^2 = p_a^i p_{ai}, \text{ etc.}$$

De forma que de los tres parámetros en (6.8) sólo dos son independientes.

El parámetro s es el cuadrado del 4-impulso total de las partículas en el estado inicial. Si en el sistema L una de las partículas está inicialmente en reposo, s se expresa mediante la energía de la partícula que choca (véase (6.15)). Siendo elástica la dispersión, el parámetro t (cuando la partícula c coincide con a) es el cuadrado del 4-impulso transmitido por la partícula b al producirse la dispersión. Cuando el choque es inelástico la magnitud t es la generalización relativista del impulso transmitido. Este parámetro se expresa por el ángulo de dispersión, (véase (6.14)). El parámetro u también es el cuadrado del impulso transmitido de la partícula a a la d.

Para empezar, expresemos las energías de las partículas en el sistema C por el parámetro s. Para ello, escribamos la determinación de s por el 4-impulso en el sistema C:

$$p^i_{a0} + p^i_{b0} = (\mathscr{E}_{a0} + \mathscr{E}_{b0}, 0), \qquad p^i_{c0} + p^i_{d0} = (\mathscr{E}_{c0} + \mathscr{E}_{d0}, 0).$$

Las partes espaciales de estos 4-impulsos se reducen a cero, ya que por definición del sistema C, $p_{a0} = -p_{b0}$ y $p_{c0} = -p_{d0}$. Luego tenemos:

$$s = (\mathscr{E}_{a0} + \mathscr{E}_{b0})^2 = (\mathscr{E}_{c0} + \mathscr{E}_{d0})^2. \tag{6.10}$$

Resolviendo las igualdades (6.10) respecto de los impulsos, obtenemos

$$p^2_{a0} = p^2_{b0} = \frac{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}{4s}; \qquad p^2_{c0} = p^2_{d0} = \frac{\lambda(s, m_c^2, m_d^2)}{4s}, \tag{6.11}$$

donde la magnitud

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \tag{6.12}$$

recibe el nombre de "función cinemática". Ahora ya es fácil hallar la energía $\mathscr{E}_{a0} = \sqrt{p^2_{a0} + m_a^2}$, etc.:

$$\mathscr{E}_{a0} = \frac{s + m_a^2 - m_b^2}{2\sqrt{s}}, \quad \mathscr{E}_{b0} = \frac{s + m_b^2 - m_a^2}{2\sqrt{s}}, \tag{6.13}$$

$$\mathscr{E}_{c0} = \frac{s + m_c^2 - m_d^2}{2\sqrt{s}}, \quad \mathscr{E}_{d0} = \frac{s + m_d^2 - m_c^2}{2\sqrt{s}}.$$

El coseno del ángulo entre p_{a0} y p_{c0} se expresa con dos invariantes s y t mediante la relación

$$t = m_a^2 + m_c^2 + 2p_{a0}p_{c0}\cos\theta_0 - 2\mathscr{E}_{a0}\mathscr{E}_{c0},$$

obtenida sustituyendo en (6.8) los 4-impulsos determinados en el sistema C. Expresando los valores absolutos de los impulsos y las energías con ayuda de (6.11), (6.13), tendremos

$$\cos\theta_0 = \frac{s^2 + s(2t - m_a^2 - m_b^2 - m_c^2 - m_d^2) + (m_a^2 - m_b^2)(m_c^2 - m_d^2)}{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)\lambda^{1/2}(s, m_c^2, m_d^2)}. \tag{6.14}$$

Ahora, por los invariantes cinemáticos, expresemos las energías y los impulsos de las partículas en el sistema L. Supongamos que en dicho sistema, antes de la colisión, las partículas estaban en reposo. Sustituyendo en la fórmula (6.8), que determina el invariante s, las variables $p^i_a = (\mathscr{E}_a, p_a)$ y $p^i_b = (m_b, 0)$, hallamos

$$s = m_a^2 + m_b^2 + 2\mathscr{E}_a m_b, \tag{6.15}$$

de donde

$$\mathscr{E}_a = \frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2m_b}. \tag{6.16}$$

En la determinación de t, de acuerdo con (6.7), sustituimos la diferencia $p^i_a - p^i_c$ por $p^i_d - p^i_b$. Obtenemos la relación

$$t = m_b^2 + m_d^2 - 2m_b\mathscr{E}_d,$$

de la que determinamos la energía de la partícula d en el sistema del laboratorio:

$$\mathscr{E}_d = \frac{m_b^2 + m_d^2 - t}{2m_b}. \tag{6.17}$$

Por fin, de la ley de la conservación de la energía hallamos $\mathscr{E}_c$:

$$\mathscr{E}_c = \mathscr{E}_a + m_b - \mathscr{E}_d = \frac{s + t - m_a^2 - m_d^2}{2m_b} = \frac{1}{2m_b}(m_b^2 + m_c^2 - u). \tag{6.18}$$

Ahora, con ayuda de (5.16), es fácil calcular p_c y p_d. En el sistema del laboratorio el ángulo θ_{ac} se calcula por el mismo procedimiento que el $\cos\theta_0$. Aquí no aducimos las fórmulas.

Apliquemos las relaciones obtenidas para la dispersión elástica de dos partículas. Con esto,

$$m_c = m_a, m_d = m_b, \lambda(s, m_a^2, m_b^2) = 4m_b^2(\mathscr{E}_a^2 - m_a^2),$$
$$t = \frac{2m_b^2(\mathscr{E}_a^2 - m_a^2)}{m_a^2 + m_b^2 + 2m_b\mathscr{E}_a}(1 - \cos\theta_0). \tag{6.19}$$

Por medio de (6.17), (6.18) y (6.19) hallamos la energía de las partículas en el sistema L después de la dispersión como función de $\mathscr{E}_a$ y del ángulo de dispersión en el sistema C:

$$\mathscr{E}_a' = \mathscr{E}_c = \mathscr{E}_a - \frac{m_b(\mathscr{E}_a^2 - m_a^2)}{m_a^2 + m_b^2 + 2m_b\mathscr{E}_a}(1 - \cos\theta_0), \tag{6.20}$$

$$\mathscr{E}_b' = \mathscr{E}_d = m_b + \frac{m_b(\mathscr{E}_a^2 - m_a^2)}{m_a^2 + m_b^2 + 2m_b\mathscr{E}_a}(1 - \cos\theta_0), \tag{6.21}$$

para $\theta_0 = 0$ no hay transmisión de energía, teniendo la máxima para $\theta_0 = \pi$.

6.4. Transformación del volumen de fase y de la función de distribución. Al considerar sistemas constituidos por gran número de partículas relativistas (haz de partículas de un acelerador, rayos cósmicos — gas de partículas relativistas, etc.), por regla, se introducen funciones que caracterizan la distribución de las partículas por los impulsos y en el espacio (función de distribución). Para muchos fines, es preciso conocer cómo se transforman tales funciones al pasar a otro sistema inercial. Vamos a estudiar tres tipos de funciones de distribución: por los impulsos, coordenadas y en el espacio de fase.

Determinamos la función de distribución por los impulsos $f(\boldsymbol{p})$ del modo siguiente: el producto $f(\boldsymbol{p})$ por el elemento de volumen $d^3p = p^2dpd\Omega_p$ del espacio de impulsos tridimensional es igual al número dN de partículas en el sistema, cuyos impulsos están dirigidos al interior del ángulo sólido $d\Omega_p$ y sus valores absolutos están situados entre p y $p + dp$, es decir,

$$dN = f(\boldsymbol{p})d^3p. \tag{6.22}$$

La integración de (6.22) por todos los valores de los impulsos proporciona el número completo N de partículas en el sistema. En ocasiones, en lugar de $f(\boldsymbol{p})$ se considera la magnitud $w(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{N}f(\boldsymbol{p})$ normada por la unidad.

La ley de transformación $f(\boldsymbol{p})$ va a ser establecida del evidente hecho que tanto el número total de partículas N, como su pequeña parte dN son invariantes iguales en todos los sistemas inerciales:

$$dN = f(\boldsymbol{p})d^3p = f'(\boldsymbol{p}')d^3p' = \text{inv}. \tag{6.23}$$

De aquí

$$f'(p') = f(p)\frac{d^3p}{d^3p'}, \tag{6.24}$$

donde todas las magnitudes en el segundo miembro de la igualdad deben ser expresadas por p' con ayuda de las fórmulas de transformación.

Calculemos la razón $\frac{d^3p}{d^3p'}$ haciendo uso de las proyecciones cartesianas del impulso y de las fórmulas (5.15). Tenemos

$$dp_x = \gamma\left(dp_x' + \frac{Vd\mathscr{E}'}{c^2}\right) = \gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}\frac{d\mathscr{E}'}{dp_x'}\right)dp_x'.$$

Pero

$$\frac{d\mathscr{E}'}{dp_x'} = \frac{c^2p_x'}{\mathscr{E}'},$$

por lo que

$$dp_x = \frac{\gamma}{\mathscr{E}'}(\mathscr{E}' + Vp_x')dp_x' = \frac{\mathscr{E}}{\mathscr{E}'}dp_x';$$

las proyecciones transversales del impulso, no varían: $dp_y = dp_y'$, $dp_z = dp_z'$.

De aquí

$$d^3p = dp_x dp_y dp_z = \frac{\mathscr{E}}{\mathscr{E}'}d^3p'$$

o bien

$$\frac{d^3p}{\mathscr{E}} = \frac{d^3p'}{\mathscr{E}'}. \tag{6.25}$$

Sustituyendo (6.25) en (6.24) y expresando $\mathscr{E}$ y p las magnitudes con raya, tendremos

$$f'(p') = \gamma\left(1 + \frac{p'\cdot V}{\mathscr{E}'}\right)f(\gamma(p_x' + V\mathscr{E}'/c^2), p_y', p_z'). \tag{6.26}$$

Ahora hallemos la ley de transformación de la función de distribución en el espacio de impulsos $f(r, p)$ que se determina de la manera siguiente: el número de partículas dN en el volumen d^3x del espacio de coordenadas y en el volumen d^3p del espacio de impulsos se expresa en la forma

$$dN = f(r, p)d^3xd^3p. \tag{6.27}$$

De acuerdo con (2.2)

$$d^3x = \frac{\gamma'}{\gamma}d^3x', \tag{6.28}$$

donde γ es el factor relativista. Pero como $\frac{\mathscr{E}}{\mathscr{E}'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$ de (6.25) se desprende que $d^3p = \left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right) d^3p'$. De este modo, el volumen de fase

$$d^3x d^3p = d^3x' d^3p' = \text{inv.} \tag{6.29}$$

Por lo tanto,

$$f'(r', p') = f(r, p) \tag{6.30}$$

también es invariante.

Nos queda hallar la ley de transformación de la función de distribución por las coordenadas, es decir, la concentración de partículas

$$n(r) = \int f(r, p) d^3p. \tag{6.31}$$

Resulta que para esto hay que considerarla en conjunto con el vector de densidad del flujo de partículas

$$j(r) = \int \mathbf{v} f(r, p) d^3p, \tag{6.32}$$

ya que las indicadas magnitudes se transforman una por otra. Esto lo haremos en el § 13.

Capítulo II. Teoría especial de la relatividad y fenómenos electromagnéticos

§ 7. Interacción entre las partículas cargadas y el campo electromagnético

7.1. Interacción en la teoría de la relatividad. Carga eléctrica y campo electromagnético. La interacción de las partículas en la teoría de la relatividad se distingue notoriamente de las interacciones consideradas en la mecánica clásica. En ésta se hace uso con amplitud de la noción de energía potencial. En el caso de dos puntos materiales su energía potencial depende de la diferencia de coordenadas, es decir, $U(r_1(t) - r_2(t))$. La concepción de energía potencial supone: a) que la interacción se transmite a velocidad infinita; b) que las partículas están en interacción a distancia, sin ningún agente intermedio que transmita la interacción (semejante cuadro denomínase "orden de largo alcance").

El carácter finito de la velocidad de propagación de las interacciones hace que el cuadro descrito con anterioridad varíe de manera radical. El cambio de la posición de la partícula 1 hace variar la fuerza aplicada sobre la partícula 2, pero esta variación sólo alcanzará a esta última después del tiempo finito $\tau = r_{12}/u$, $u \leqslant c$ es la velocidad de propagación de la interacción, lo que quiere decir que las partículas en interacción deben crear en el espacio circundante un campo de fuerzas por el que se transmite la interacción. La variación de las coordenadas y las velocidades de las partículas

crean perturbaciones del campo cuya propagación transcurre a velocidad finita. La partícula que consideramos sentirá dichas variaciones en el estado de otras partículas por el cambio del campo en el punto donde ella se encuentra ("orden de corto alcance"). De este modo, la concepción del campo se desprende inevitablemente de las exigencias de la teoría de la relatividad. Si en la mecánica clásica "el campo" sólo podía desempeñar el papel de una noción matemática auxiliar, la teoría de la relatividad examina el campo como "una realidad física que nos han dado por intermedio de las sensaciones" (con ayuda de los correspondientes instrumentos), es decir, como una de las formas de la materia. El campo no es menos material que la partícula.

En el presente libro sólo vamos a estudiar un tipo de campo, el electromagnético. La interacción de las partículas con el campo electromágnetico, así como la propia generación (creación) del campo están condicionadas por una importante propiedad de las partículas elementales llamada *carga eléctrica*. Esta es una de las principales características de las partículas elementales a la par con magnitudes tan fundamentales como la masa, el espín (momento de impulso interno) y algunas otras estudiadas en la teoría cuántica. El concepto de carga eléctrica será considerado como noción elemental que no requiere ninguna otra definición.

La interacción entre las cargas es el hecho más sencillo y, al mismo tiempo, fundamental que permite revelar la propia existencia de la carga eléctrica y caracterizarla desde el punto de vista cuantitativo. La práctica establece que las fuerzas de interacción en cuerpos cargados inmóviles de pequeñas dimensiones ubicados en el vacío, están subordinadas a la ley

$$F_{21} = \frac{e_1 e_2}{r_{12}^2} \frac{r_{12}}{r_{12}} \tag{7.1}$$

(*ley de Coulomb*). Esta igualdad también es justa tomando en consideración los signos de las cargas e_1, e_2.

La dependencia de la distancia puede ser comprobada cambiando la distancia y variando, con ello, las fuerzas de interacción. La dependencia entre la fuerza y e_1, e_2 puede ser establecida si tomamos varias cargas, no menos de cuatro. Vamos a ubicarlas a pares en los mismos puntos 1 y 2 del espacio, alejando las demás cargas "al infinito". Entonces, si (7.1) es justa

$$\frac{F_{23}}{F_{13}} = \frac{F_{24}}{F_{14}} = \frac{e^2}{e_1}, \tag{7.2}$$

con lo que la ley de Coulomb puede comprobarse mediante cuatro mediciones independientes (con una precisión salvo el factor constante determinado por la elección del sistema de unidades).

Entre las partículas elementales más difundidas a condiciones ordinarias, el electrón tiene carga negativa (convencionalmente) $e = -e_0$ y el pro-

tón carga positiva $e = +e_0$; el valor numérico de la carga elemental $e_0 = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ unid. CGS $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

A cada partícula elemental corresponde su antipartícula, cuya carga es igual en valor absoluto a la de la partícula, pero de signo contrario. Algunas partículas elementales (los neutrones, neutrino, mesones neutrales) no tienen carga eléctrica, pero los neutrones (y antineutrones) tienen momento magnético. Es curioso que la carga eléctrica de todas las partículas "elementales" por su magnitud absoluta es igual a la carga elemental o bien a cero*).

7.2. Acción de las partículas ubicadas en el campo electromagnético. Potencial cuatridimensional. Para la descripción cuantitativa de los procesos de interacción entre las partículas cargadas y el campo electromagnético sobre la base del formalismo lagrangiano, del que ya hicimos uso en el cap. I al considerar las partículas libres, hay que postular el tipo de acción. Escribamos la acción para una partícula con carga e situada en el campo electromagnético prefijado (o sea, que no depende del movimiento de la partícula que consideramos) en la forma

$$S = S_{\text{part}} + S_{\text{int}}, \tag{7.3}$$

donde

$$S_{\text{part}} = -mc \int_{(1)}^{(2)} ds \tag{7.4}$$

es la acción (5.4) de la partícula libre, S_{int}, el sumando que describe la interacción entre la partícula y el campo electromagnético. La acción S_{int} debe satisfacer las siguientes evidentes propiedades: a) con el fin de que se cumpla el principio de la relatividad, debe ser un invariante relativista; b) contener (en forma de un producto) las magnitudes referentes a la partícula, es decir, su carga e y las magnitudes que describen el campo, ya que las partículas que no tienen carga no entran en interacción con el campo electromagnético*).

Postulemos la interacción de la forma

$$S_{\text{int}} = -\frac{e}{c} \int_{(1)}^{(2)} A_i(x^0, x^1, x^2, x^3)\, dx^i, \tag{7.5}$$

donde la integral se toma a lo largo de la línea universal de la partícula que pasa por los puntos 1 y 2, $A_i (i = 0, 1, 2, 3)$ son funciones reales de las coordenadas y el tiempo que describen el campo electromagnético y forman un

---

*) En la composición de las partículas elementales de los hadrones entran los guarks, que según los datos contemporáneos pueden tener cargas eléctricas quebradas.

*) Aquí no vamos a examinar el caso cuando la partícula neutral tiene momento magnético.

4-vector covariante; el factor $-\frac{1}{c}$ se ha separado para mayor comodidad. Así, pues, para la descripción del campo electromagnético hemos introducido el 4-vector A_i llamado potencial cuatridimensional. La interacción (7.5) satisface las condiciones a) y b) formuladas más arriba, pero con ellas no se define de modo unívoco. No obstante, veremos que la expresión (7.3) y los corolarios que de ella se desprenden estarán en plena concordancia con múltiples datos experimentales acerca de las interacciones de las partículas con el campo magnético, lo que, en fin de cuentas, es el fundamental argumento a favor de la elección de la interacción (7.5).

§ 8. Ecuaciones de movimiento de una partícula relativista en el campo electromagnético. Intensidad del campo

8.1. Función de Lagrange y ecuaciones de movimiento. La acción de la forma postulada en el parágrafo anterior nos permite escribir la ecuación de movimiento de la partícula cargada. Aquí obtendremos la ecuación requerida en la forma más próxima a la newtoniana. Partiendo de (7.3) — (7.5):

$$S = \int_{(1)}^{(2)} \left(-mc\,ds - \frac{e}{c} A_i dx^i\right), \tag{8.1}$$

donde la integración se realiza a lo largo de la línea universal de la partícula sobre los puntos fijados 1 y 2 en el 4-espacio, x^i, son las coordenadas cuatridimensionales de un sistema de referencia inercial tomado al azar. Como ds y $A_i dx^i$ son invariantes relativistas, S también es invariante, por lo que la ecuación de movimiento obtenida partiendo de una acción relativistamente invariante será válida en cualquier sistema inercial.

Para reducir (8.1) a la forma ordinaria (5.1) pasemos a la integración por t escribiendo previamente $A_i = (\varphi, -A)$ y $A_i dx^i = c\varphi dt - A \cdot dr$:

$$S = \int_{(1)}^{(2)} \left(-mc\frac{ds}{dt} - e\varphi + \frac{e}{c} A \cdot \frac{dr}{dt}\right) dt. \tag{8.2}$$

Aquí, $\varphi(r, t)$ y $A(r, t)$ reciben el nombre de potenciales escalar y vectorial del campo electromagnético (su conjunto forma el 4-potencial). Más adelante, $\frac{dr}{dt} = \mathbf{v}$ es la velocidad tridimensional de la partícula, expresamos $\frac{ds}{dt}$ de acuerdo con (5.5) y, de este modo

$$S = \int_{(1)}^{(2)} \left(-mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_2}} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot A - e\varphi\right) dt. \tag{8.3}$$

Así queda determinada la función de Lagrange para la partícula cargada

$$L(r, v, t) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\cdot A(r, t) - e\varphi(r, t). \tag{8.4}$$

El hecho indicado más arriba, según el cual las partículas sólo pueden estar en interacción por medio del campo, permite generalizar con facilidad (8.4) para un sistema de partículas en interacción:

$$L = -\sum_a m_a c^2\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} + \sum_a \frac{e_a}{c}\mathbf{v}_a\cdot A(r_a, t) - \sum_a e_a\varphi(r_a, t). \tag{8.5}$$

Con esto, por $A(r_a, t)$, $\varphi(r_a, t)$ hay que entender los potenciales creados por los cuerpos externos y por todas las partículas, salvo la a-ésima en el punto donde ésta se encuentra. Al pasar al límite no relativista sólo varía el primer sumando. Después de transformar el radical, como hicimos en el § 5, desechando en la función de Lagrange el sumando constante $\sum m_a c^2$, obtenemos

$$L_{\text{no rel.}} = \sum_a \left\{\frac{mv_a^2}{2} + \frac{e_a}{c}\mathbf{v}_a\cdot A(r_a, t) - e_a\varphi(r_a, t)\right\}. \tag{8.6}$$

La ecuación de movimiento en forma lagrangiana tiene el aspecto (5.12). Calculemos las derivadas que en ella entran (para una partícula)

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{e}{c}A(r, t). \tag{8.7}$$

Como sabemos, la derivada $\dfrac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \boldsymbol{P}$ lleva el nombre de impulso generalizado. Según (8.7) este último no coincide con el impulso $\boldsymbol{p}$ (5.10) de la partícula libre;

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}A(r, t). \tag{8.8}$$

A continuación, calculamos la derivada según el tiempo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{dp}{dt} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A}{\partial t} + (v\cdot\nabla)A\right) \tag{8.9}$$

y la derivada según las coordenadas

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{e}{c}\nabla(\mathbf{v}\cdot A) - e\nabla\varphi.$$

En la última igualdad es cómodo hacer uso de la identidad vectorial diferencial

$$\mathbf{v}\times[\nabla\times A] = \nabla(\mathbf{v}\cdot A) - (\mathbf{v}\cdot\nabla)A,$$

en la cual hemos tenido en cuenta que el operador de derivación ∇ no influye sobre el vector $\mathbf{v}$. Como resultado

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{e}{c}\mathbf{v} \times [\nabla \times A] - \frac{e}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)A - e\nabla\varphi,$$

mientras que la ecuación de movimiento se escribe en la forma

$$\frac{dp}{dt} = e\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\varphi\right) + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \operatorname{rot} A. \tag{8.10}$$

8.2. Fuerza de Lorentz. Intensidad del campo electromagnético. Por definición, la magnitud en el segundo miembro de la igualdad es la fuerza que actúa sobre la partícula cargada:

$$F = e\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\varphi\right) + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \operatorname{rot} A. \tag{8.11}$$

Comparemos esta expresión con la de la fuerza de Lorentz conocida de la práctica:

$$F = eE + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times H. \tag{8.12}$$

Aquí, E y H son los vectores que caracterizan el campo electromagnético. Ellos reciben, respectivamente, el nombre de *intensidad de los campos eléctrico* y *magnético*. La fuerza de Lorentz (8.12) ha de ser considerada como un hecho experimental fundamental. La expresión (8.12) para la fuerza de Lorentz es una de las más bellas fórmulas de física clásica. Produce profunda impresión por su sencillez y generalidad: cualquier partícula cargada, en movimiento a una velocidad arbitraria, estará sometida en el campo electromagnético a la fuerza (8.12). A diferencia de otras muchas fórmulas de mécanica relativista (p. ej., (5.10), (5.11)) que contienen el factor relativista $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, la fuerza de Lorentz es lineal por $\mathbf{v}$. También lo es por E y H.

La fuerza de Lorentz desempeña importante papel en electrodinámica clásica, ya que en todas las posibles situaciones describe la acción del campo electromagnético sobre la partícula cargada. Permite convertir la medición de las intensidades del campo electromagnético E y H en la medición de las magnitudes mecánicas F y v (así como la carga e para la determinación de la cual en el § 7 fueron expuestos los procedimientos). Con ello, la intensidad E es determinada por la fuerza que actúa sobre una partícula inmóvil de prueba ($v = 0$) con la carga e; la intensidad H, por medio de una fuerza adicional que actúa sobre la partícula en movimiento.

La comparación de (8.11) con (8.12) permite ligar el 4-potencial introducido con anterioridad con las intensidades del campo electromagnético:

$$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \qquad H = \operatorname{rot} A. \tag{8.13}$$

Como A es un vector tridimensional polar y φ, escalar, E y H durante la rotación en el espacio tridimensional se transforman del mismo modo según la ley de transformación de los vectores, pero al reflejar los ejes de coordenadas (transformación $r' = -r$) E y H se comportan de forma diferente; el vector E, lo mismo que r, cambia su signo por el opuesto, mientras que el vector H no varía su signo. Por esta razón, H se denomina seudovector o bien axial, a diferencia de E que es un vector real o polar.

En el ejemplo de la medición de H por medio de la fuerza de Lorentz podemos cerciorarnos una vez más del carácter de seudovector de la intensidad H del campo magnético: aunque la fuerza $F_m = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times H$ ha sido determinada plenamente de modo unívoco, el signo de H es convencional y depende de la determinación del producto vectorial. Si nos ponemos de acuerdo en entender por $\mathbf{v}$, H y $\mathbf{v} \times H$ no una terna derecha sino izquierda de vectores, el signo de H se sustituirá por el opuesto. Esta es una singularidad característica de los vectores axiales: está determinado sólo el eje, pero no su sentido (véase el Complemento 1.6). Semejante indeterminación no es propia de la intensidad del campo eléctrico E: con la fuerza $F_e = eE$ medida y la carga e conocida, su sentido se determina de forma única.

8.3. Transformación gradiental de potenciales. En (8.13) vemos que a iguales intensidades del campo electromagnético E, H corresponde una extensa clase de potenciales electromagnéticos. En efecto, el potencial vectorial

$$\tilde{A} = A + \operatorname{grad} \chi, \tag{8.14}$$

donde $\chi(r, t)$ es una función escalar diferenciable arbitraria que no introduce variaciones del vector magnético: $\tilde{H} = \operatorname{rot} \tilde{A} = \operatorname{rot} A = H$, ya que $\operatorname{rot} \nabla \chi = 0$ es idéntico con toda χ. Con el fin de que con semejante transformación tampoco varíe el vector E también hay que transformar el potencial escalar:

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \tag{8.15}$$

Así, pues, las intensidades del campo E, H son invariantes con relación a las transformaciones de los potenciales (8.14), (8.15) que reciben el nombre de transformaciones *gradientales* o bien de *calibración*. De la invariancia de calibración de la teoría electromagnética se desprenden profundos corolarios de los cuales algunos serán expuestos en el cap. III.

La transformación gradiental puede ser escrita con facilidad en 4-forma

$$\tilde{A}_i = A_i - \frac{\partial \chi}{\partial x^i}, \tag{8.16}$$

donde $\chi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ es un 4-escalar diferenciable arbitrario.

Las magnitudes observables en electrodinámica clásica son las intensidades E y H, los potenciales actúan como funciones auxiliares de los que se

obtienen E, H diferenciando por las fórmulas (8.13). A pesar de que los potenciales no son magnitudes fundamentales, ellos juegan importante papel en electrodinámica. Permiten reducir el número de funciones incógnitas de seis (E, H) a cuatro (A, φ). Como demostramos más arriba, es imposible formular el principio variacional sin los potenciales. Particular importancia adquieren los potenciales electromagnéticos en la mecánica cuántica, así como al efectuar la descripción cuantomecánica del campo electromagnético. Son precisamente los potenciales A, φ y no las intensidades del campo E, H, los que entran en la mayoría de las ecuaciones de mecánica y electrodinámica cuánticas.

8.4. Funciones de Hamilton. Por la definición conocida de mecánica, la función de Hamilton depende de las coordenadas generalizadas, de los impulsos y el tiempo generalizados y se determina con la igualdad

$$\mathscr{H}(r, P, t) = P \cdot \mathrm{v} - L, \tag{8.17}$$

donde el segundo miembro puede ser expresado por r, P y t. Como coordenadas generalizadas han sido elegidas las cartesianas $r = (x, y, z)$.

Después de sustituir en (8.17) las expresiones (8.7) y (8.4) obtenemos

$$\mathscr{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} + e\varphi.$$

En el segundo miembro el primer sumando es la energía de la partícula libre (5.11). Si, de acuerdo con (5.18), la expresamos por $p = P - \dfrac{e}{c} A$ hallaremos definitivamente:

$$\mathscr{H}(r, P, t) = \sqrt{m^2c^4 + c^2(P - \frac{e}{c} A)^2} + e\varphi. \tag{8.18}$$

La función de Hamilton hallada nos permite escribir las ecuaciones en la forma de las ecuaciones canónicas de Hamilton:

$$\dot{P} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial r}, \dot{r} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial P}. \tag{8.19}$$

Recomendamos al lector que se cerciore por sí solo que las ecuaciones (8.19) son equivalentes a la ecuación de movimiento (8.10).

§ 9. Ecuación de movimiento en forma covariante. Tensor del campo electromagnético

9.1. Variaciones de la acción y ecuación de movimiento. La ecuación de movimiento (8.10) posee invariación relativista (es válida en todo sistema inercial), pero no es covariante (sus primero y segundo miembros no son 4-tensores de ningún rango). Pero la anotación covariante proporciona una

serie de ventajas: hace explícita la invariancia relativista y permite hallar la ley de la transformación relativista para las intensidades E, H del campo electromagnético.

Con el fin de obtener las ecuaciones de movimiento en forma covariante realicemos directamente la variación de la acción (8.1), sin pasar a la anotación no covariante mediante la función lagrangiana que sólo destaca una coordenada temporal. Tendremos:

$$\delta S = \int_{(1)}^{(2)} \left(-mc\delta\, ds - \frac{e}{c}\,\delta A_i\, dx^i - \frac{e}{c}\, A_i \delta\, dx^i \right). \tag{9.1}$$

Seguidamente, calculemos la variación de ds: por definición $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$,

$$\delta\, ds = \frac{dx_i \delta\, dx^i}{ds} = \frac{1}{c}\, u_i \delta\, dx^i; \tag{9.2}$$

en esta última igualdad hemos hecho uso de (4.28) y de la definición de la 4-velocidad (4.29). Esto permite representar (9.1) en la forma

$$\delta S = \int_{(1)}^{(2)} \left(-mu_i \delta\, dx^i - \frac{e}{c}\, A_i \delta\, dx^i - \frac{e}{c}\,\delta A_i\, dx^i \right).$$

Luego, integremos los dos primeros términos por partes, lo que conduce a

$$\delta S = \left(-mu_i - \frac{e}{c}\, A_i \right) \delta x^i \Big|_{(1)}^{(2)} + \int_{(1)}^{(2)} \left(m\, du_i \delta x^i + \frac{e}{c}\, dA_i \delta x^i - \frac{e}{c}\,\delta A_i\, dx^i \right). \tag{9.3}$$

En los 4-puntos fijados 1 y 2 $\delta x^i = 0$, por lo que el término extraintegral formado se anula. En el integrando transformamos del modo siguiente términos aislados:

$$du_i = \frac{du_i}{d\tau}\, d\tau; \qquad dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\,\frac{dx^k}{d\tau}\, d\tau = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\, u^k\, d\tau;$$

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\,\delta x^k; \qquad dx^i = u^i\, d\tau. \tag{9.4}$$

La sustitución de estas fórmulas en (9.3) nos proporciona

$$\delta S = \int \left(m\,\frac{du_i}{d\tau}\,\delta x^i d\tau + \frac{e}{c}\,\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\, u^k \delta x^i d\tau - \frac{e}{c}\,\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\, u^i \delta x^k d\tau \right). \tag{9.5}$$

En el último sumando efectuamos la conmutación de los índices mudos $i \rightleftarrows k$ e introducimos la designación

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \tag{9.6}$$

La magnitud F_{ik} no es más que el 4-tensor de II rango antisimétrico covariante del 4-potencial. Recibe la denominación de *tensor del campo electromagnético* y desempeña importantísimo papel en electrodinámica.

La variación de la acción, escrita por intermedio del tensor F_{ik}, toma el aspecto

$$\delta S = \int_{(1)}^{(2)} \left(m \frac{du_i}{d\tau} - \frac{e}{c} F_{ik} u^k \right) \delta x^i d\tau. \tag{9.7}$$

Para no violar la simetría entre las 4-coordenadas hay que considerar que las cuatro variaciones δx^i, $i = 0, 1, 2, 3$ son arbitrarias y diferentes de cero. En lo que atañe a la mecánica no relativista la variación de las coordenadas generalizadas transcurre a tiempo constante, o sea, $\delta x^0 = 0$. Así, pues, en la teoría relativista el principio variacional debe ser generalizado en cierto grado. Pero semejante generalización sólo se manifestará en la forma de anotación de las ecuaciones de movimiento, pero no en su contenido, ya que los resultados que obtendremos más adelante serán equivalentes a los resultados del § 8 en el que la variación fue realizada con $t = \text{const}$.

Debido a la arbitrariedad e independencia de las variaciones de δx^i, del carácter estacionario de la acción $\delta S = 0$ siguen las ecuaciones de movimiento

$$m \frac{du_i}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{ik} u^k, \qquad i = 0, 1, 2, 3. \tag{9.8}$$

Por su forma son la igualdad entre dos 4-vectores covariantes. Como es lógico, esta igualdad también se cumple para los componentes covariantes:

$$m \frac{du^i}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k. \tag{9.9}$$

Ahora volvamos a considerar la igualdad (9.3). En ella el término integral es idéntico a (9.7) y se anula durante el movimiento de la partícula por una trayectoria física. Si fijamos el punto 1 y variamos las coordenadas del punto 2, la variación de la acción tomará el aspecto

$$\delta S = -\left(m u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i.$$

Por otro lado $\delta S = \dfrac{\partial S}{\partial x^i} \delta x^i$, de donde

$$\frac{\partial S}{\partial x^i} = -\left(m u_i + \frac{e}{c} A_i \right).$$

Denominemos

$$P_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} = m u_i + \frac{e}{c} A_i \tag{9.10}$$

4-vector covariante del impulso generalizado; entonces, el 4-vector contravariante P^i será escrito en la forma

$$P^i = \left(\frac{\mathscr{E} + e\varphi}{c}, p + \frac{e}{c}A\right). \tag{9.11}$$

Su parte espacial coincide con el vector tridimensional del impulso generalizado (8.8), en tanto que el componente temporal es, ni más ni menos, la función de Hamilton (8.18) dividida por c. Así, pues, $\left(\frac{\mathscr{H}}{c}, P\right) = P^i$ forman el 4-vector contravariante del impulso generalizado. De acuerdo con (9.11) — (9.13) sus componentes están ligados con las derivadas de la acción mediante las mismas relaciones bien conocidas de la mecánica clásica:

$$P = \frac{\partial S}{\partial r}, \quad \mathscr{H} = -\frac{\partial S}{\partial t}. \tag{9.12}$$

Esto nos permite confeccionar la ecuación de Hamilton — Jacobi y emplearla para resolver problemas del movimiento de las partículas relativistas en el campo electromagnético.

Como sabemos de mecánica, la ecuación de Hamilton — Jacobi tiene la forma

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \mathscr{H}(P, r, t) = 0, \tag{9.13}$$

donde $\mathscr{H}$ es la función de Hamilton (8.18) en la que el impulso generalizado P debe sustituirse, de acuerdo con (9.12), por la variable grad S. Haciendo uso de (8.18), obtenemos

$$\sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\operatorname{grad} S - \frac{e}{c}A\right)^2} = -\left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi\right),$$

o bien, desechando el radical

$$\left(\operatorname{grad} S - \frac{e}{c}A\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi\right)^2 + m^2c^2 = 0. \tag{9.14}$$

Esta es la ecuación de Hamilton — Jacobi para una partícula relativista.

9.2. Relación entre el tensor del campo y las intensidades E, H. Anotemos los componentes del tensor F_{ik} poniendo en la definición (9.6) $A_i = (\varphi, -A)$. Obtenemos

$$F_{01} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = E_x,$$

$$F_{12} = +\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} = -H_z,$$

etc., es decir, en correspondencia con (8.13) los componentes del tensor F_{ik} coinciden con las proyecciones de los vectores tridimensionales E, H.

Escribamos en forma de tablas la ligazón entre el 4-tensor del campo electromagnético y los 3-vectores de la intensidad:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.15)$$

Hemos expresado las intensidades del campo por los componentes de un 4-tensor único antisimétrico de II rango.

Ahora, escribamos la ecuación de movimiento (9.9) en forma tridimensional. Recordando la relación del impulso tridimensional con la 4-velocidad (5.14), vemos que el primer miembro de (9.9) $m \dfrac{du^\alpha}{dt}$ para $\alpha =$ $= 1, 2, 3$ se reduce a la derivada $\gamma \dfrac{dp}{dt}$, donde γ es el factor de Lorentz. Con ayuda de (9.15) y (4.30) el segundo miembro se escribe en forma de la fuerza de Lorentz (8.12) multiplicada por γ. Como resultado obtenemos la ecuación tridimensional de movimiento

$$\frac{dp}{dt} = eE + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times H. \quad (9.16)$$

Para $i = 0$ la componente (9.9) se reduce del mismo modo a la forma

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = eE \cdot \mathbf{v}, \quad (9.17)$$

o sea, expresa el cambio de la energía cinética de la partícula. Esta ecuación no es independiente y puede ser obtenida de (9.16) multiplicando de forma escalar sus dos miembros por $\mathbf{v}$. Con esto, de acuerdo con (5.18) y (5.13)

$$\frac{d\mathscr{E}}{dp} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \frac{dp}{dt} = \frac{d\mathscr{E}}{dt},$$

donde $\mathscr{E} = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ es la suma de la energía cinética de la partícula y de la energía en reposo y no contiene la energía de interacción con el campo electromagnético. Señalemos que el campo magnético no ejerce trabajo sobre la partícula, puesto que la fuerza magnética siempre es perpendicular a la velocidad.

§ 10. Transformación de las intensidades del campo electromagnético. Invariantes del campo

10.1. Transformación de las intensidades. La aclaración del factor fundamental de que los vectores E y H son los componentes del 4-tensor del campo F^{ik}, nos permite con facilidad hallar las transformaciones de estos vectores al pasar de un sistema inercial a otro. Vamos a partir de la ley de transformación del tensor (4.15):

$$F^{ik'} = a^i_m a^k_n F^{mn}, \tag{10.1}$$

donde la matriz a^i_m está determinada en la tabla (4.11). De aquí, p. ej., obtenemos

$$F^{10'} = a^1_0 a^0_1 F^{01} + a^1_1 a^0_0 F^{10} = (\mathrm{ch}^2\psi - \mathrm{sh}^2\psi)F^{10} = F^{10},$$

$$F^{20'} = a^2_2 a^0_0 F^{20} + a^2_2 a^0_1 F^{21} = \mathrm{ch}\psi F^{20} - \mathrm{sh}\psi F^{21},$$

etc. Haciendo uso de las tablas (9.15) hallamos siguientes fórmulas para las transformaciones:

$$\begin{aligned} E_x' &= E_x, E_y' = \gamma(E_y - \beta H_z), \quad E_z' = \gamma(E_z + \beta H_y), \\ H_x' &= H_x, H_y' = \gamma(H_y + \beta E_z), \quad H_z' = \gamma(H_z - \beta E_y). \end{aligned} \tag{10.2}$$

Las fórmulas (10.2) pueden ser escritas en forma vectorial si introducimos los vectores componentes E y H paralelos y perpendiculares respecto de la velocidad V:

$$\begin{aligned} E_\parallel' &= E_\parallel, E_\perp' = \gamma\left(E_\perp + \frac{1}{c} V \times H\right), \\ H_\parallel' &= H_\parallel, H_\perp' = \gamma\left(H_\perp - \frac{1}{c} V \times E\right). \end{aligned} \tag{10.3}$$

Un importante caso particular de las fórmulas (10.3) es el movimiento relativo del sistema de referencia a la velocidad relativista $V \ll c$. Con ello, $\gamma \approx 1$ y con una precisión a salvo los términos lineales por V/c

$$E' = E + \frac{1}{c} V \times H, \qquad H' = H - \frac{1}{c} V \times E. \tag{10.4}$$

10.2. Invariantes del campo. Confeccionemos todos los invariantes independientes posibles de los componentes del tensor F^{ik}. La contracción del tensor que es un invariante, su huella F^i_i, en el caso dado se reduce a cero. El cuadrado escalar del tensor F^{ik} es un invariante no trivial, o sea, su producto por un tensor covariante:

$$F_{ik}F^{ik} = \mathrm{inv}. \tag{10.5}$$

El segundo invariante independiente se construye por medio del tensor unitario absolutamente antisimétrico e_{iklm} (véase el § 4):

$$e_{iklm}F^{ik}F^{lm} = \text{inv.} \tag{10.6}$$

Los productos (10.5) y (10.6) pueden ser expresados con facilidad por $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ mediante las tablas (9.15):

$$F_{ik}F^{ik} = 2(H^2 - E^2), \qquad e_{iklm}F^{ik}F^{lm} = 2\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}.$$

De este modo, son invariantes relativistas

$$E^2 - H^2 = \text{inv}, \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H} = \text{inv}. \tag{10.7}$$

Las magnitudes halladas se comportan de distinta manera durante la reflexión de los ejes espaciales o temporales. La diferencia $E^2 - H^2$ es también invariante respecto a la transformación de reflexión de los ejes. Al producirse la reflexión de los tres ejes espaciales o del eje temporal, el producto $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}$ cambia de signo: en el primer caso $\boldsymbol{E}' = -\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H}$ y en el segundo, $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}$, pero $\boldsymbol{H}' = -\boldsymbol{H}$. Por esta razón, $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}$ no es un escalar real, sino seudoescalar. Pero $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}$ queda invariante respecto de la reflexión de los cuatro ejes.

Los invariantes del campo serán empleados en el § 13 para confeccionar una acción relativista invariante. Además, con su ayuda pueden ser hallados los sistemas de referencia inerciales en los que el campo electromagnético tiene la forma más sencilla. P. ej., supongamos que en cierto sistema de referencia $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ son homogéneos y perpendiculares en sí, es decir, $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H} = 0$. En semejante caso, en función del signo de la diferencia $E^2 - H^2$, podemos hallar tal sistema de referencia inercial en el que $\boldsymbol{E}' = 0$ (para $E^2 - H^2 < 0$) o bien $\boldsymbol{H}' = 0$ (para $E^2 - H^2 > 0$).

Suponemos que en el primero de los casos indicados la velocidad $\boldsymbol{V}$ del sistema de referencia buscado es perpendicular al plano $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$ y, partiendo de (10.3), escribimos para él la ecuación

$$\boldsymbol{E}' = \gamma\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H}\right) = 0,$$

de la que hallamos

$$\boldsymbol{V} = c\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}}{H^2}. \tag{10.8}$$

Del mismo modo, en el segundo caso la condición $\boldsymbol{H}' = 0$ nos proporciona

$$\boldsymbol{V} = c\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}}{E^2}. \tag{10.9}$$

En los dos casos $V < c$, lo que es condición necesaria para la existencia del sistema inercial buscado.

§ 11. Movimiento de una partícula relativista por campos eléctrico y magnético cruzados. Deriva eléctrica

11.1. Movimiento en un campo magnético homogéneo. Aquí vamos a investigar uno de los casos más sencillos, es decir, el movimiento de la partícula por los campos eléctrico y magnético E, H homogéneos y perpendiculares entre sí. Al final del § 10 fue mostrado que cuando $E \neq H$ existe tal sistema inercial en el que una de las intensidades se reduce a cero. Para $E < H$ en el sistema en movimiento respecto del inicial a la velocidad

$$V_E = c\frac{E \times H}{H^2}, \tag{11.1}$$

sólo queda en el campo magnético que, de acuerdo con (10.3), tendrá una intensidad

$$H' = \left(\frac{H^2 - E^2}{H^2}\right)^{1/2} H. \tag{11.2}$$

Escribamos las ecuaciones de movimiento de la partícula cargada (9.16), (9.17) en el sistema de referencia donde $E' = 0$, $H \neq 0$:

$$\frac{dp'}{dt'} = \frac{e}{c}\mathbf{v}' \times H', \frac{d\mathscr{E}'}{dt'} = 0. \tag{11.3}$$

La última ecuación muestra que en un campo magnético no varía la energía de la partícula y, por lo tanto, tampoco el valor del impulso; el campo no realiza trabajo sobre la partícula, sólo cambia la dirección de su movimiento. Por medio de (5.14), la primera ecuación (11.3) puede ser escrita en la forma

$$\frac{dp'}{dt'} = \vec{\Omega}' \times p', \tag{11.4}$$

donde

$$\vec{\Omega}' = -\frac{ec}{\mathscr{E}'} H' \tag{11.5}$$

es la frecuencia giromagnética ciclotrónica; para las partículas no relativistas $\mathscr{E}' \approx mc^2$ y

$$\vec{\Omega}' = -\frac{eH'}{mc}. \tag{11.6}$$

Elegimos el eje z' en la dirección del campo H y escribimos (11.4) en las proyecciones sobre los ejes de coordenadas:

$$\frac{dp_x'}{dt'} = -\Omega' p_y', \frac{dp_y'}{dt'} = \Omega' p_x', \frac{dp_z'}{dt'} = 0. \tag{11.7}$$

La última ecuación proporciona $p_z' = \text{const}$, es decir, la partícula está en movimiento en dirección del campo H' a velocidad constante $v_z' = v_\parallel'$ determinada por las condiciones iniciales. Es cómodo reducir las dos primeras ecuaciones a la forma

$$\frac{d}{dt'}(p_x' + ip_y') = i\Omega'(p_x' + ip_y'), \tag{11.8}$$

donde i es una unidad imaginaria. Integrando (11.8) hallamos

$$p_x' + ip_y' = Ce^{i\Omega' t'},$$

donde C es la constante compleja de integración. Escribiéndola en la forma $C = p_\perp' e^{i\alpha'}$, siendo $p_\perp' = |C|$. La división de las partes real e imaginaria conduce a

$$p_x' = p_\perp' \cos(\Omega' t' + \alpha'), \quad p_y' = p_\perp' \operatorname{sen}(\Omega' t' + \alpha'). \tag{11.9}$$

De aquí sigue que $p_\perp = \sqrt{p_x'^2 + p_y'^2}$ es el valor absoluto de la proyección del impulso en el plano perpendicular a H', α, la fase inicial de rotación; el impulso de la partícula gira con frecuencia giromagnética (11.5) alrededor de la dirección del campo magnético quedando constante su valor absoluto.

La velocidad de la partícula está ligada con su impulso con la relación (5.13): $\mathbf{v} = c^2\mathbf{p}/\mathcal{E}$. Integrando la velocidad por el tiempo, haciendo uso de (11.9) y de la condición $\mathcal{E}' = \text{const}$, hallamos la dependencia entre las coordenadas y el tiempo:

$$\begin{gathered} x' = R_\perp' \operatorname{sen}(\Omega' t' + \alpha'), \qquad y = -R_\perp' \cos(\Omega' t' + \alpha'), \\ z' = z_0' + v_\parallel' t'. \end{gathered} \tag{11.10}$$

Aquí

$$R_\perp' = \frac{cp_\perp}{eH'} \tag{11.11}$$

es el radio de rotación de la partícula en el plano perpendicular a H' que, además, recibe el nombre de *girorradio* o bien *radio de Larmor* (*larmoriano*). El eje z' se ha elegido de modo que pase por el centro del círculo larmoriano. La partícula se mueve por una espiral enrollada en la superficie de un cilindro de radio $R_\perp'$. El paso de la espiral

$$h = 2\pi v_\parallel'/\Omega',$$

donde $2\pi/\Omega'$ es el período de la rotación ciclotrónica. Con $v_\parallel' = 0$ la partícula está en movimiento por un círculo en el plano perpendicular a la dirección del campo magnético.

11.2. Deriva eléctrica. Ahora examinemos el cuadro del movimiento de la partícula en el sistema de referencia inicial (del laboratorio), en el que ambas intensidades del campo E y H son diferentes de cero. Las coordena-

das de la partícula en este sistema pueden ser expresadas con (11.10) mediante las transformaciones de Lorentz:

$$x = \gamma(x'(t') + V_E t'), \qquad y = y'(t'), z = z'(t'),$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{1}{c^2} V_E x'(t')\right), \ \gamma = (1 - V_E^2/c^2)^{-1/2}. \tag{11.12}$$

Hemos elegido el eje x a lo largo de V_E y el eje y, a lo largo de E. Las fórmulas (11.12) prefijan, en forma paramétrica, el movimiento de la partícula en el sistema inicial (del laboratorio), con la particularidad de que como parámetro hemos hecho uso del tiempo t'. Las constantes $R_\perp'$, $v_\parallel'$, α', z_0' que entran en los segundos miembros de las ecuaciones (11.12) son determinadas de las condiciones iniciales.

Examinemos el importante caso de un débil campo eléctrico $E \ll H$, lo que corresponde a $V_E \ll c$, es decir, al movimiento no relativista relativo de los sistemas de referencia. Calculemos la velocidad v en el sistema del laboratorio hasta una precisión salvo los miembros lineales por V_E/c. Para esta aproximación $\gamma = 1$. Dividiendo las diferenciales dx, dy, dz por $dt = dt' + \frac{1}{c^2} V_E dx'$ obtenemos con la precisión requerida

$$v_x = v_x'(t') + V_E\left(1 + \frac{v_x'^2}{c^2}\right),$$

$$v_y = v_y'(t') - \frac{1}{c^2} V_E v_x'(t') v_y'(t'),$$

$$v_z = v_\parallel' - \frac{1}{c^2} V_E v_\parallel' v_x'(t').$$

Si el movimiento de la partícula en el sistema con raya no es relativista los sumandos del orden v'^2/c^2 pueden ser desechados. Pero siendo $v' \sim c$ éstos no son pequeños.

Como en adelante pensamos promediar la velocidad respecto del tiempo t, escribamos en los sumandos del orden nulo $t' = t - \frac{1}{c^2} V_E x'(t')$; en los términos de primer orden, proporcionales a V_E, podemos hacer $t' = t$. Esto nos proporciona

$$v_x(t) = v_x'(t) + V_E\left[1 - \frac{1}{c^2}\frac{dv_x'(t)}{dt} x'(t) - \frac{1}{c^2} v_x'^2(t)\right],$$

$$v_y(t) = v_y'(t) - \frac{1}{c_2} V_E\left[\frac{dv_v'(t)}{dt} x'(t) + v_y'(t) v_x'(t)\right],$$

$$v_z(t) = v_\parallel' - \frac{1}{c^2} V_E v_\parallel' v_x'(t).$$

Promediemos ahora $\mathbf{v}(t)$ por el período $T = 2\pi/\Omega'$ de rotación de las partículas en torno de la dirección del campo magnético:

$$\bar{v}_x = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} v_x(s)ds, \text{ etc.}$$

Con ayuda de las fórmulas (11.9), (11.10) hallamos

$$\overline{\frac{a_x'(t)}{dt}x'(t)} = -\frac{1}{2}v_\perp'^2, \qquad \overline{v_x'^2(t)} = \frac{1}{2}v_\perp'^2, \text{ etc.},$$

aí que, definitivamente,

$$\bar{v}_x = V_E, \qquad \bar{v}_y = 0; \qquad \bar{v}_z = v_\parallel'$$

obien, en forma vectorial

$$\bar{\mathbf{v}} = v_\parallel' \boldsymbol{h} + V_E, \qquad \boldsymbol{h} = \boldsymbol{H}/H. \tag{11.13}$$

De este modo, el movimiento promediado de la partícula en el sistema del laboratorio se compone del movimiento uniforme a lo largo del campo magnético y del movimiento uniforme a la velocidad (11.1) en la dirección perpendicular a los vectores tanto eléctrico como magnético. Este último movimiento recibe la denominación de *deriva eléctrica*. La velocidad V_E de dicha deriva sólo depende de la razón entre las intensidades de los campos eléctrico y magnético. No depende de la carga y la energía de las partículas y, en particular, es la misma para las partículas relativistas y no relativistas, electrones y núcleos. Esto no significa que las partículas neutrales también sufren deriva eléctrica; el radio larmoriano de una partícula neutral en infinito, por lo que la promediación por la rotación ciclotrónica no tiene sentido.

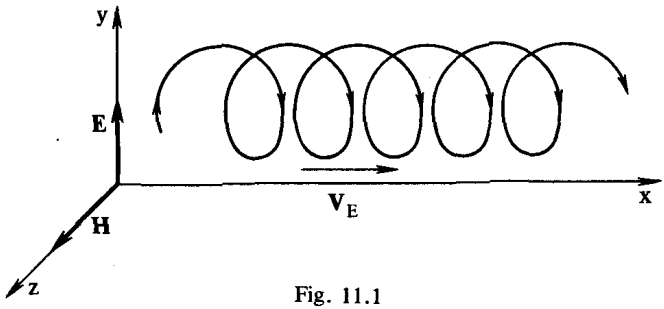

Fig. 11.1

El origen de la deriva eléctrica es fácil de comprender de evidentes consideraciones. La partícula en rotación en torno de $\boldsymbol{H}$ se acelera en el campo eléctrico por la mitad de la circunferencia, mientras que por la segunda mitad se retarda según la fórmula

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}' + \boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{V}_E V_E, \ll c, \mathscr{E}' = \text{const}. \tag{11.14}$$

Por esta razón, el radio larmoriano es distinto en diversas fases de la rotación, lo que conduce al movimiento de las partículas perpendicularmente a E y H (fig. 11.1). La forma detallada de la trayectoria es función de los parámetros del problema.

La deriva transversal puede ser provocada no sólo por el campo eléctrico, sino por cualquier otra fuerza F aplicada perpendicularmente a H, p. ej., la gravitación o el gradiente de presión. A la fuerza F ejercida sobre la partícula puede contraponerse el campo eléctrico eficaz $E_* = F/e$. Sustituyendo su valor en (11.1) hallamos la velocidad de la correspondiente deriva:

$$V_F = c\frac{F \times H}{eH^2}. \tag{11.15}$$

Esta velocidad es función del signo y el valor de la carga. Las partículas con cargas de diferentes signos estarán a la deriva en diferentes direcciones.

11.3. Movimiento hiperbólico. Para $E > H$, $E \cdot H = 0$ hay un sistema de referencia, en movimiento a la velocidad (10.9), en el que

$$H' = 0, \qquad E' = \left(\frac{E^2 - H^2}{E^2}\right)^{1/2}, E \neq 0.$$

En semejante sistema el movimiento de la partícula cargada sólo transcurre por el efecto de la fuerza eléctrica. Estudiemos el proceso de aceleración de una partícula, inicialmente en reposo, mediante un campo eléctrico continuo y homogéneo. Para variar, vamos a resolver este problema partiendo de las ecuaciones de movimiento (9.9) en forma covariante.

Elijamos el eje 1 en la dirección de E. Entonces (9.9) puede reducirse, con ayuda de (9.15), en un sistema de dos ecuaciones de primer orden respecto de $u^1(\tau)$, $u^0(\tau)$:

$$m\frac{du^1}{d\tau} = \frac{e}{c}Eu^0, \qquad m\frac{du^0}{d\tau} = \frac{e}{c}Eu^1. \tag{11.16}$$

Este sistema debe integrarse partiendo de las condiciones iniciales

$$u^0(0) = c, \qquad u^1(0) = 0, \tag{11.17}$$

con la particularidad de que el registro del tiempo propio τ está elegido de forma que

$$\tau = 0 \text{ cuando } t = 0. \tag{11.18}$$

Buscamos la solución del sistema (11.16) en la forma

$$u^1(\tau) = A \operatorname{sh} \lambda\tau, u^0(\tau) = B \operatorname{ch} \lambda\tau, \tag{11.19}$$

donde A, B, λ son constantes. De las condiciones iniciales (11.17) hallamos $B = c$. La sustitución de (11.19) en (11.16) proporciona dos ecuaciones algebraicas para determinar A y λ:

$$m\lambda A = eE, m\lambda c = \frac{e}{c}EA,$$

de donde $\lambda = eE/mc$, $A = c$. Así hemos hallado la 4-velocidad como función del tiempo propio:

$$\frac{dx^1}{d\tau} = u^1(\tau) = c \operatorname{sh} \lambda\tau, \frac{dx^0}{d\tau} = u^0(\tau) = c \operatorname{ch} \lambda\tau. \tag{11.20}$$

La posterior integración permite hallar la ligazón entre $x^1 = x$ y $x^0 = ct$ y el tiempo propio τ:

$$x(\tau) = \frac{c}{\lambda} \operatorname{ch} \lambda\tau, \qquad t = \frac{1}{\lambda} \operatorname{sh} \lambda\tau. \tag{11.21}$$

Hemos elegido las condiciones iniciales de forma que $x(0) = c/\lambda$.

La ligazón entre x y el tiempo t en el sistema del laboratorio es obtenida como resultado de la omisión de τ de las igualdades (11.21) mediante la identidad $\operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha = 1$:

$$\frac{x^2}{(c/\lambda)^2} - \frac{(ct)^2}{(c/\lambda)^2} = 1. \tag{11.22}$$

De esta ecuación se desprende que en el plano (x, ct) la partícula describe una hipérbola (fig. 11.2). En dependencia del signo de la partícula cargada el movimiento transcurrirá por una de sus dos ramas.

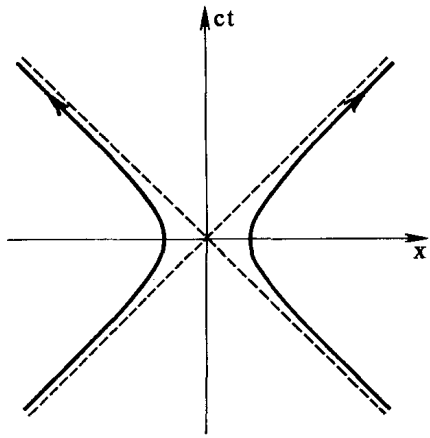

Fig. 11.2

Calculemos, por fin, la energía $\mathscr{E}$ y la velocidad tridimensional v de la partícula. Tenemos

$$\mathscr{E}(\tau) = mcu^0(\tau) = mc^2 \operatorname{ch} \lambda\tau, \tag{11.23}$$

$$v(\tau) = \frac{c^2 m u^1(\tau)}{\mathscr{E}(\tau)} c \operatorname{th} \lambda\tau,$$

o bien, en función del tiempo t

$$\mathscr{E}(t) = mc^2\sqrt{1 + \left(\frac{eEt}{mc}\right)^2}, \quad v(t) = \frac{eE}{m}\frac{t}{\sqrt{1 + \left(\frac{eEt}{mc}\right)^2}}. \tag{11.24}$$

De forma asintótica la velocidad de la partícula se aproxima a c durante un tiempo característico de un orden de varias $t_0 = \frac{mc}{eE}$, mientras que la energía crece con mayores tiempos linealmente al tiempo. Proporcionamos a los lectores la posibilidad de cerciorarse por sí mismos que con $t \ll t_0$ de (11.22), (11.24) son obtenidas conocidas fórmulas para el movimiento uniformemente acelerado de una partícula relativista.

§ 12. Teorema de Larmor

Consideremos un sistema de partículas no relativistas de igual carga, ubicadas en un campo eléctrico externo de simetría axial. ¿Cómo influenciará sobre semejante sistema de partículas un débil campo magnético dirigido a lo largo del eje de simetría?

A esta pregunta da respuesta el *teorema de Larmor*: la superposición de un campo magnético débil conduce a que el sistema de partículas se ponga en rotación como un todo enterizo a una velocidad angular

$$\vec{\Omega}_L = -\frac{eH}{2mc}. \tag{12.1}$$

Este movimiento recibe el nombre de *precesión larmoriana.* La demostración más sencilla del teorema de Larmor puede ser obtenida comparando la función de Lagrange de un sistema de partículas en un campo magnético con ese mismo sistema fuera de éste, pero que se examina respecto de ejes de coordenadas en rotación. Cuando no hay campo magnético la función de Lagrange tiene el aspecto bien conocido en mecánica clásica:

$$L_0 = \sum_a \frac{mv_a^2}{2} - U, \tag{12.2}$$

donde U es la energía potencial total que contiene la energía de interacción de las partículas entre sí y con el campo exterior. Al superponer el campo magnético la función de Lagrange, de acuerdo con (8.6), alquiere la adición $\sum_a \frac{e_a}{c} v_a \cdot A_a$, donde A_a es el potencial vectorial en el punto en que se encuentra la partícula.

Con $H = \text{const}$ resulta cómodo representar A en la forma

$$A = \frac{1}{2} H \times r, \tag{12.3}$$

ya que

$$\text{rot} A = \frac{1}{2} \nabla \times [H \times r] = \frac{1}{2} H(\nabla \cdot r) - \frac{1}{2} (H \cdot \nabla) r = \frac{3}{2} H - \frac{1}{2} H = H.$$

La función de Lagrange de un sistema de partículas en un campo magnético toma el siguiente aspecto:

$$L_H = \sum_a \frac{m v_a^2}{2} + \frac{e}{2c} \sum_a v_a \cdot [H \times r] - U. \tag{12.4}$$

Ahora escribamos la función de Lagrange (12.2) con relación a los ejes que giran a velocidad angular $\vec{\Omega}$ en torno del eje de simetría del campo exterior. Las velocidades de la partícula v_a en el sistema inmóvil y v_a' en el que está en rotación están ligadas mediante la relación

$$v_a = v_a' + \vec{\Omega} \times r_a', \tag{12.5}$$

conocida en la mecánica clásica. Cuando se cumple la condición

$$|\vec{\Omega} \times r_a| \ll v'_a \tag{12.6}$$

es suficiente tomar en consideración en la función de Lagrange sólo los términos lineales por Ω. Sustituyendo (12.5) en (12.2) y omitiendo los sumandos con Ω^2 obtenemos

$$L_\Omega = \sum_a \frac{m v_a'^2}{2} + \sum_a m v_a' \cdot [\Omega \times r_a'] - U. \tag{12.7}$$

Es de importancia que la energía potencial U no varía al pasar a los ejes en rotación

$$U(r_1, \ldots, r_N) = U(r_1', \ldots, r_N').$$

Este hecho está relacionado con que a velocidades de movimiento no relativistas las distancias entre las partículas, así como las distancias ρ_a desde cada partícula hasta el eje de simetría, son iguales en los sistemas de referencia inmóvil y en rotación:

$$|r_a - r_b| = |r_a' - r_b'|, \rho_a = \rho'_a;$$

la energía potencial de un sistema de partículas en interacción en un campo de simetría axial sólo puede depender de las combinaciones de las coordenadas que hemos indicado. Por ello, las funciones de Lagrange L_Ω y L_H son iguales si $\vec{\Omega} = \frac{eH}{2mc}$. Pero esto significa que la conducta de las partículas

también es la misma: el sistema de partículas que observamos en el sistema de referencia del laboratorio adquiere, al sobreponer un campo magnético, la velocidad angular $\Omega_L = -\frac{eH}{2mc}$. El signo menos aparece debido a que las direcciones de rotación de las partículas respecto de los ejes de coordenadas y de los ejes con relación a las partículas son opuestas.

Precisemos el sentido de la condición (12.6). Supongamos que sin el campo magnético las partículas realizan movimiento finito cuasiperiódico como, p. ej., los electrones y átomos. Entonces podemos hacer $v_a' \approx \approx \omega_a r_a'$, donde ω_a es la frecuencia de rotación de la partícula a-ésima. La condición (12.6) se reduce a la desigualdad

$$\omega_a \gg \Omega_L, \tag{12.8}$$

es decir, la frecuencia de la precesión larmoriana debe ser pequeña en comparación con las frecuencias propias de las partículas. Esta condición desempeña notorio papel y si no se cumple, el teorema de Larmor es incorrecto. P. ej., para las partículas libres ($\omega_a \to 0$) la frecuencia de rotación es dos veces mayor que Ω_L (véase (11.6)).

De la demostración del teorema de Larmor que hemos aducido se desprende que él también es válido para tales partículas en las que e_a y m_a son diferentes, si las relaciones e_a/m_a son iguales.

Capítulo III. Ecuaciones del campo electromagnético

§ 13. Deducción de las ecuaciones de Maxwell en forma covariante partiendo del principio de la acción mínima

13.1. Acción para un sistema constituido por partículas y un campo electromagnético. En los caps. I y II hemos empleado el principio de la acción mínima para obtener las ecuaciones de movimiento de una partícula libre y de la partícula en el campo electromagnético. Es natural hacer también uso de ese mismo acceso para deducir las ecuaciones de movimiento del propio campo electromagnético, lo que haremos más abajo. Vamos a considerar que la enunciación general del principio variacional para sistemas continuos es conocida de la mecánica clásica*).

Comencemos por la confección de la acción para un sistema de "partículas cargadas + campo electromagnético". Al compás del acceso general, basado en la noción del campo como una realidad física y reconociendo el hecho de que la interacción entre las partículas sólo transcurre

*) Para aquellos lectores que necesitan refrescar la memoria en lo que atañe a estos datos, ellos se aducen en el Complemento III.

mediante el campo, es de esperar que la acción total S del sistema que consideramos debe constar de tres partes diferentes que proporcionan una clara interpretación física:

$$S = S_{\text{part}} + S_{\text{int}} + S_{\text{campo}}. \tag{13.1}$$

Aquí

$$S_{\text{part}} = -\sum_{a=1}^{N} m_a c \int ds_a \tag{13.2}$$

es la acción para las partículas libres introducida en el § 5; a es el número de la partícula;

$$S_{\text{int}} = -\sum_{a=1}^{N} \frac{e_a}{c} \int A_i(x_a) dx_a^i \tag{13.3}$$

es el término de interacción que ya fue examinado en el § 7 para una partícula en interacción con el campo electromagnético. La anotación de la interacción en forma de la suma de los términos por todas las partículas sigue de la suposición fundamental acerca del carácter local de la interacción, es decir, cada partícula está en interacción con un campo tomado en el mismo punto en el que ella está. Con esto, ya que el movimiento de las partículas es considerado como función del tiempo único t, en un sistema de referencia inercial arbitrario pero concreto, todos los puntos espaciales-temporales $x_a = (x^0, x_a^1, x_a^2, x_a^3)$ deben ser tomados con un mismo valor de la coordenada $x^0 = ct$. En lenguaje geométrico esto significa que los puntos x_a han de tomarse en la hipersuperficie tridimensional $t = \text{const}$ del espacio cuatridimensional seudoeuclidiano. Esto mismo se refiere a la expresión (13.2): todas las diferenciales $ds_a = c\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}\, dt$ deben ser expresadas mediante el tiempo único t.

Examinemos ahora el tercer sumando en (13.1), o sea, la acción que describe el campo electromagnético. Esta debe confeccionarse de magnitudes elegidas para describir el campo electromagnético, es decir, el componente A_i del 4-potencial, pero planteando con ello una serie de limitaciones, que se desprenden tanto de los principios físicos generales, como de la experiencia. Formulemos dichas limitaciones:

1. La magnitud S_{campo} debe ser un invariante relativista, lo que sigue del principio de relatividad.

2. De la experiencia se deduce que en el vacío el campo electromagnético satisface el principio de superposición: si existen varias fuentes del campo electromagnético y la fuente a-ésima, faltando las demás, crea un campo de intensidades $\boldsymbol{E}_a$, $\boldsymbol{H}_a$, el campo completo será la suma geométrica de los campos creados independientemente por cada fuente:

$$\boldsymbol{E} = \sum_a \boldsymbol{E}_a, \qquad \boldsymbol{H} = \sum_a \boldsymbol{H}_a. \tag{13.4}$$

El principio de superposición sólo será cumplido cuando las ecuaciones del campo sean lineales. La linealidad de dichas ecuaciones exige que la acción S_{campo} sea un funcional bilineal de los componenetes del 4-potencial y de sus derivadas.

3. Como las magnitudes observadas son componentes del tensor del campo F_{ik} que no varían en el transcurso de la transformación gradiental de los potenciales (8.14), toda la teoría del campo electromagnético debe ser gradientalmente invariante. Esto quiere decir que todas las ecuaciones para describir tanto el propio campo electromagnético, como también su interacción con las partículas cargadas, pueden ser escritas por medio de magnitudes gradientalmente invariantes, o sea, los componentes de F_{ik}.

4. Con el fin de obtener la concordancia entre la teoría y las leyes experimentales del electromagnetismo, postulamos que las ecuaciones del campo electromagnético deben contener las derivadas del 4-potencial por las coordenadas y el tiempo de un orden no mayor que el segundo. Puesto que durante la variación el orden de las derivadas aumenta en la unidad, la acción debe contener las derivadas del 4-potencial de un orden no mayor que el primero.

Así, pues, las condiciones 3 — 4 requieren que S_{campo} no contenga las componentes A_i, sino que sólo las primeras derivadas en forma de las combinaciones gradientalmente invariantes, es decir, los componentes F_{ik}. De las condiciones 1 — 2 se desprende que ellos deben entrar en forma de expresiones bilineales relativistas invariantes. Tales son los invariantes del campo (10.5) y (10.6). Por eso, la acción S_{campo} puede escribirse en la forma

$$S_{\text{campo}} = a\int F^{ik}F_{ik}d^4x + b\int e^{iklm}F_{ik}F_{lm}d^4x, \qquad (13.5)$$

donde a y b son constantes.

No obstante, la segunda integral es un sumando cuya variación se reduce a cero. Esto sigue de la posibilidad de escribir el integrando en forma de una 4-divergencia:

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = 4\frac{\partial}{\partial x^i}\left(e^{iklm}A_k\frac{\partial}{\partial x^l}A_m\right);$$

más adelante, haciendo uso del teorema de Ostrogradski — Gauss en 4-forma tenemos:

$$\int e^{iklm}F_{ik}F_{lm}d^4x = 4\oint e^{iklm}A_k\frac{\partial}{\partial x^l}A_m dS_i,$$

donde la última integral se toma por una hipersuperficie tridimensional que limita el volumen cuatridimensional de integración. Pero al variar la acción los valores del campo deben ser prefijados en el límite del volumen, por lo tanto

$$\delta\oint e^{iklm}A_k\frac{\partial A_m}{\partial x^l}dS_i = 0.$$

Como resultado en (13.5)*) sólo queda el primer término. Eligiendo $a = -\frac{1}{16\pi c}$ (lo que corresponde al sistema absoluto de Gauss de unidades), tendremos

$$S_{\text{campo}} = -\frac{1}{16\pi c}\int F^{ik}F_{ik}d^4x. \tag{13.6}$$

Esta expresión es relativista y gradiental invariante.

¿Qué decir de la invariancia gradiental de S_{int}? Como en ella entra el propio potencial A_i no hay invariancia gradiental: al cambiar A_i por $A_i' = A_i - \frac{\partial\chi}{\partial x^i}$ tenemos

$$S'_{\text{int}} = S_{\text{int}} + \sum_{a=1}^{N}\frac{e_a}{c}\int\frac{\partial\chi}{\partial x_a^i}dx_a^i. \tag{13.7}$$

Pero $\frac{\partial\chi}{\partial x_a^i}dx_a^i = d\chi(x_a)$, es decir, la diferencial total que al integrar a lo largo de la línea universal de la partícula proporciona una constante (la diferencia de valores de χ en los extremos de la línea universal) que no influye sobre la variación. Por ello, aunque la acción S_{int} no posee invariación gradiental, la variación de la magnitud S_{int} y las ecuaciones de movimiento que obtenemos son gradientalmente invariantes.

13.2. Densidad de corriente cuatridimensional. Los sumandos S_{campo} y S_{int} han sido escritos en diferentes formas: en tanto que el primero de ellos es una integral cuádruple por una región espacial-temporal, S_{int} se expresa en forma de la suma de integrales simples a lo largo de las líneas universales de las partículas. Para deducir las ecuaciones del campo es también preciso representar S_{int} en forma "de campo". Esto se alcanza introduciendo la densidad de la carga $\rho(r, t)$ y la densidad de corriente $j(r, t)$ determinadas en cada punto del espacio cuatridimensional — tiempo.

A causa de que incluso pequeños macrovolúmenes contienen gran número de partículas elementales, lo mismo que en mecánica de medios continuos, podemos introducir la noción de carga continuamente distribuida por el volumen, entendiendo por densidad de la carga en el "punto" dado del espacio la relación

$$\rho = \frac{\Delta e}{\Delta V}, \tag{13.8}$$

donde ΔV es un volumen macroscópicamente pequeño, Δe, la carga eléctrica total en dicho volumen. Por volumen "macroscópicamente pequeño" o

*) La segunda causa por la que el segundo sumando en (13.5) no debería ser incluido en la acción está relacionada con su carácter seudoescalar. Por esta causa, las ecuaciones del campo tendrían diferente aspecto en los sistemas de coordenadas derecho e izquierdo, lo que contradice la experiencia (algunos sumandos tendrían diversos signos en los indicados sistemas).

bien "físicamente infinitésimo" se entiende aquel que contiene gran cantidad de cargas elementales, pero cuya dimensión lineal es pequeña en comparación con las distancias que en el problema a examinar son de interés. En virtud de la estructura discreta de la carga eléctrica en la expresión (13.8) el paso al límite $\Delta V \to 0$ no tiene sentido. Para semejante determinación de la densidad de la carga, la posición del "punto" donde esa densidad se prefija está determinada con una precisión hasta las dimensiones del volumen ΔV.

La densidad de la carga también puede ser determinada por la función de distribución en el espacio de fase introducida en el § 6:

$$\rho(r, t) = e\int f(r, p, t)d^3p, \tag{13.9}$$

donde e es la carga de una partícula aislada. Con el fin de que (13.8) y (13.9) sean equivalentes, la función de distribución $f(r, p, t)$ debe ser en suficiente grado "de gruesos granos", o sea, describir la distribución de las partículas en volúmenes macroscópicamente pequeños.

Al haber en el sistema varias clases de partículas, se introduce la función de distribución $f_a(r, p, t)$ para las partículas de cada clase. En este caso, la fórmula (13.9) se generaliza de la siguiente forma:

$$\rho(r, t) = \sum_a e_a \int f_a(r, p, t)d^3p, \tag{13.9a}$$

donde la suma se realiza por todas las clases de partículas.

Pero la noción de densidad volumétrica de la carga no debe estar ligada obligatoriamente con el valor promediado; también puede ser introducida para describir cargas "puntuales", es decir, objetos cargados de pequeño tamaño (en particular, las partículas elementales). Para ello se hace uso de la función delta de Dirac (Complemento IV). La carga puntual e_a que yace en un punto con radio vector $r_a(t)$ crea una densidad volumétrica de la carga

$$\rho_a(r, t) = e_a\delta(r - r_a(t)). \tag{13.10}$$

De modo análogo podemos escribir la densidad volumétrica de un sistema de cargas puntuales:

$$\rho(r, t) = \sum_a e_a\delta(r - r_a(t)), \tag{13.11}$$

donde la suma se toma por todas las cargas.

Puesto que las partículas cargadas están en continuo movimiento, hablando en general, con él está ligado el transporte de la carga eléctrica. El fenómeno de transporte de la carga recibe el nombre de *corriente eléctrica*. Su característica cuantitativa puede ser introducida como un vector que en cada punto determina la dirección de la velocidad y la cantidad de la carga que se transporta:

$$j(r, t) = \rho\mathbf{v}, \tag{13.12}$$

donde ρ es la densidad volumétrica de la carga y $\mathbf{v}(r, t)$, la velocidad media

de las cargas en el volumen ΔV. El vector j es llamado *densidad volumétrica de corriente* que se puede expresar por la función de distribución $f(r, p, t)$ del modo siguiente:

$$j(r,t) = e\int \mathbf{v} f(r,p,t) d^3p. \tag{13.13}$$

Al haber partículas de distinta clase, en lugar de (13.13), tendremos

$$j(r,t) = \sum_a e_a \int \mathbf{v} f_a(r,p,t) d^3p. \tag{13.13a}$$

Por fin, si tratamos un sistema de cargas puntuales y no efectuamos la mediación por volúmenes macroscópicamente pequeños, entonces

$$j(r,t) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a \delta(r - r_a(t)). \tag{13.14}$$

Esta última fórmula se obtiene de (13.11) y (13.12) si tomamos en consideración que las cargas yacen en puntos discretos, con la particularidad de que la velocidad $\mathbf{v}$ en cada punto coincide con la velocidad de la carga.

Escribamos ahora S_{int} por medio de las magnitudes ρ y j. Tenemos

$$S_{\text{int}} = -\sum_a \frac{e_a}{c}\int A_i(x_a) dx_a^i = -\sum_a \frac{e_a}{c}\int \frac{dx_a^i}{dt} A_i(r_a, t) dt,$$

donde hemos introducido el tiempo único t para todas las partículas. Más adelante

$$S_{\text{int}} = +\sum_a \frac{e_a}{c}\int \mathbf{v}_a(t) A(r_a, t) \frac{dx^0}{c} - \sum_a \frac{e_a}{c}\int c\varphi(r_a, t) \frac{dx^0}{c} =$$

$$= \frac{1}{c^2}\int \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \delta(r - r_a) A(r, t) d^4x - \frac{1}{c^2}\int \sum_a c e_a \delta(r - r_a) \varphi(r, t) d^4x,$$

donde en la segunda igualdad pasamos a la integración por el 4-volumen introduciendo la función delta. De la última igualdad vemos que si introducimos la magnitud de cuatro componentes

$$j^i = (c, \rho, j) = \sum_a e_a \mu_a^i \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}\, \delta(r - r_a(t)), \tag{13.15}$$

donde ρ y j se dan en las fórmulas (13.11), (13.14), entonces

$$S_{\text{int}} = -\frac{1}{c^2}\int j^i(x) A_i(x) d^4x. \tag{13.16}$$

Como S_{int} es invariante y d^4x también lo es (véase el § 2), j^i es el vector cuatridimensional de la densidad de corriente. Sus componentes se trans-

forman como la coordenada y el tiempo al pasar a otro sistema inercial, es decir,

$$j_x' = \gamma(j_x - \rho V), \quad j_y' = j_y, \quad j_z' = j_z, \quad c\rho' = \gamma\left(c\rho - \frac{V}{c} j_x\right). \quad (13.17)$$

Mediante estas mismas fórmulas se determina la ley de transformación de la concentración n y la densidad del flujo $n\mathbf{v}$ de las partículas, magnitudes que se diferencian de ρ y $\mathbf{j}$ por el factor invariante e. Las igualdades (13.15) proporcionan la relación entre la densidad de la 4-corriente y la 4-velocidad de las partículas cargadas. Como j^i y u_a^i son 4-vectores y e_a, escalares, el producto $\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$ lo mismo que la suma de tales productos deben ser obligatoriamente un invariante relativista. Esta indicación será utilizada en el § 16 al construir el tensor energía — impulso.

Veamos qué propiedad debe poseer la 4-corriente j^i para que la teoría conserve la invariancia gradiental. Transformando el 4-potencial de acuerdo con (8.16), donde χ es una función escalar diferenciable tendremos

$$S'_{\text{int}} = S_{\text{int}} + \frac{1}{c^2}\int j^i(x)\,\frac{\partial \chi}{\partial x^i}\,d^4x.$$

Seguidamente, transformemos el integrando por medio de la identidad

$$j^i\,\frac{\partial \chi}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}(j^i\chi) - \chi\,\frac{\partial j^i}{\partial x^i}.$$

El primer término en el segundo miembro es una 4-divergencia que durante la integración se reduce a la integral por la hipersuperficie tridimensional que abarca el 4-volumen:

$$S'_{\text{int}} = S_{\text{int}} + \frac{1}{c^2}\oint (j^i\chi)\,dS_i - \frac{1}{c^2}\int \chi\,\frac{\partial j^i}{\partial x^i}\,d^4x.$$

Aquí dS_i es la proyección de un elemento de la hipersuperficie sobre el eje i. Como en el límite del 4-volumen todas las magnitudes están prefijadas, la variación del segundo término se reduce a cero. La última integral, si se diferencia de cero, proporciona una variación no nula, lo que convierte la teoría en invariante gradiental. Para que ella se reduzca a cero con la función χ y el volumen de integración arbitrarios, es precisa la reducción a cero de la 4-divergencia de la densidad de corriente

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0, \quad (13.18)$$

o bien en forma tridimensional

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0 \quad (13.19)$$

(ecuación de continuidad).

Las igualdades (13.18) y (13.19) expresan una de las más importantes leyes de electrodinámica: la ley de la conservación de la carga. Con el fin de cerciorarnos de esto, integremos (13.19) por un volumen arbitrario tridimensional V y hagamos uso del teorema de Ostrogradski — Gauss. Obtenemos la igualdad

$$-\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)}\rho d^3x = \oint\limits_{(S)} j\cdot dS \tag{13.20}$$

que muestra que la variación de la carga en el volumen V sólo puede transcurrir a cuenta de su flujo por el límite del volumen. Si éste abarca todo el espacio y en la infinidad la densidad de corriente eléctrica es igual a cero, entonces

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \qquad Q = \text{const}, \tag{13.21}$$

donde $Q = \int \rho\, dV$ es la carga total del sistema.

En calidad de ejercicio recomendamos a los lectores que se cercioren por medio de sustitución directa que ρ y j determinadas con las igualdades (13.11) y (13.14), satisfacen la ecuación de continuidad (13.19).

Señalemos que no sería correcto considerar (13.18) y (13.19) como el corolario de la invariancia gradiental de S_{int}. Estas relaciones expresan en forma diferencial una de las leyes fundamentales de la naturaleza, la de la conservación de la carga eléctrica. Debe considerarse como una ley experimental confirmada hoy día por todos los fenómenos físicos tanto macroscópicos, como microscópicos. Precisamente la conservación de la carga eléctrica hace que la magnitud S_{int} sea gradientalmente invariante.

13.3. Ecuaciones de Maxwell. Ahora ya disponemos de todo lo necesario para deducir las ecuaciones de Maxwell. Hagamos uso del principio variacional: la evolución del campo en el espacio y el tiempo (para su valor prefijado en el límite de una región cuatridimensional) transcurre de forma que su acción queda estacionaria, es decir, su primera variación se reduce a cero.

Con el fin de obtener las ecuaciones del campo hay que variar el 4-potencial, considerando prefijado el movimiento de las partículas cargadas (la magnitud j^i). Esto permite escribir la acción en la forma

$$S = -\int\left(\frac{1}{16\pi c}F^{ik}F_{ik} + \frac{1}{c^2}j^iA_i\right)d^4x, \tag{13.22}$$

omitiendo el sumando S_{part} que no depende del 4-potencial, sino que sólo de las coordenadas de las partículas. Recordemos que al deducir las ecuaciones de movimiento de las partículas (en los §§ 8, 9) variábamos, a la inversa, las coordenadas de éstas con A_i prefijado.

Al calcular las variaciones de δS hagamos uso de la posible conmutación de las operaciones de integración y variación, así como de las relaciones

$$\delta(F^{ik}F_{ik}) = F^{ik}\delta F_{ik} + F_{ik}\delta F^{ik} = 2F^{ik}\delta F_{ik}$$

y

$$\delta F_{ik} = \delta \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \delta \frac{\partial A_i}{\partial x^k}.$$

Cambiando en el primer término los índices obtenemos

$$\delta(F^{ik}F_{ik}) = -4F^{ik}\delta \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$$

después de lo cual escribimos la variación de la acción en la forma

$$\delta S = \int \left(\frac{1}{4\pi c} F^{ik}\delta \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{1}{c^2} j^i \delta A_i \right) d^4x. \tag{13.23}$$

A continuación, cambiamos de lugar la diferenciación y la variación

$$\delta \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i$$

y transformamos el integrando

$$F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i = \frac{\partial}{\partial x^k} (F^{ik}\delta A_i) - \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \delta A_i.$$

La integral de la divergencia (primer sumando) se transforma en una integral por la superficie que limita el 4-volumen de integración y que para la variación se reduce a cero, ya que debemos considerar que el campo está prefijado en el límite de la región de integración.

Como resultado la variación de la acción adquiere el aspecto

$$\delta S = -\int \left(\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} + \frac{1}{c^2} j^i \right) \delta A_i d^4x. \tag{13.24}$$

Con δA_i arbitrario la igualdad $\delta S = 0$ sólo se realizará si

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i. \tag{13.25}$$

Esta es una de las ecuaciones *) de Maxwell escrita en forma covariante, o sea, con el aspecto de la igualdad de dos 4-vectores. La propia forma de

---

*) Al realizar la anotación de la igualdad (13.25) en proyecciones obtenemos 4 ecuaciones ($j = 0, 1, 2, 3$).

anotación de la ecuación nos indica que tiene igual aspecto en todos los sistemas inerciales, aunque los valores tanto del primer miembro como del segundo, en general, son diferentes en distintos sistemas.

La ecuación (13.25) enlaza el tensor del campo F^{ik} con las fuentes j^i que son partículas cargadas en movimiento. Una ecuación más puede ser obtenida haciendo uso de la definición (9.6) de F_{ik} por medio del 4-potencial. Confeccionemos un tensor de III rango

$$R_{ikl} = \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}, \tag{13.26}$$

cuyos sumandos segundo y tercero son obtenidos del primero por medio de la permutación cíclica de índices. Sustituyendo (13.26) en lugar de F_{ik} sus expresiones (9.6) mediante las derivadas del 4-potencial por las coordenadas tendremos

$$R_{ikl} = \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^l \partial x^i} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^l \partial x^k} + \frac{\partial^2 A_l}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^i \partial x^l} + \\ + \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 A_l}{\partial x^k \partial x^i} = 0$$

ya que las derivadas mixtas no dependen del orden de la derivación. Como resultado obtenemos la ecuación de la forma

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0 \tag{13.27}$$

que es la segunda ecuación de Maxwell escrita, como (13.25), en forma covariante. Al coincidir cualquier par de índices (teniendo en cuenta la antisimetría $F_{ik} = -F_{ki}$) el primer miembro de la ecuación (13.27) se reduce a cero de manera idéntica. Por esto, las relaciones diferenciales no triviales entre los componentes F_{ik} sólo son obtenidas de (13.27) en los casos $i \neq k \neq l$. Semejantes combinaciones sólo hay cuatro, la ecuación (13.27) proporciona cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden para los componentes del campo electromagnético. Las ecuaciones (13.25) y (13.27) forman el sistema completo de ecuaciones de Maxwell que describen el campo electromagnético de cargas en movimiento en el vacío.

§ 14. Forma tridimensional de las ecuaciones de Maxwell y su ligazón con las leyes experimentales de electromagnetismo

14.1. Ecuaciones de Maxwell en forma tridimensional. Para fines prácticos es cómoda la forma tridimensional de anotación de las ecuaciones de Maxwell por medio de los vectores de intensidad $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$. Es fácil de obtenerla de las igualdades (13.25) y (13.27) mediante las tablas (9.15). P. ej., hacien-

do en la ecuación (13.27) $i = 0, k = 1, l = 2$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0$$

o bien

$$\mathrm{rot}_z \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}.$$

Otras combinaciones de los índices 0, 1, 2 ofrecen dos proyecciones más de esta igualdad, que toma la forma definitiva

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}. \tag{14.1}$$

Si $i = 1, k = 2, l = 3$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{H} = 0. \tag{14.2}$$

Si $i = 0$ de la ecuación (13.25) se desprende

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \tag{14.3}$$

si $i = 1, 2, 3$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{14.4}$$

Así, pues, en la anotación tridimensional obtuvimos cuatro ecuaciones de Maxwell: dos vectoriales y dos escalares.

Señalemos ciertas propiedades características de este sistema de ecuaciones. Todas las ecuaciones son lineales, lo que permite, como vimos en el § 13, satisfacer el principio de superposición de los campos en el vacío. Si el campo electromagnético es alternativo con el tiempo, es decir $\partial \boldsymbol{E}/\partial t \neq 0$ o bien $\partial \boldsymbol{H}/\partial t \neq 0$, los dos vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ son simultáneamente distintos de cero. El campo electromagnético existe como un todo único y se describe con dos intensidades. En el caso de campos continuos el sistema se divide en dos pares de ecuaciones:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = 0, \mathrm{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho \tag{14.5}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \mathrm{div}\boldsymbol{H} = 0, \tag{14.6}$$

es decir, los campos eléctrico y magnético continuos pueden existir independientemente.

La densidad de la carga $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ y la densidad de corriente $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$ desempeñan el palel de fuentes del campo electromagnético. Pero una importantísima propiedad del sistema de ecuaciones de Maxwell consiste

en la posibilidad de existir el campo incluso al no haber fuentes. Para $\rho = j = 0$ las ecuaciones toman el aspecto

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0. \tag{14.7}$$

Este sistema tiene soluciones no iguales a cero dependientes de las coordenadas y el tiempo que serán estudiadas con detalle en el cap. VI. Este es un testimonio más de la realidad física del campo electromagnético, de su equivalencia con otras formas de materia.

14.2. Forma integral de las ecuaciones de Maxwell. En el p. 14.1 ya hemos señalado la ligazón de las ecuaciones de Maxwell con el principio de superposición de los campos. Ahora nos hemos de cerciorar que otras leyes experimentales de los fenómenos eléctricos y magnéticos también pueden ser deducidas del sistema (14.1) — (14.4). Comencemos por la ley de la conservación de la carga eléctrica.

Aplicando a ambos miembros de (14.4) la operación div tendremos

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \boldsymbol{E} + 4\pi \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0, \tag{14.8}$$

ya que $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \equiv 0$ es idéntico para cualquier $\boldsymbol{H}$. Sustituyendo en (14.8) $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho$ obtenemos la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \tag{14.9}$$

La ligazón entre la última ecuación y la ley de la conservación de la carga total del sistema $Q = \int \rho dV$ ya fue examinada en el p. 13.2.

Para el posterior análisis es cómodo escribir las ecuaciones de Maxwell en forma integral. Integremos los dos miembros de (14.3) por el volumen V, tomado al azar y hagamos uso del teorema de Ostrogradski — Gauss

$$\int_{(V)} \operatorname{div} \boldsymbol{E}\, dV = \oint_{(S)} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S},$$

donde S es una superficie cerrada que abarca el volumen V. Esto nos proporciona la forma integral de la ecuación (14.3):

$$\oint_{(S)} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi \int_{(V)} \rho dV. \tag{14.10}$$

No vamos a detenernos en la utilización de esta ecuación para calcular los campos de las distribuciones de la carga de simetría simple, ya que estas cuestiones deben ser bien conocidas por el lector del curso escolar de física. Sólo vamos a recordar que con una carga puntual inmóvil e de (14.10) sigue

la ley de Coulomb en la forma

$$E = \frac{e}{r^2}\frac{r}{r}, \tag{14.11}$$

donde r es el radio vector trazado desde el punto donde se encuentra la carga hasta el punto de observación.

La forma integral de la ecuación (14.2) es obtenida de (14.10) sustituyendo $E \to H$, $\rho \to 0$ y toma el aspecto

$$\oint_{(S)} H \cdot dS = 0, \tag{14.12}$$

o sea, el flujo de la intensidad del campo magnético por cualquier superficie cerrada es igual a cero. De la comparación de (14.12) y (14.10) sigue que en la naturaleza no hay cargas magnéticas análogas a las eléctricas. La carencia de éstas conduce a las ecuaciones no simétricas de Maxwell: en tanto que en las ecuaciones (14.3) y (14.4) para $\mathrm{div}E$ y $\mathrm{rot}H$ entran las densidades de la carga y la corriente eléctrica, en las ecuaciones (14.1) y (14.2) para $\mathrm{rot}E$ y $\mathrm{div}H$ las densidades de las cargas "magnéticas" y de sus corrientes no figuran. Esta falta de simetría incitó a P. Dirac a proponer en 1931 la hipótesis sobre la posibilidad de la existencia de cargas magnéticas elementales (el monopolo magnético de Dirac). Pero los múltiples intentos de descubrir los monopolos magnéticos por vía experimental hasta la fecha no han tenido éxito*). Por ello, no hay fundamentos para incluir, en la actualidad, en las ecuaciones de Maxwell las cargas "magnéticas".

La forma integral de la ecuación (14.1) se alcanza integrando los dos miembros por cierta superficie no cerrada S, haciendo uso de la teoría de Stokes:

$$\oint_{(S)} \mathrm{rot}E \cdot dS = \oint_{(l)} E \cdot dl,$$

donde l es un contorno cerrado sobre el que se apoya la superficie S. Después de la integración la expresión (14.1) toma el aspecto

$$\oint_{(l)} E \cdot dl = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\oint_{(S)} H \cdot dS. \tag{14.13}$$

En el segundo miembro de la igualdad entra la velocidad de variación del flujo magnético $\Phi = \int_{(S)} H \cdot dS$ que pasa por el contorno cerrado. La integral en el primer miembro $\mathscr{E} = \oint E \cdot dl$ recibe el nombre de *fuerza electro-*

*) Una exposición más detallada del problema de monopolo magnético, así como indicación de las correspondientes obras, pueden ser halladas en el libro de S.V. Vonsovski [31].

motriz (f.e.m.). De este modo, (14.13) puede ser escrita en la forma

$$\mathscr{E}_{\text{ind}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \tag{14.14}$$

donde la abreviatura "ind" indica la naturaleza de la f.e.m., es decir, la fuerza electromotriz de inducción provocada por la variación del flujo magnético. La igualdad (14.14) expresa la ley de *la inducción electromagnética* establecida por Faraday: en un conductor cerrado ubicado en un campo magnético alternativo surge una corriente proporcional a la velocidad de variación del flujo magnético que pasa por el conductor. La corriente proporcionada se debe al campo eléctrico que crea el movimiento dirigido de las cargas en el conductor. Basándonos en el carácter objetivo de los fenómenos de la naturaleza, debemos suponer que al variar el campo magnético en la región del espacio dada, en ella surge un campo eléctrico inducido independientemente de la presencia de un conductor en el que el campo puede provocar el surgimiento de la corriente. Así, pues, la ecuación de Maxwell (14.1) puede ser considerada como la forma diferencial de la ley de inducción electromagnética de Faraday.

Analicemos ahora el sentido de la ecuación (14.4). De la estructura de su segundo miembro se deduce que en la naturaleza existen dos géneros de fuentes del campo magnético: las corrientes eléctricas creadas por las partículas cargadas y la variación con el tiempo de la intensidad del campo eléctrico. El sumando $\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$ fue introducido por Maxwell en la ecuación del campo electromagnético y recibe la denominación de *corriente de desplazamiento*. Aunque es distinto el origen físico de la corriente de las partículas cargadas y de la corriente de desplazamiento, ellas desempeñan un papel equivalente como fuentes del campo magnético.

Para $\partial E/\partial t = 0$ la ecuación (14.4), junto con la (14.2), determina el campo magnético creado por corrientes estacionarias. La integración de este sistema de ecuaciones permite llegar a la ley de Biot — Savart, es decir, a la expresión para la intensidad del campo magnético creado por un pequeño segmento de un conductor con corriente. Esta deducción será aducida en el cap. V.

La forma integral de la ecuación (14.4) se obtiene del mismo modo que para (14.1). Ella tiene el aspecto

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c}\int_{(S)} \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{(S)} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}, \tag{14.15}$$

donde l es un contorno cerrado arbitrario que limita la superficie S.

Desde el punto de vista formal, la ecuación (14.2) puede considerarse como una condición inicial universal (o sea, igual para todos los proble-

mas) para la ecuación (14.1). En realidad, tomando la divergencia de los dos miembros de la ecuación (14.1) hallamos

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0,$$

de donde $\operatorname{div} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \operatorname{div} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t_0)$. Si $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$ para $t = t_0$, la ecuación (14.1) asegura el cumplimiento de esta igualdad en todos los momentos de tiempo.

De forma análoga podemos considerar que la ecuación (14.3) es condición inicial universal para las ecuaciones (14.4) y (14.9): de ellas se desprende la independencia de la diferencia $\operatorname{div} \boldsymbol{E} - 4\pi\rho$ del tiempo. Su anulación en el momento inicial $t = t_0$ lleva al cumplimiento de la ecuación (14.3) para todo tiempo.

Los problemos electrodinámicos pueden ser planteados de distintas maneras. El caso más sencillo es aquél en el que es posible considerar las magnitudes ρ y $\boldsymbol{j}$ prefijadas, es decir, la distribución de las cargas y corrientes en el espacio y el tiempo son conocidas de antemano. Claro está que al mismo tiempo debe realizarse la ecuación de continuidad (14.9). El problema se reduce a la integración de un sistema de ecuaciones lineales (14.1) y (14.4) con las condiciones iniciales (14.2) y (14.3).

No obstante, por regla, semejante planteamiento del problema es aproximado y no siempre posible. Con mucha frecuencia el movimiento de las partículas cargadas es de antemato desconocido.

Las ecuaciones de Maxwell (14.1) — (14.4) han de completarse con ecuaciones de movimiento de las partículas (9.6) y resolverse en conjunto. Debido a que en el caso general las coordenadas y la velocidad de las partículas serán complicados funcionales de las intensidades del campo, el sistema de ecuaciones se convertirá en no lineal. Tal planteamiento del problema, siendo de mayor precisión, también resulta mucho más complicado.

14.3. Sistemas de unidades de medición de las magnitudes eléctricas y magnéticas. Hasta el momento hemos hecho uso del sistema absoluto (de Gauss) de unidades. Es el más cómodo para las investigaciones físicas, puesto que en las ecuaciones de Maxwell entra de manera explícita como coeficiente la constante fundamental c, o sea, la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío, coincidente con la velocidad límite de propagación de las interacciones. Este hecho facilita el establecimiento de la ligazón de la teoría del campo electromagnético con la teoría especial de la relatividad y la comprobación de covariación relativista de las ecuaciones de Maxwell.

Pero en el transcurso de los últimos años para fines prácticos (en lo fundamental relacionados con las necesidades de electrotecnia y otras tecnologías) con creciente amplitud se introduce el llamado Sistema Internacional de Unidades (SI). Aquí no vamos a exponer con detalle las cues-

tiones ligadas con los sistemas de unidades, ya que consideramos que éstos son conocidos del curso de física general (p. ej., el § 85 del manual de D. V. Sivujin [82] (en ruso) y sólo nos limitaremos a la anotación de las relaciones fundamentales del sistema SI. En el indicado sistema de unidades el campo magnético en el vacío se describe con cuatro vectores $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$. Las ecuaciones de Maxwell en el sistema SI se comparan con esas mismas ecuaciones en el de Gauss, escritas junto a las primeras:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, & \operatorname{rot}\boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{D} &= \rho, & \operatorname{div}\boldsymbol{E} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{B} &= 0, & \operatorname{div}\boldsymbol{H} &= 0. \end{aligned} \tag{14.16}$$

Los vectores $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}$ están ligados a pares con las siguientes relaciones

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}, \tag{14.17}$$

donde

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2}\ F/\mathrm{m} \text{ y } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H/m} \tag{14.18}$$

son las constantes eléctrica y magnética. Estas magnitudes que surgen en el SI no tienen por separado ningún sentido físico razonable; sólo su combinación $(\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = c$ representa la velocidad de propagación de las perturbaciones electromagnéticas.

Por su aspecto exterior, las ecuaciones de Maxwell en el SI ((14.16) columna izquierda) parecen ser más sencillas que en el sistema de Gauss (columna derecha). Debido a esto, el lector puede imaginarse que el empleo del SI puede simplificar la anotación de las fórmulas. Pero esto no es así. Además de la carencia en él de la constante fundamental c, lo que ya hemos indicado, y en su lugar, la presencia en ellas de "las permeabilidades eléctrica y magnética del vacío" ε_0 y μ_0, magnitudes sin sentido físico alguno y que pasaron a la teoría del electromagnetismo de los tiempos del "éter portaluz". Además, el SI tiene una serie más de insuficiencias de principio. Indiquemos algunas de ellas.

1. Al no haber materia, el campo electromagnético se describe con cuatro diferentes vectores, en tanto que, en realidad, sólo hay dos, los que se emplean en el sistema de Gauss, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$.

2. Los cuatro vectores $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}$ tienen diferente dimensión, por lo que, con frecuencia, es necesaria la operación de comparación del valor de las intensidades del campo que con facilidad se verifica en el sistema gaussiano ($\boldsymbol{E} > \boldsymbol{H}, \boldsymbol{E} < \boldsymbol{H}$) y requiere en el SI hacer uso de los coeficientes adicionales ε_0, μ_0. Esto es tan absurdo para un campo electromagnético único, como la medición de la largura, anchura y altura de cierto objeto con magnitudes de diferentes dimensiones.

3. Además de las tres magnitudes fundamentales — longitud, tiempo y masa — del sistema de Gauss, en el SI se introduce una cuarta magnitud con dimensión independiente. Como tal han elegido la intensidad de la corriente en amperios, cosa hecha por razonamientos puramente prácticos.

Las indicadas insuficiencias de principio dificultan el empleo del SI para la enunciación de las leyes fundamentales de la teoría del campo electromagnético. Pero para la solución de problemas prácticos, de ingeniería, el SI resulta ser suficientemente cómodo y para ellos su utilización se justifica plenamente. La conversión de las ecuaciones y unidades de medición fundamentales de un sistema a otro puede realizarse sin dificultades con las tablas aducidas en el Complemento V.

§ 15. Condiciones de frontera para los vectores del campo electromagnético

Examinemos las superficies en las que las magnitudes ρ y j tienen ciertas singularidades (o sea, sufren saltos o se reducen a la infinidad). Claro está, que semejantes superficies especiales sólo pueden ser creadas por medios materiales (conductores, dieléctricos, cuerpos imantados); su estudio será realizado en la segunda parte del libro. Pero vamos a estudiarlas ya en la presente parte, dedicada fundamentalmente a la electrodinámica microscópica, con el fin de ampliar el círculo de problemas para los ejercicios prácticos. En las superficies especiales, hablando en general, las ecuaciones diferenciales de Maxwell no son aplicables, ya que las derivadas de E y H en semejantes superficies pueden perder su sentido. Por esto, las ecuaciones diferenciales se sustituyen por ciertas condiciones de juntura de los componentes del campo que se deducen de la forma integral de las ecuaciones de Maxwell.

15.1. Condiciones para los componentes normales. Comencemos la consideración por las ecuaciones (14.10):

$$\oint\limits_{(S)} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi \int\limits_{(V)} \rho dV. \tag{15.1}$$

Elijamos el volumen V en forma de un cilindro de pequeño radio y altura h, cuyas bases son paralelas a la superficie especial Σ a considerar (fig. 15.1). Representemos el primer miembro de la ecuación (15.1) aproximadamente en la forma

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} \approx E_{n2} \Delta S + E_{n1} \Delta S + N_{\text{lat}}, \tag{15.2}$$

donde ΔS es el área de la base del cilindro, N_{lat}, el flujo del vector E por su superficie lateral. A continuación, es evidente que

$$E_{n2} = E_{2n}, \qquad E_{n1} = -E_{1n},$$

donde con E_1 y E_2 se han designado los valores del vector E por los dos lados de la superficie especial. La normal n está dirigida de la región (1) a la (2).

Haciendo uso del teorema del valor medio, el segundo miembro de la igualdad (15.1) se representa en la forma

$$\int_{(V)} \rho dV \approx \rho h \Delta S. \tag{15.3}$$

En total, hallamos

$$(E_{2n} - E_{1n})\Delta S + N_{\text{lat}} \approx 4\pi\rho h \Delta S. \tag{15.4}$$

Pasemos en esta igualdad al límite $h \to 0$ de forma que las bases del cilindro coincidan con la superficie $\sum$. Como en tal caso la superficie lateral del cilindro tiende a cero y el campo E queda limitado*), $N_{\text{lat}} \to 0$ con $h \to 0$. Designemos

$$\lim_{h \to 0} \rho h = \sigma. \tag{15.5}$$

La magnitud σ recibe el nombre de densidad superficial de la carga. Es distinta de cero si la densidad ordinaria ρ tiene singularidad en $\sum$, así que en

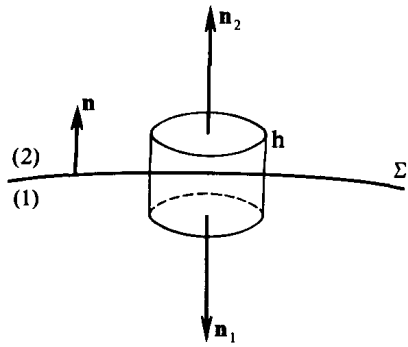

Fig. 15.1

una fina capa superficial se encuentra una carga finita. De forma que si en todo lugar ρ está limitada, aunque sufra un salto, $\sigma = 0$. En definitiva, para los componentes de E la condición de frontera toma el aspecto

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma. \tag{15.6}$$

Esta condición es justa para cualquier superficie. En una superficie regular $\sigma = 0$ y E_n es una magnitud continua. En una superficie cargada E_n sufre un salto.

Toda la deducción aducida conserva también plenamente su sentido para la ecuación (14.12). Pero como el segundo miembro de (14.12) es en todo lugar igual a cero, el componente normal del vector H es continuo en toda superficie:

$$H_{2n} - H_{1n} = 0. \tag{15.7}$$

*) La intensidad E se reduce a la infinidad sólo al haber cargas puntuales (véase la fórmula (14.11)) e hilos cargados. Estos dos casos son omitidos en nuestros razonamientos.

15.2. Condiciones para los componentes tangenciales. Partimos de la ecuación (14.15):

$$\oint_{(l)} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c}\int_{(S)} \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} + \frac{1}{c}\int_{(S)} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}. \tag{15.8}$$

Elegimos el contorno cerrado l en forma de un pequeño rectángulo, cuyo plano es perpendicular a la superficie $\sum$ (fig. 15.2). Los vectores $\boldsymbol{n}\,\vec{\tau}, \vec{\nu}$ forman un trío de versores perpendiculares entre sí. Tenemos

$$\oint_{(l)} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = (H_{2\tau} - H_{1\tau})a + C_h \tag{15.9}$$

donde C_h es una integral por los sectores laterales del contorno. Seguidamente

$$\int_{(S)} \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} \approx j_\nu a h. \tag{15.10}$$

Con $h \to 0$ la magnitud C se anula a causa de la acotación del campo $\boldsymbol{H}$ (suponemos la carencia de contornos lineales con corriente en la superficie

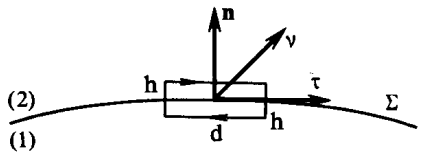

Fig. 15.2

$\sum$). La integral $\int \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$ también se anula, ya que $S \to 0$ y la derivada $\partial E/\partial t$ está acotada*). Por fin, la magnitud

$$\lim_{h\to 0} j_\nu \cdot h = i_\nu \tag{15.11}$$

es la proyección de la *corriente superficial* sobre la dirección $\vec{\nu}$. El vector $\boldsymbol{i}$ yace en el plano tangente a la superficie $\sum$ y es distinto de cero si la corriente de intensidad finita fluye por una fina capa superficial. Como resultado, de las fórmulas (15.8) — (15.11) tendremos:

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_\nu. \tag{15.12}$$

La última condición también se escribe con facilidad en forma vectorial:

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}. \tag{15.13}$$

*) Es evidente, que la velocidad y la variación de cualquier magnitud física es finita.

De modo análogo, de la ecuación (14.13) se deduce la condición de frontera para los componentes tangenciales del vector E. Debido a la acotación de la magnitud $\partial H/\partial t$, en el segundo miembro de la correspondiente igualdad habrá cero:

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0. \tag{15.14}$$

En conclusión, escribamos un resumen de las condiciones de frontera en el sistema SI:

$$\begin{aligned} D_{2n} - D_{1n} &= \sigma, \qquad B_{2n} - B_{1n} = 0, \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} &= i_{\nu}, \qquad E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0. \end{aligned} \tag{15.15}$$

§ 16. Tensor energía — impulso del campo electromagnético. Vector de Poynting

Más adelante vamos a investigar el problema de la energía y el impulso del campo electromagnético. Este tiene no sólo importancia práctica, sino también de principio, ya que la presencia en el campo electromagnético de tales características dinámicas como la energía y el impulso, que también son propias de otros objetos materiales, hace evidente el carácter material del campo.

La lógica de la consideración será la siguiente. Vamos a partir de las definiciones establecidas con anterioridad de la energía y el impulso de las partículas relativistas, uniéndolas en un 4-tensor único de energía — impulso. Seguidamente, nos cercioramos de que la energía y el impulso de las partículas, en interacción con el campo electromagnético, no son magnitudes que se conservan. Pero si añadimos a ellas algunas otras magnitudes, que se expresan con el tensor del campo electromagnético, es decir, si introducimos en la consideración la enérgia y el impulso del sistema total de partículas + campo electromagnético, ellas resultan ser integrales de movimiento. Esta consideración (la conservación de la energía y el impulso totales de todo el sistema) será, precisamente, el criterio fundamental para la determinación de la energía y el impulso del campo. Así, pues, nos basaremos en las leyes de la conservación de la energía y el impulso como sobre un principio general al que deben supeditarse no sólo los fenómenos mecánicos, sino también los electromagnéticos.

16.1. Tensor energía — impulso de las partículas relativistas. Determinemos el tensor energía — impulso T^{ik}_{part} de un sistema de partículas con la siguiente expresión:

$$T^{ik}_{\text{part}} = \sum_a m_a u^i_a u^k_a \sqrt{1 - v_a^2/c_2}\,\delta(r - r_a(t)), \tag{16.1}$$

donde m_a es la masa, $r_a(t)$ y $v_a(t)$, las coordenadas y la velocidad de la partícula, u^i_a, su 4-velocidad. El carácter tensorial de la magnitud T^{ik}_{part} se

desprende de que $u_a^i u_a^k$ es un tensor de II rango, mientras que las magnitudes m_a y $\sqrt{1 - v_a^2/c_2}\delta(r - r_a)$ son invariantes (en lo que atañe a la última magnitud, véase la observación en el p. 13.2).

Por definición, el tensor energía — impulso es simétrico:

$$T_{\text{part}}^{ik} = T_{\text{part}}^{ki}. \tag{16.2}$$

Para aclarar el sentido físico de sus componentes reescribámoslos con designaciones tridimensionales. El empleo de las fórmulas (4.30) nos lleva a

$$T_{\text{part}}^{00} = \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - v_a^2/c_2}} \delta(r - r_a(t)). \tag{16.3}$$

Después de integrar los dos miembros de la igualdad por el volumen arbitrario V obtenemos

$$\int_{(V)} T_{\text{part}}^{00} dV = \sum_{(V)} \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - v_a^2/c_2}} = \sum_{(V)} \mathscr{E}_a, \tag{16.4}$$

es decir, la energía total de las partículas en no interacción que se hallan en el volumen V. Por lo tanto, la magnitud T_{part}^{00} es la densidad de la energía de las partículas en no interacción.

Después consideramos los componentes no diagonales del tensor energía — impulso:

$$T_{\text{part}}^{0\alpha} = \sum_a \frac{m_a c v_\alpha^2}{\sqrt{1 - v_a^2/c_2}} \delta(r - r_a(t)), \alpha = 1, 2, 3. \tag{16.5}$$

La magnitud obtenida puede ser interpretada de dos maneras. Integrando (16.5) por cierto volumen tridimensional y escribiendo la integración en la forma

$$\int_{(V)} T_{\text{part}}^{0\alpha} dV = c \sum_{(V)} p_\alpha^a, \tag{16.6}$$

vemos que la magnitud $T_{\text{part}}^{0\alpha} = T_{\text{part}}^{\alpha 0}$ puede ser considerada como la densidad del impulso de las partículas multiplicada por c. Pero si (16.5) se escribe en la forma

$$T_{\text{part}}^{0\alpha} = \frac{1}{c} \sum \mathscr{E}_a v_\alpha^a \delta(r - r_a(t)), \tag{16.7}$$

al comparar la expresión (16.7) con (16.3) podemos considerarla como la densidad del flujo de energía de las partículas multiplicada por c. La densidad del impulso y la del flujo de energía se distinguen por el factor c^2.

Por fin, sobre la base de la determinación (16.1), hallamos:

$$T_{\text{part}}^{\alpha\beta} = \sum_a p_\alpha^a v_\beta^a \delta(r - r_a(t)), \alpha, \beta = 1, 2, 3. \tag{16.8}$$

El conjunto de nueve magnitudes $T^{\alpha\beta}_{\text{part}}$ constituye el 3-tensor de la densidad del flujo del impulso transportado por las partículas. Es natural que la densidad del flujo de una magnitud vectorial es un tensor de II rango.

Si tratamos un sistema macroscópico de iguales partículas, el tensor de energía — impulso es fácil de expresar por medio de su función de distribución f:

$$T^{ik}_{\text{part}} = m\int u^i u^k f(r,p,t)\sqrt{1 - v^2/c^2}\,d^3p, \tag{16.9}$$

donde m es la masa de la partícula (invariante). El carácter tensorial de la magnitud (16.9) sigue de las propiedades del integrando: recordemos que $f = \text{inv}$ y que $\sqrt{1 - v^2/c^2}\,d^3p = d^3p/\gamma = \text{inv}$ (véase el p. 6.4), en tanto que u^i y u^k son los componentes de un 4-vector. La expresión (16.9) se convierte en (16.1) si elegimos la función de distribución en la forma

$$f(r,p,t) = \sum_a \delta(r - r_a(t))\delta(p - p_a(t)) \tag{16.10}$$

y consideramos iguales las masas de las partículas en (16.1).

Calculemos la divergencia del 4-tensor T^{ik}_{part} tomado en la forma (16.1):

$$\frac{\partial T^{ik}_{\text{part}}}{\partial x^k} = \sum_a m_a \frac{\partial u^i_a}{\partial x^k}\, u^k_a \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}\,\delta(r - r_a(t)) +$$

$$+ \sum_a m_a u^i_a \frac{\partial}{\partial x^k}\, u^k_a \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}\,\delta(r - r_a(t)). \tag{16.11}$$

De la definición de la 4-velocidad (4.30) y del 4-gradiente (4.24), tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\, u^k_a \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}\,\delta(r - r_a(t)) = \frac{\partial}{\partial t}\,\delta(r - r_a(t)) + \mathbf{v}_a \cdot \nabla\delta(r - r_a(t)) =$$

$$= -\frac{\partial r_a}{dt}\cdot\nabla\delta(r - r_a(t)) + \mathbf{v}_a \cdot \nabla\delta(r - r_a(t)) = 0. \tag{16.12}$$

Más adelante, como u^i_a es sólo función de t, entonces

$$\frac{\partial u^i_a}{\partial x^0} = \frac{1}{c}\frac{du^i_a}{dt};\ \frac{\partial u^i_a}{\partial x^\alpha} = 0 \text{ con } \alpha = 1, 2, 3. \tag{16.13}$$

Como resultado, uniendo (16.11) — (16.13), obtenemos

$$\frac{\partial T^{ik}_{\text{part}}}{\partial x^k} = \sum_a m_a \delta(r - r_a(t))\frac{du^i_a}{dt}. \tag{16.14}$$

Las transformaciones posteriores del segundo miembro serán realizadas mediante la ecuación de movimiento con ayuda de la derivada por el

tiempo (de coordenadas) ordinario:

$$m_a \frac{du_a^i}{dt} = \frac{e_a}{c} F_a^{ik} u_k^a \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}. \tag{16.15}$$

Poniendo (16.15) en (16.14), tendremos

$$\frac{\partial T_{\text{part}}^{ik}}{\partial x^k} = \sum_a \frac{e_a}{c} u_k^a \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}\, \delta(r - r_a(t)) F_a^{ik} = \frac{1}{c} F^{ik} j_k, \tag{16.16}$$

donde hemos hecho uso de la densidad de 4-corriente (13.15) y una de las propiedades de la función delta:

$$\delta(r - r_a) F_a^{ik} \equiv \delta(r - r_a) F^{ik}(r_a, t) = \delta(r - r_a) F^{ik}(r, t).$$

16.2. Tensor de energía — impulso del campo electromagnético. Representemos el segundo miembro de la igualdad (16.16) en forma de la 4-divergencia de cierto 4-tensor de II rango, T_{campo}^{ik}, que fuese compuesto de los componentes del 4-tensor del campo F^{ik}:

$$\frac{1}{c} F^{ik} j_k = -\frac{\partial T_{\text{campo}}^{ik}}{\partial x^k}. \tag{16.17}$$

Entonces la expresión (16.16) toma el aspecto

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (T_{\text{part}}^{ik} + T_{\text{campo}}^{ik}) = 0 \tag{16.18}$$

y puede ser interpretada como la ecuación de continuidad para el 4-tensor total energía — impulso de un sistema que consta de partículas y de campo electromagnético:

$$T^{ik} = T_{\text{part}}^{ik} + T_{\text{campo}}^{ik}. \tag{16.19}$$

La igualdad a cero de la divergencia del tensor certifica la conservación de las magnitudes relacionadas con él, del mismo modo que la ecuación de continuidad (13.18) para la densidad de 4-corriente asegura la conservación de la carga total del sistema.

Con ayuda de la ecuación de Maxwell (13.25), pasando a los componentes covariantes y cambiando el índice i por k, hallamos

$$\frac{1}{c} F^{ik} j_k = -\frac{1}{4\pi} F^{ik} \frac{\partial F_k^l}{\partial x^l} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x^l} (F^{ik} F_k^l) - F_k^l \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l} \right). \tag{16.20}$$

Después, transformamos el segundo miembro entre paréntesis mediante la omisión y cambio de los índices:

$$F_k^l \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l} = F_{kl} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x_l} = \frac{1}{2} F_{kl} \left(\frac{\partial F^{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F^{li}}{\partial x_k} \right).$$

La expresión entre paréntesis se puede simplificar con la ecuación de Maxwell (13.27), en la que todos los índices se deben subir, es decir, pasar a los componentes contravariantes:

$$F^l_k \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l} = -\frac{1}{2} F_{kl} \frac{\partial F^{kl}}{\partial x_i} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{kl} F^{kl} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x^k} g^{ik} F_{lm} F^{lm}.$$

Como resultado, la igualdad (16.20) toma el aspecto

$$\frac{1}{c} F^{ik} j_k = -\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{1}{4\pi} \left(F^{il} F^k_l + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm} \right), \tag{16.21}$$

de donde se determina el tensor energía — impulso del campo:

$$T^{ik}_{\text{campo}} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{il} F^k_l + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm} \right). \tag{16.22}$$

Lo mismo que el tensor (16.1) energía — impulso de las partículas, este último tensor también es simétrico:

$$T^{ik}_{(f)} = T^{ki}_{(f)}. \tag{16.23}$$

La determinación del tensor energía — impulso del campo no es unívoca, ya que en el segundo miembro de (16.21) se puede añadir cualquier tensor $\tilde{T}^{ik}$ con divergencia nula: $\partial \tilde{T}^{ik}/\partial x^k = 0$. Con esto, la igualdad (16.21) no se viola, mientras que el aspecto de $T^{ik}_{(f)}$ cambia. Pero la indicada falta de univocidad no se refleja en el valor de 4-impulso de un sistema acotado que continúa siendo una magnitud unívocamente determinada. Demostremos lo dicho.

El tensor de II rango con divergencia nula puede ser representado como la divergencia de un tensor de III rango asimétrico:

$$\tilde{T}^{ik} = \frac{\partial \lambda^{ikl}}{\partial x^l}, \tag{16.24}$$

donde $\lambda^{ikl} = -\lambda^{ilk}$ (por los dos primeros índices el tensor λ^{ikl} debe ser simétrico: $\lambda^{ikl} = \lambda^{kil}$, ya que de otra forma no será simétrico el tensor total energía — impulso).

El 4-vector energía — impulso del sistema partículas + campo electromagnético, de acuerdo con (16.4), (16.6) y (16.19) se expresa en la forma

$$P^i = \frac{1}{c} \int T^{i0} dV; \tag{16.25}$$

aquí, la integración se efectúa por todo el espacio tridimensional. Al añadir al tensor energía — impulso la magnitud (16.24) el 4-impulso (16.25) recibe la adición

$$\tilde{P}^i = \frac{1}{c} \int \frac{\partial \lambda^{i0l}}{\partial x^l} dV, \tag{16.26}$$

donde, a causa de la asimetría del tensor λ^{i0l}, el índice l toma los valores 1, 2, 3. Por eso, la magnitud

$$\frac{\partial \lambda^{i0l}}{\partial x^l} = \frac{\partial \lambda^{i0\alpha}}{\partial x^\alpha}$$

es una divergencia tridimensional y la integral (16.26) se transforma en una integral por una superficie infinitamente alejada que abarca todo el volumen tridimensional:

$$\tilde{P}^i = \frac{1}{c} \oint \lambda^{i0\alpha} dS_\alpha. \tag{16.27}$$

Esta integral se anula para un sistema acotado. Así, pues, $\tilde{P}^i = 0$ y la no univocidad de la definición de T^{ik}_{campo} no viola la univocidad de la definición de la energía y el impulso totales del sistema. Pero, hablando en general, las densidades de estas magnitudes no se determinan unívocamente. Las expresiones que siguen del tipo concreto (16.22) del tensor energía — impulso son de uso general y, por lo visto, se confirman por el experimento para todos los fenómentos físicos estudiados hasta la fecha.

16.3. Energía del campo. Vector de Poynting. Tensor de tensiones de Maxwell. En correspondencia con la expresión (16.25) para el 4-impulso de un sistema, podemos interpretar $T^{00}_{\text{campo}} = w$ como la densidad de la energía del campo, mientras que $\frac{1}{c} T^{\alpha 0}_{\text{campo}} = g_\alpha$, como la densidad de su impulso (tridimensional). Con ayuda de las fórmulas (16.22) y (9.15) es fácil expresarlas por las intensidades del campo:

$$w = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2), \tag{16.28}$$

$$g = \frac{1}{4\pi c} E \times H. \tag{16.29}$$

Más arriba (en el p. 16.1) ya hemos visto que la magnitud $cT^{0\alpha}_{\text{part}}$ puede ser considerada como la densidad del flujo de energía de las partículas. Análoga interpretación también es posible para $cT^{0\alpha}_{\text{campo}} = c^2 g_\alpha = \gamma_\alpha$. El conjunto de los componentes de $T^{0\alpha}_{\text{campo}}$ (con $\alpha = 1, 2, 3$) forma un vector tridimensional $\vec{\gamma}$ que recibe el nombre de *vector de Poynting*:

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi} E \times H. \tag{16.30}$$

A causa del importante papel que desempeñan las magnitudes w y $\vec{\gamma}$ en la teoría del campo electromagnético, vamos a deducirlas una vez más directamente de las ecuaciones de Maxwell en forma tridimensional. Escribamos

$$\text{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \qquad \text{rot} H = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$$

y confeccionamos la expresión bilineal

$$H\cdot \operatorname{rot} E - E\cdot \operatorname{rot} H = -\frac{1}{c}\left(H\cdot\frac{\partial H}{\partial t} + E\cdot\frac{\partial E}{\partial t}\right) - \frac{4\pi}{c} j\cdot E. \qquad (16.31)$$

Haciendo uso de la identidad

$$\operatorname{rot}[E \times H] = H\cdot \operatorname{rot} E - E\cdot \operatorname{rot} H$$

y dividiendo los dos miembros de la igualdad (16.31) por $4\pi/c$, escribámosla en la forma

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\gamma} = -j\cdot E. \qquad (16.32)$$

Esta ecuación diferencial expresa el balance de energía del campo electromagnético: después de integrar (16.32) por el volumen y transformando la integral de $\operatorname{div}\vec{\gamma}$ según el teorema de Ostrogradski — Gauss, obtenemos

$$-\frac{dW}{dt} = \oint\vec{\gamma}\cdot dS - \int j\cdot E dV. \qquad (16.33)$$

La última igualdad muestra que la energía total del campo electromagnético en el volumen V

$$W = \int\limits_{(V)} \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2)dV, \qquad (16.34)$$

al no haber partículas cargadas ($j = 0$) sólo varía a cuenta del flujo del vector de Poynting que pasa por la superficie de dicho volumen:

$$-\frac{dW}{dt} = \int\vec{\gamma}\cdot dS. \qquad (16.35)$$

Basándonos en la ley de la conservación de la energía, la integral $\oint\limits_{(S)}\vec{\gamma}\cdot dS$ debe ser considerada como el flujo de energía que pasa por una superficie cerrada. Pero la interpretación de $\vec{\gamma}$ como la densidad del flujo de energía no es unívoca: la adición $\vec{\gamma}$ de una magnitud del tipo $\operatorname{rot}\vec{\Gamma}$, donde $\vec{\Gamma}$ es un seudovector, a pesar de no hacer variar el flujo total de energía varía su densidad. No obstante, semejante falta de univocidad en la determinación del vector de Poynting no se refleja en aquella parte de la energía del campo electromagnético que se transmite a la sustancia durante la interacción de ésta con el campo. La energía es transmitida a la sustancia que ocupa cierto volumen (macroscópico o microscópico) y, por lo tanto, la energía transmitida ha de determinarse con la integral por dicho volumen partiendo de $\operatorname{div}\gamma$, mientras que $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{\Gamma} \equiv 0$.

Al haber partículas cargadas la energía en el volumen V también varía a cuenta del trabajo del campo eléctrico sobre las partículas. La densidad de la potencia de las fuerzas eléctricas, que sobre las partículas actúan, se

expresa con el producto $j \cdot E$. Las fuerzas magnéticas no realizan trabajo, sino que sólo varían la dirección de las velocidades de las partículas. La integral de $j \cdot E$ entra en el segundo miembro de la igualdad (13.31) con signo negativo, ya que el trabajo de las fuerzas eléctricas sobre las partículas reduce la energía del campo.

Con $i = \alpha = 1, 2, 3$ la ecuación de continuidad (16.18), escrita en forma tridimensional, al no haber partículas ($T^{ik}_{\text{part}} = 0$) proporciona

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial T^{\alpha\beta}_{\text{campo}}}{\partial x^\beta} = 0. \tag{16.36}$$

La forma integral de esta ecuación tiene el aspecto

$$-\frac{dG_\alpha}{dt} = \oint_{(S)} T^{\alpha\beta}_{\text{campo}} dS_\beta, \tag{16.37}$$

donde

$$G = \int_{(V)} g\, dV \tag{16.38}$$

es el impulso del campo en el volumen V. La igualdad (16.37) muestra que $T^{\alpha\beta}_{\text{campo}}$ es la densidad del flujo del impulso. La magnitud $\sigma^{\alpha\beta} = -T^{\alpha\beta}_{\text{campo}}$ recibe la denominación de *tensor de tensiones de Maxwell* y en designaciones tridimensionales tiene la forma

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}(E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta) - \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2)\delta_{\alpha\beta}. \tag{16.39}$$

Es natural que la disposición de los índices en el tensor tridimensional es indiferente: $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta}$.

Si en el volumen V hay partículas cargadas, pero durante su movimiento ellas no cruzan el límite del volumen, la igualdad (16.37) adquiere el aspecto

$$\frac{d}{dt}(P + G)_\alpha = \oint_{(S)} \sigma^{\alpha\beta}_{(f)} dS_\beta,$$

donde $P = \sum_a p_a$ es el impulso total de las partículas que se hallan en el volumen V. Como el impulso P de las partículas, cuando no hay flujo de ellas por la superficie, sólo varía a cuenta del efecto de las fuerzas eléctrica y magnética

$$\frac{dP}{dt} = \int_{(V)} \left(\rho E + \frac{1}{c} j \times H\right) dV,$$

$$\oint_{(S)} \sigma^{\alpha\beta}_{(f)} dS_\beta = \int_{(V)} \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \rho E + \frac{1}{c} j \times H\right)_\alpha dV.$$

Vemos que en el caso estático $(\partial g/\partial t) = 0$ el flujo del tensor de tensiones por la superficie de cierto volumen es igual a la fuerza total que actúa sobre las partículas cargadas en dicho volumen. En el campo no estacionario a la fuerza se añade la variación del impulso del campo en el volumen que consideramos.

§ 17. Unicidad de la resolución de las ecuaciones de Maxwell

Aclaremos con que condiciones el sistema de ecuaciones de Maxwell (14.1) — (14.4) tiene una solución única. Supongamos que las cargas y las corrientes (las funciones $\rho(r, t)$ y $j(r, t)$) están prefijadas. A continuación, sea que en el momento inicial ($t = 0$) están prefijados los valores $E(r, 0)$ y $H(r, 0)$ dentro de cierto volumen V y que sobre su superficie se han prefijado los componentes tangenciales de uno de estos vectores (E_τ o bien H_τ) en todos los momentos de tiempo. Mostremos que con estas condiciones la solución de las ecuaciones de Maxwell dentro del volumen indicado es única.

Realicemos la demostración a la inversa. Supongamos que hay dos soluciones E_1, H_1 y E_2, H_2 cada una de las cuales satisface las ecuaciones de Maxwell (14.1) — (14.4). Constituyamos las diferencias

$$E' = E_1 - E_2, \qquad H' = H_1 - H_2. \tag{17.1}$$

Ellas satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H' &= \frac{1}{c}\frac{\partial E'}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} E' = 0, \\ \operatorname{rot} E' &= \frac{1}{c}\frac{\partial H'}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} H' = 0, \end{aligned} \tag{17.2}$$

así como las condiciones iniciales

$$E' = 0, \qquad H' = 0 \qquad \text{para } t = 0 \tag{17.3}$$

y las condiciones de frontera

$$E'_\tau = 0 \qquad \text{o bien } H'_\tau = 0 \qquad \text{en } S. \tag{17.4}$$

De modo escalar multipliquemos la ecuación para $\operatorname{rot} H'$ por E' y la ecuación para $\operatorname{rot} E'$ por H' y sustrayamos las igualdades obtenidas término por término:

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(E'^2 + H'^2) = E' \cdot \operatorname{rot} H' - H' \cdot \operatorname{rot} E' = -\operatorname{div}[E' \times H']. \tag{17.5}$$

La integración de (17.5) por un volumen arbitrario V, haciendo uso del teorema de Ostrogradski — Gauss, nos permite obtener la ecuación de la

energía

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)}\frac{E'^2+H'^2}{8\pi}d^3x=-\frac{c}{4\pi}\oint\limits_{(S)}[E'\times H']_n dS; \tag{17.6}$$

el factor $c/4\pi$ ha sido añadido para que la ecuación (17.6) sea análoga de (16.33), S es la superficie que limita el volumen que consideramos.

El componente normal del producto vectorial $E' \times H'$ se expresa por los componentes tangenciales E'_τ y H'_τ en la superficie S y, de acuerdo con (17.4), se reduce a cero. Por lo tanto, de (17.6) obtenemos

$$\int\limits_{(V)}\frac{E'^2+H'^2}{8\pi}dV=\text{const.} \tag{17.7}$$

Pero como con $t = 0, E' = H' = 0$, la constante en el segundo miembro de (17.7) también es igual a cero. Esto sólo es posible si $E' = 0$ y $H' = 0$ idénticamente por todos los puntos del volumen.

Señalemos que si la integral $\oint\limits_{(S)}(E' \times H')_n dS$ tiende a cero con $S \to \infty$ (esto se produce con el decrecimiento suficientemente rápido de E' y H' con la distancia), las condiciones de frontera (17.4) son superfluas para demostrar la unicidad de la solución.

§ 18. Ecuaciones para los potenciales electromagnéticos

Las ecuaciones de Maxwell (13.25) y (13.27) fueron escritas mediante el tensor del campo electromagnético F^{ik}. Al poner su expresión con el 4-potencial

$$F^{ik}=\frac{\partial A^k}{\partial x_i}-\frac{\partial A^i}{\partial x_k}$$

como vemos, la ecuación (13.27) se convierte en una identidad y (13.25) proporciona la ecuación para el potencial:

$$\Box A^i+\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial A^k}{\partial x^k}=-\frac{4\pi}{c}j^i. \tag{18.1}$$

Aquí hemos hecho uso de la definición del operator de D'Alembert (4.26).

En el § 8 ya hablamos de que estando prefijado el tensor F^{ik} (es decir, las intensidades del campo electromagnético E y H), el 4-potencial se determina con una precisión hasta la transformación gradiental (8.16). Podemos emplear esta arbitrariedad para simplificar (18.1). Apliquemos al 4-potencial la condición adicional

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k}=0. \tag{18.2}$$

Recibe el nombre de condición de Lorentz y en designaciones tridimensionales tiene el aspecto

$$\operatorname{div} A + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{18.3}$$

La elección de los potenciales que se supeditan a la condición (18.3) se denomina calibración de Lorentz.

La ecuación (18.1) se simplifica y toma la forma

$$\Box A^i = -\frac{4\pi}{c} j^i \tag{18.4}$$

o bien en designaciones tridimensionales

$$\begin{aligned} \Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} j, \\ \Delta \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho. \end{aligned} \tag{18.5}$$

Estas son dos ecuaciones de onda no homogéneas.

La condición de Lorentz (18.2) no liquida la arbitrariedad en la elección de los potenciales, sino que sólo limita la clase de las funciones tolerables χ que realizan la transformación gradiental. De acuerdo con (8.16), los dos potenciales A^i y $\tilde{A}^i$ satisfarán la condición de Lorentz (18.2), si

$$\Box \chi = 0. \tag{18.6}$$

En lugar de la condición de Lorentz (18.2) en algunos problemas es más cómoda la condición adicional sobre el potencial

$$\operatorname{div} A = 0 \tag{18.7}$$

(calibración de Coulomb). Esta no posee covariación relativista y en otro sistema inercial de referencia variará su forma. En la calibración de Coulomb, el potencial escalar $A^0 = \varphi$, de acuerdo con (18.1) y (18.7), satisface la ecuación de Poisson

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho, \tag{18.8}$$

en la que el tiempo entra como parámetro. El potencial A debe ser determinado de la ecuación (18.1) con $i = 1, 2, 3$.

$$\Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{18.9}$$

La condición de la calibración (18.7), aplicada a los potenciales A^i y $\tilde{A}_i$ conduce a la siguiente transformación gradiental, limitada por la función χ:

$$\Delta \chi = 0. \tag{18.10}$$

Si el campo electromagnético se considera al no haber cargas y corrientes, es decir, $\rho = 0$ y $j = 0$, es posible elegir semejante calibración de los potenciales con la que $\varphi = 0$ idénticamente, así como $\operatorname{div} A = 0$. Con tal elección de los potenciales la ecuación (18.8) se satisface idénticamente, mientras que (18.9) se convierte en la ecuación de D´Alembert:

$$\Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \tag{18.11}$$

Capítulo IV. Campo electromagnético continuo en el vacío

§ 19. Propiedades generales del campo electromagnético continuo

Como ya vimos en el § 14 si la intensidad del campo eléctrico no depende del tiempo, el sistema de ecuaciones de Maxwell se divide en dos pares de ecuaciones que sólo contienen magnitudes bien eléctricas o bien magnéticas. La ecuaciones de Maxwell para el campo eléctrico continuo tienen el aspecto

$$\operatorname{rot} E = 0, \qquad \operatorname{div} E = 4\pi\rho. \tag{19.1}$$

La primera de estas ecuaciones nos indica el carácter no rotacional del campo eléctrico continuo. Se satisfará si el vector E es el gradiente de cierta función escalar:

$$E(r) = -\operatorname{grad}\varphi(r). \tag{19.2}$$

En este caso, la magnitud $\varphi(r)$ se denomina potencial electrostático, mientras que la fórmula (19.2) es un caso particular de las correlaciones (8.13) con $\partial A/\partial t = 0$.

Con el fin de aclarar el sentido físico del potencial φ, calculemos el trabajo A de las fuerzas eléctricas en el sentido del desplazamiento de la carga e a lo largo de cierto contorno l, del punto 1 al 2

$$A = \int_{(l)}^{(2)} eE\cdot dl = -e\int_{(l)}^{(2)} \nabla\varphi\cdot dl = -e\int_{(l)}^{(2)} d\varphi = e(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{19.3}$$

Aquí hacemos uso de la fórmula para el producto escalar de vectores $\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ y $dl = (dx, dy, dz)$:

$$\nabla\varphi\cdot dl = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi,$$

donde $d\varphi$ es la diferencial total la función φ.

De la fórmula (19.3) se desprende que el trabajo de las fuerzas eléctricas no depende del recorrido de la carga, sino que sólo se determina por la diferencia de potencial en los puntos inicial y final. En particular, si estos puntos coinciden (contorno cerrado) el trabajo se anula:

$$A = e \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0. \tag{19.4}$$

La independencia del trabajo de las fuerzas eléctricas del recorrido es la más importante propiedad del campo electrostático. Así, pues, la magnitud que se mide es la diferencia de potencial en dos puntos: ella determina el trabajo de las fuerzas eléctricas para el desplazamiento de la carga puntual entre dichos puntos. Por esta razón, el propio potencial electrostático $\varphi(r)$ no se determina unívocamente, con una precisión hasta la constante aditiva que no influye sobre el valor de la diferencia de potencial.

La ecuación para el potencial electrostático será obtenida poniendo de (19.2) en la ecuación (19.1) para div$\boldsymbol{E}$. Como

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi,$$

donde Δ es el operador de Laplace, la ecuación buscada tendrá la forma

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho. \tag{19.5}$$

Recibe el nombre de *ecuación de Poisson*. En el caso particular cuando en la región del espacio que estudiamos no hay cargas, es decir, $\rho = 0$, la ecuación de Poisson se convierte en *la de Laplace*:

$$\Delta \varphi = 0. \tag{19.6}$$

Como es natural, el operador de Laplace en las ecuaciones (19.5) y (19.6) puede ser escrito en cualquier sistema de coordenadas.

En superficies singulares, las condiciones de frontera para las ecuaciones (19.5) y (19.6) son obtenidas de las condiciones (15.6) y (15.14) para los componentes del vector $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$ y dicen:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma, \tag{19.7}$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} = 0, \tag{19.8}$$

donde con $\frac{\partial}{\partial n}$, $\frac{\partial}{\partial \tau}$ se designan las derivadas en las direcciones de la normal y de la tangente a la superficie. Sin limitación de la generalidad la segunda condición puede sustituirse con la condición de continuidad del potencial en la superficie:

$$\varphi_2 = \varphi_1. \tag{19.9}$$

La ecuación de Poisson (19.5) también sigue siendo válida cuando hay cargas puntuales, si la densidad volumétrica se escribe mediante la función

delta de Dirac, como hicimos en el § 13. Una observación semejante se refiere también al caso cuando en el espacio hay hilos o superficies cargadas. En ellos, la densidad volumétrica de la carga puede expresarse con una función delta mono y bidimensional. P. ej., si en el origen de coordenadas hay una carga puntual, $\rho(r) = e\delta(r)$ y la ecuación de Poisson toma el aspecto

$$\Delta\varphi = -4\pi e\delta(r). \tag{19.10}$$

De esta ecuación hallamos el potencial de la carga puntual. Con este fin, tomemos en consideración la simetría esférica del problema e integremos los dos miembros de la ecuación por el volumen de una esfera de radio r. Según el teorema de Ostrogradski — Gauss, el primer miembro se transforma en la forma

$$\int \Delta\varphi dV = \int \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi dV = \oint \operatorname{grad}\varphi \cdot dS = 4\pi r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \tag{19.11}$$

mientras que, con semejante integración, el segundo miembro se transforma en la constante

$$\int 4\pi e\delta(r)dV = 4\pi e. \tag{19.12}$$

En total, la ecuación toma el aspecto

$$r^2 \frac{d\varphi}{dr} = -e \tag{19.13}$$

y, mediante la posterior integración, hallamos

$$\varphi(r) = \frac{e}{r} + C. \tag{19.14}$$

La constante C queda arbitraria. Es cómodo elegirla igual a cero con el fin de que el potencial electrostático se reduzca a cero en el infinito. Señalemos que al poner (19.14) en la ecuación (19.10) obtenemos la identidad

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(r) \tag{19.15}$$

que nos será necesaria con posterioridad.

Las superficies de igual potencia (superficies equipotenciales) ofrecen una representación evidente del campo electrostático

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}, \tag{19.16}$$

así como también las líneas del campo eléctrico. Estas últimas se determinan como líneas tangentes en cada punto del espacio al vector de la intensidad del campo $\boldsymbol{E}$. Como $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$ y el vector $\nabla\varphi$ está dirigido por la normal a las superficies equipotenciales, las líneas de fuerza también son normales a la superficie (19.16). Pueden ser halladas de la condición de paralelismo de $\boldsymbol{E}$ y del elemento $d\boldsymbol{l}$ de la línea de fuerza:

$$\boldsymbol{E} \times d\boldsymbol{l} = 0. \tag{19.17}$$

Esta igualdad vectorial puede ser reescrita en forma de un sistema de dos ecuaciones diferenciales de 1er orden que en las coordenadas cartesianas, expresada mediante el potencial, toma el aspecto

$$\frac{dx}{\partial\varphi/\partial x} = \frac{dy}{\partial\varphi/\partial y} = \frac{dz}{\partial\varphi/\partial z}. \tag{19.18}$$

Las integrales de estas ecuaciones determinan dos sistemas de superficies, cuyas líneas de intersección no son líneas de fuerza del campo eléctrico. Al emplear las coordenadas ortogonales curvilíneas q_1, q_2, q_3 las ecuaciones (19.18) toman la forma

$$\frac{h_1^2 dq_1}{\partial\varphi/\partial q_1} = \frac{h_2^2 dq_2}{\partial\varphi/\partial q_2} = \frac{h_3^2 dq_3}{\partial\varphi/\partial q_3}, \tag{19.19}$$

donde h_α es el coeficiente de Lamé (función de las coordenadas).

§ 20. Integración de la ecuación de Poisson

20.1. Forma integral de la ecuación de Poisson. La ecuación de Poisson (19.5) puede ser transformada en forma integral. En ciertos casos particulares, ella permite obtener la solución en cuadraturas y, en el caso general, comprender mejor las propiedades de las soluciones de la ecuación de Poisson y el planteamiento de las condiciones de frontera.

Hagamos uso de la identidad de Green

$$\int\limits_{(V)} (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)dV = \oint\limits_{(S)} \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS, \tag{20.1}$$

donde φ y ψ son dos funciones escalares derivables tomadas al azar, V, un volumen arbitrario, S, la superficie cerrada que lo limita, $\partial\varphi/\partial n$ y $\partial\psi/\partial n$, las proyecciones de los gradientes en la normal exterior a la superficie. La identidad de Green (20.1) es obtenida aplicando el teorema de Ostrogradski — Gauss $\int \mathrm{div}\boldsymbol{a}\,dV = \oint \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$ al vector $\boldsymbol{a} = \varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi$ para el que

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi.$$

Sea que nos interesa el valor del potencial en el punto M que yace dentro del volumen V. En calidad de φ elijamos el potencial buscado que satisface la ecuación de Poisson (19.5) y como ψ, la función escalar $\psi = 1/R$, donde $R = |r_M - r|$ es la distancia desde el punto M hasta el elemento de integración dV. Es de señalar que de acuerdo con (19.15) ψ satisface la ecuación

$$\Delta\psi = -4\pi\delta(r_M - r), \tag{20.2}$$

que se obtiene si sustituimos en (19.15) r por $r_M - r$. En (20.2) el operador de Laplace puede actuar tanto en las coordenadas del punto r, como en las del punto r_M.

Pongamos en (20.1) los valores de $\Delta\varphi$ de (19.5) y de $\Delta\psi$ de (20.2), lo que conduce a

$$4\pi \int\limits_{(V)} \left[-\varphi(r)\delta(r_M - r) + \frac{\rho(r)}{R}\right] dV = \oint\limits_{(S)} \left[\varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right] dS.$$

Después de calcular la integral con la función delta, $\int \varphi(r)\delta(r_M - r)dV = \varphi(r_M) \equiv \varphi_M$, hallamos

$$\varphi_M = \int\limits_{(V)} \frac{\rho(r)}{R} dV + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{(S)} \left[\frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right] dS. \qquad (20.3)$$

En esta fórmula, el primer sumando describe el potencial creado por las cargas ubicadas dentro del volumen V. Esta parte del potencial puede ser también obtenida según el principio de superposición, ya que la pequeña carga $\rho(r)dV$, de acuerdo con (19.14), crea en el punto M el potencial $\rho dV/R$, en tanto que el potencial total de todas las cargas dentro de V es obtenido sumando (integrando) según dichas cargas. El segundo sumando en (20.3) describe el potencial de las cargas que están fuera del volumen V y en su límite, o sea, en la superficie S. Pero tomando en consideración las indicadas cargas no de forma explícita, mediante sus densidades volumétrica y superficial, sino por intermedio de los valores del potencial φ y del componente normal de la intensidad del campo $E_n = -\partial\varphi/\partial n$ en el límite del volumen.

Si todas las cargas que crean el campo electrostático yacen en el interior del volumen finito V, la integral superficial se anula y el potencial total se expresa con la expresión

$$\varphi(r) = \int \frac{\rho(r')dV'}{|r - r'|} \qquad (20.4)$$

que en este caso es la solución de la ecuación de Poisson (19.5). De esto nos cercioramos con facilidad alejando la superficie S a la infinidad: a grandes distancias el potencial de un sistema acotado decrecerá no más lentamente que el potencial de una carga puntual, es decir, r^{-1}, mientras que las derivadas $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ y $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)$, no más lentamente que r^{-2}. Por lo tanto, si hacemos que la superficie tienda al infinito, el integrando decrecerá como r^{-3}, mientras que la propia superficie crecerá como r^2. En total, toda la integral de superficie tenderá a cero como r^{-1}, donde r es el radio de la superficie. Pero como la integral volumétrica no varía al variar la superficie S, si ella abarca todas las cargas, la integral de superficie se reduce a cero tanto en el caso de una superficie infinita como finita.

La expresión (20.4) también será válida al haber cargas puntuales, así como superficies e hilos cargados, si introducimos en la densidad volu-

métrica de la carga $\rho(r)$ las correspondientes aportaciones en forma delta. P. ej., si todas las cargas son puntuales

$$\rho(r) = \sum_{a=1}^{N} e_a \delta(r - r_a) \tag{20.5}$$

y de (20.4) obtenemos

$$\varphi(r) = \sum_{a=1}^{N} \frac{e_a}{|r - r_a|}, \tag{20.6}$$

es decir, la suma algebraica de los potenciales de las cargas puntuales.

Hagámonos la pregunta: ¿podemos considerar la fórmula (20.4) como la solución general de Poisson? Esto se puede hacer si conocemos la distribución de las cargas por todo el espacio (y la integral (20.4) converge). Pero en múltiples casos (en particular, al haber medios materiales), la distribución de la carga sólo es conocida en una región acotada del espacio. Fuera de esa región y en su límite, la distribución de las cargas es desconocida, pero están prefijados los valores del potencial o de su derivada normal en el límite de la región. En estas condiciones es más cómoda la forma (20.3). Pero, sin embargo, la expresión (20.3) en ningún caso puede ser considerada como solución de la ecuación de Poisson si la integral de superficie se distingue de cero. Esto sería posible si se tolerara la prefijación simultánea e independiente de φ y de $\partial\varphi/\partial n$ en cierta superficie. Entonces, (con $\rho(r)$) ambos sumandos en el segundo miembro de (20.3) serían funciones desconocidas de las coordenadas y (20.3) proporcionaría la solución de la ecuación de Poisson. Mas, en realidad, en una superficie cerrada arbitraria pueden ser prefijadas al azar φ o bien $\partial\varphi/\partial n$, pero no ambas magnitudes simultáneamente (véase p. 20.2). Al prefijar una de ellas, convertimos (20.3) en una ecuación integral, ya que la función incógnita φ (o su derivada $\partial\varphi/\partial n$) entra en el integrando. Por eso, en el caso general, (20.3) sólo puede considerarse como la forma integral de la ecuación de Poisson, pero no como su solución.

20.2. Unicidad de la solución del problema electrostático. Para finalizar la discusión, comenzada a término del p. 20.1, demostremos el *teorema de unicidad*.

La solución del problema electrostático en el interior del volumen V prefijado es única si en dicho volumen se ha prefijado la distribución de las cargas $\rho(r)$ y en su superficie S, el potencial φ o bien su derivada normal $\partial\varphi/\partial n$.

Empleemos la identidad de Green

$$\int_{(V)} (\psi\Delta\varphi + \nabla\psi\cdot\nabla\varphi)dV = \oint_{(S)} \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS \tag{20.7}$$

obtenida aplicando el teorema de Ostrogradski — Gauss al vector $\boldsymbol{a} = \psi\nabla\varphi$, donde ψ y φ son escalares diferenciables arbitrarios. Supongamos que existen dos soluciones distintas del problema electrostático, φ_1 y φ_2 que satisfacen la ecuación de Poisson

$$\Delta\varphi_{1,2} = -4\pi\rho \text{ dentro del volumen } V \tag{20.8}$$

y las condiciones de frontera

$$\varphi_{1,2} = f \qquad \text{en } S \tag{20.9,a}$$

(condiciones de Dirichlet), o bien

$$\frac{\partial\varphi_{1,2}}{\partial n} = F \qquad \text{en } S \tag{20.9,b}$$

(condiciones de Neumann), donde f y F son funciones prefijadas de las coordenadas.

Hagamos en (20.7) $\varphi = \psi = \varphi_1 - \varphi_2$. De (20.8) sigue que $\Delta\varphi = 0$. La integral en el segundo miembro de (20.7) también se anula, ya que a causa de (20.9,a) y (20.9,b) en la superficie S o $\varphi = 0$, o bien $\partial\varphi/\partial n = 0$. Como resultado vemos que

$$\int |\nabla\varphi|^2 dV = 0, \tag{20.10}$$

lo que sólo puede tener lugar a condición de que $\nabla\varphi = 0$, o sea, $\varphi = \text{const}$. En el caso (20.9,a) const $= 0$, o sea $\varphi_1 = \varphi_2$. En el caso (20.9,b) const $\neq 0$, pero dos potenciales electrostáticos que se distinguen por una constante son físicamente equivalentes. Así, pues, en uno y otro caso la solución es única.

20.3. Solución del problema de frontera con ayuda de la función de Green. A la correlación (20.3) podemos darle tal forma con la que proporcionará la solución explícita del problema electrostático, si introducimos en ella, de la correspondiente manera, la función de Green elegida del respectivo modo. Recibe el nombre de función de Green $G(r, r')$ del problema electrostático, la solución de la ecuación de Poisson para una carga puntual unitaria

$$\Delta' G(r, r') = -4\pi\delta(r - r') \tag{20.11}$$

dentro del volumen V dado. Si fuera del volumen V y en su superficie no hay otras cargas, la solución (20.11) justa por todo el espacio infinito, será

$$G(r, r') = \frac{1}{|r - r'|} \tag{20.12}$$

(véase (20.2)). Pero si fuera del volumen hay otras cargas, prefijadas no explícitamente, sino por medio de la correspondiente condición de frontera en S, la forma de la función de Green se complica:

$$G(r, r') = \frac{1}{|r - r'|} + F(r, r'). \tag{20.13}$$

Aquí $F(r, r')$ satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta' F(r, r') = 0 \tag{20.14}$$

y, por tanto, toma en consideración la acción de las cargas que se hallan fuera del volumen prefijado.

Al prefijar las condiciones de frontera de Dirichlet (20.9,a), la función $F(r, r')$ se elije de modo que sea cumplida la condición

$$G(r, r') = 0 \qquad \text{para } r' \text{ en } S. \tag{20.15}$$

En la igualdad (20.1) identifiquemos la función φ con el potencial buscado y ψ, con la función de Green (20.13) que satisface la condición de frontera (20.15). Obtendremos una igualdad (20.3) en la que $1/R$ debe ser sustituido por $G(r, r')$. Pero a causa de (20.15), la integral de superficie contendrá sólo un sumando:

$$\varphi(r) = \int_{(V)} G(r, r')\rho(r')dV' - \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \varphi(r') \frac{\partial G(r, r')}{\partial n'} dS'. \tag{20.16}$$

Como $\varphi(r')$ está prefijado en S, en (20.16) el segundo miembro es conocido y proporciona el valor del potencial en cualquier punto del volumen V.

Al prefijar las condiciones de frontera de Neumann (20.9,b) resulta imposible superponer en la función de Green la condición de frontera

$$\frac{\partial G(r, r')}{\partial n'} = 0 \qquad \text{para } r' \text{ en } S,$$

ya que ella contradice la ecuación (20.11) de la que sigue

$$\oint_{(S)} \frac{\partial G(r, r')}{\partial n'} dS' = -4\pi. \tag{20.17}$$

La más sencilla condición que concuerda con (20.17) tiene la forma

$$\frac{\partial G(r, r')}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{S} \qquad \text{para } r' \text{ en } S. \tag{20.18}$$

Entonces, poniendo en lugar de $1/R$ en (20.3) la función de Green (20.13), que satisface la condición (20.18), tendremos

$$\varphi(r) = \bar{\varphi} + \int_{(V)} G(r, r')\rho(r')dV' + \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} G(r, r') \frac{\partial \varphi(r')}{\partial n'} dS'. \tag{20.19}$$

Aquí $\bar{\varphi} = \dfrac{1}{S} \displaystyle\int_{(S)} \varphi(r)dS$ es el valor medio del potencial en la superficie S que puede ser elegido al azar.

Ejemplo. Hallar el potencial dentro de una esfera de radio a si a una distancia $b < a$ de su centro hay carga puntual q, mientras que en la superficie de la esfera se mantiene un potencial $\varphi = 0$.

Solución. Construyamos una función de Green que satisfaga dentro de la esfera la ecuación (20.11) y, en su superficie, la condición (20.15). Esto se alcanza mediante la elección de $F(r, r')$ en forma del potencial de una carga puntual.

$$F(r, r') = \frac{e_*}{|r_* - r'|}, \tag{20.20}$$

donde la magnitud e_* y la posición $r_*(r)$ la cual se eligen de manera que se cumpla la condición (20.15). Por consideraciones de simetría es evidente que r y r_*, contadas desde el centro de la esfera, deben estar dirigidas a lo largo de una recta. Tomando el eje z del sistema esférico de coordenadas a lo largo de dicha recta, de (20.15) obtendremos la condición para determinar los parámetros e_* y r_*:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\vartheta'}} + \frac{e_*}{\sqrt{r_*^2 + a^2 - 2ar_*\cos\vartheta'}} = 0. \tag{20.21}$$

La ecuación (20.21) tiene dos soluciones: $e_* = -1$, $r_* = r$ (solución trivial, el potencial es por todo el espacio igual a cero) y $e_* = -a/r$, $r_* = a^2/r$. Precisamente la segunda solución permite construir la función de Green que en coordenadas esféricas tiene el aspecto

$$G(r, r') = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta'}} - \frac{a/r}{\sqrt{r_*^2 + r'^2 - 2r_*r'\cos\vartheta'}}. \tag{20.22}$$

Calculando después el potencial con ayuda de (20.16) donde deben hacerse

$$\rho(r') = q\delta(r' - b), \qquad \varphi = 0 \qquad \text{en } S$$

obtenemos

$$\varphi(r) = \frac{q}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2br\cos\vartheta}} - \frac{q}{\sqrt{a^2 + b^2r^2/a^2 - 2br\cos\vartheta}}, \tag{20.23}$$

donde ϑ es el ángulo entre la línea de disposición de las cargas y el radio vector r.

§ 21. Potencial a grandes distancias del sistema de cargas. Momentos dipolar y cuadripolar

Si conocemos la distribución en el espacio de todas las cargas que crean el campo eléctrico, de acuerdo con (20.4) el potencial de este campo se determinará con la integral

$$\varphi = \int \frac{\rho(r')dV'}{|r - r'|}.$$

Semejante representación del potencial hace suponer que la densidad $\rho(r)$ es diferente de cero en una región acotada o bien decrece con suficiente rapidez con $r \to \infty$ por cualquier dirección.

En una cantidad comparablemente pequeña de casos, con una función $\rho(r')$ relativamente sencilla, la integral puede ser tomada y representada en forma analítica. En alto grado, las dificultades que surgen al calcular esta

integral están ligadas con que en el denominador del integrando se encuentra la expresión irracional $|r - r'| = \sqrt{(x - x')^2_\alpha}$ por lo que en el caso general es bastante complicado establecer la forma de la función $\varphi(r)$. No obstante, existen casos cuando la forma de dicha función puede ser establecida con buena precisión haciendo uso de suposiciones, suficientemente generales, acerca de la forma de la función $\rho(r')$. El problema más importante de semejante tipo es el de hallar el campo electrostático a grandes distancias de un sistema acotado de cargas.

Supongamos que las cargas ocupan un volumen con la dimensión característica l. Eligiendo el origen de referencia dentro del sistema hallaremos el potencial a distancias $r \gg l$. Para ello desarrollamos la magnitud

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r}\left(1 - 2\frac{r \cdot r'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{-1/2}$$

en una serie según el parámetro menor, es decir, la razón r'/r. Haciendo uso del conocido desarrollo de un binomio en una serie exponencial, con una precisión hasta el cuadrado de la indicada pequeña razón obtenemos

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r} + \frac{r \cdot r'}{r^3} + \frac{3}{2r}\left(\frac{r \cdot r'}{r^2}\right)^2 - \frac{r'^2}{2r^3} + \ldots \qquad (21.1)$$

Si escribimos los sumandos cuadráticos por las coordenadas cartesianas y hacemos uso de las designaciones tensoriales, a los indicados sumandos se les da la forma

$$\frac{3}{2r}\left(\frac{r \cdot r'}{r^2}\right)^2 - \frac{r'^2}{2r^3} = \frac{1}{2r^5} x_\alpha x_\beta (3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}), \qquad (21.2)$$

donde, como siempre, por los índices en repetición se tiene en cuenta realizar la adición.

Para efectuar la integración aproximada de (20.4) hagamos uso de la expresión (21.1). Poniendo (21.1) en (20.4) y empleando la representación (21.2), obtenemos

$$\varphi(r) = \frac{q}{r} + \frac{p \cdot r}{r^3} + \frac{Q_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta}{2r^5}. \qquad (21.3)$$

Aquí se han utilizado las siguientes designaciones:

$$q = \int \rho(r')dV' \qquad (21.4)$$

la integral total del sistema;

$$p = \int r' \rho(r')dV' \qquad (21.5)$$

el momento dipolar del sistema;

$$Q_{\alpha\beta} = \int \rho(r')(3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta})dV' \qquad (21.6)$$

el tensor del momento cuadripolar del sistema de cargas.

Si continuáramos el desarrollo (21.1) podríamos determinar los momentos multipolares del sistema. Por esto, el desarrollo (21.3) recibe el nombre del desarrollo del potencial electrostático por los momentos multipolares o bien, en forma más breve, por los multipolos. Como ya hemos indicado, en realidad éste es el desarrollo por los exponentes de l/r y, por lo tanto, a grandes distancias del sistema cada siguiente término del desarrollo es pequeño en comparación con el anterior.

En (21.3) el término principal es el potencial de la carga puntual $\varphi_0 = q/r$. Su sentido es evidente: a grandes distancias los detalles de la distribución de la carga no tienen importancia y el sistema actúa como una carga puntual ubicada en el origen de coordenadas. Pero si la carga total es nula, el primer término del desarrollo que desaparece es el potencial del dipolo

$$\varphi_{\text{dip}} = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}/r^3; \tag{21.7}$$

con esto se determina su importancia en muchos de los problemas de electrodinámica. Semejante potencial crea a grandes distancias un sistema neutral de cargas (p. ej., una molécula).

En este caso, es decir, con $q = 0$, el momento dipolar (21.5) deja de depender de la elección del origen de referencia: desplazándolo en el valor del vector $\boldsymbol{a}$, tendremos un nuevo sistema de referencia

$$\boldsymbol{p}_* = \int \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})dV = \int (\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{a})\rho(\boldsymbol{r}')dV' = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{a}q = \boldsymbol{p}. \tag{21.8}$$

Para un sistema de cargas puntuales

$$\boldsymbol{p} = \sum_i e_i \boldsymbol{r}_i. \tag{21.9}$$

Si, en particular, sólo tenemos dos cargas $+e$ y $-e$ a la distancia l

$$\boldsymbol{p} = e\boldsymbol{l}, \tag{21.10}$$

donde el vector $\boldsymbol{l}$ está dirigido desde la carga negativa a la positiva (fig. 21.1). Semejante sistema se denomina *dipolo elemental*.

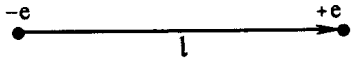

Fig. 21.1

La intensidad del campo eléctrico de un dipolo ha de calcularse derivando el potencial (21.7)

$$\boldsymbol{E}_{\text{dip}} = -\nabla\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = \frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}. \tag{21.11}$$

En coordenadas esféricas (r, ϑ, α) con el eje polar dirigido a lo largo de $\boldsymbol{p}$, los componentes de $\boldsymbol{E}_{\text{dip}}$, tienen el aspecto:

$$E_r = \frac{2p\cos\vartheta}{r^2}, \qquad E_\vartheta = \frac{p\,\text{sen}\,\vartheta}{r^2}, \qquad E_\alpha = 0. \tag{21.12}$$

Ahora examinemos el término cuadripolar en el desarrollo del potencial

$$\varphi_{\text{cuad}} = \frac{Q_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta}{2r^5}. \tag{21.13}$$

Si introducimos el vector unitario $n = r/r$, (21.13) puede ser representada en la forma

$$\varphi_{\text{cuad}} = \frac{Q_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{2r^3}. \tag{21.14}$$

De estas expresiones vemos que $\varphi_{\text{cuad}} \sim 1/r^3$.

Con la mayor frecuencia el término cuadripolar interviene como corrector del potencial de la carga puntual o del dipolo. Pero con una disposición de las cargas suficientemente simétrica, puede convertirse en el principal en el desarrolo del potencial. La fig. 21.2 nos ofrece ejemplos de tales sistemas.

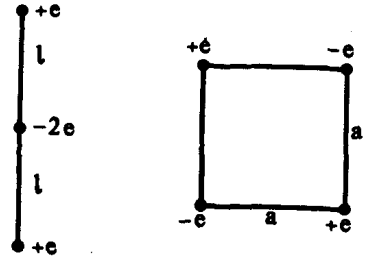

Fig. 21.2

El momento cuadripolar $Q_{\alpha\beta}$ es un tensor de II rango. De la definición (21.6) se deduce que es simétrico

$$Q_{\alpha\beta} = Q_{\beta\alpha} \tag{21.15}$$

y que su huella (la suma de los elementos diagonales) es nula:

$$Q_{\alpha\alpha} = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0. \tag{21.16}$$

Como cualquier otro tensor simétrico $Q_{\alpha\beta}$ puede ser referido a los ejes fundamentales, en los que sólo los elementos diagonales se distinguen de cero y están ligados con las correlaciones (21.16). Por ello, sólo dos de ellos son independientes. Pero si el sistema de cargas tiene simetría axial (Oz es el eje de simetría)

$$Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{2} Q_{33}. \tag{21.17}$$

La magnitud $Q_{33} = Q$, en este caso, recibe el nombre de momento cuadripolar. Con ello, el potencial cuadripolar se simplifica y, en las coordenadas

esféricas, toma el aspecto

$$\varphi_{\text{cuad}} = \frac{Q}{4r^3}(3\cos^2\vartheta - 1) = \frac{Q}{2r^3}P_2(\cos\vartheta), \tag{21.18}$$

donde $P_2(\cos\vartheta)$ es el polimonio de Lagrange.

En el caso cuando la distribución de las cargas es próxima a la de simetría esférica, es más cómodo el desarrollo en una serie según los multipolos en coordenadas esféricas. Empleando el desarrollo

$$\frac{1}{|r - r'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{r'^l}{(2l+1)r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \alpha) Y^*_{lm}(\vartheta', \alpha') \tag{21.19}$$

aducido en el Complemento VII, representemos con $r > r'$ el potencial $\varphi(r)$ en la forma

$$\varphi(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{Q_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \alpha)}{r^{l+1}}. \tag{21.20}$$

Aquí Q_{lm} es un momento multipolar del orden l, m:

$$Q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \rho(r') r'^l Y^*_{lm}(\vartheta', \alpha') dV'. \tag{21.21}$$

§ 22. Energía y fuerzas de interacción en el campo electrostático

22.1. Energía del campo electrostático. La densidad de la energía del campo electrostático se expresa con la fórmula (16.28) para $H = 0$:

$$w = \frac{1}{8\pi} E^2. \tag{22.1}$$

Calculemos la energía total de un sistema acotado de cargas inmóviles

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV, \tag{22.2}$$

donde la integración debe realizarse por todo el espacio. Para un campo eléctrico continuo $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$, por lo que haciendo uso de las reglas de la diferenciación vectorial, hallamos

$$E^2 = -\boldsymbol{E}\cdot\nabla\varphi = -\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\varphi) + \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{E}. \tag{22.3}$$

De acuerdo con (19.1), sustituyamos en el último sumando $\nabla\cdot\boldsymbol{E}$ por $4\pi\rho$ y pongamos (22.3) bajo la integral (22.2). Esto conduce a

$$W = \frac{1}{2}\int \rho\varphi dV - \frac{1}{8\pi}\int \operatorname{div}(\boldsymbol{E}\varphi) dV. \tag{22.4}$$

Para un sistema acotado la última integral se reduce a cero, lo que es fácil de mostrar mediante el teorema de Ostrogradski — Gauss. En efecto

$$\int_{(V)} \operatorname{div}(E\varphi)dV = \oint_{(S_\infty)} E_n \varphi dS,$$

donde S_∞ es una supeficie infinita que abarca todo el espacio. Pero, en correspondencia con (21.4), a grandes distancias del sistema de cargas φ decrece con una lentitud no menor que r^{-1}, y E_n, no menor que r^{-2}, mientras que la propia superficie crece como r^2. Como resultado

$$\oint E_n \varphi dS \to 0$$

y en caso de un sistema electrostático acotado tendremos dos expresiones distintas para la energía total: (22.2) y

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV. \tag{22.5}$$

Empleemos la última fórmula para analizar algunos casos particulares. Supongamos que hay dos sistemas acotados de cargas (fig. 22.1). No es obligatorio que ellos estén separados en el espacio. Designemos con $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r)$ los potenciales electrostáticos creados en el punto prefijado por las

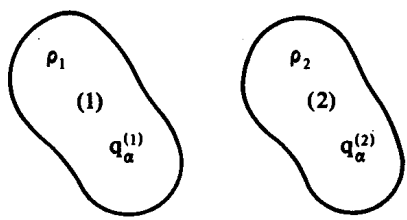

Fig. 22.1

cargas de los sistemas primero y segundo. Haciendo uso del principio de superposición y poniendo en (22.5) $\rho = \rho_1 + \rho_2$ y $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, tendremos

$$W = W_{11} + W_{12} + W_{22}, \tag{22.6}$$

donde

$$W_{11} = \frac{1}{2} \int \rho_1 \varphi_1 dV, \tag{22.7}$$

$$W_{12} = \frac{1}{2} \int (\rho_1 \varphi_2 + \rho_2 \varphi_1) dV. \tag{22.8}$$

La expresión para W_{22} es análoga a (22.7). En las fórmulas (22.5) — (22.8) la integración puede realizarse por todo el espacio, pero las regiones donde ρ es nula no darán aportación.

El desarrollo (22.6) tiene un sencillo sentido físico. Las magnitudes W_{11} y W_{22} son las energías por separado de los sistemas 1 y 2, en tanto que W_{12} su energía mutua o bien la de interacción. En mecánica se denomina energía potencial de interacción. Es evidente que esta energía depende de la disposición mutua de los sistemas, es decir, de sus coordenadas generalizadas $q_\alpha^{(1)}$ y $q_\beta^{(2)}$. Según las reglas generales de mecánica la derivada de la energía potencial por las coordenadas, tomada con signo contrario, determina la fuerza que tiende a aumentar esta coordenada:

$$F_\alpha = -\frac{\partial W_{12}}{\partial q_\alpha^{(1)}}, \qquad F_\beta = -\frac{\partial W_{12}}{\partial q_\beta^{(2)}}. \tag{22.9}$$

La energía de interacción puede ser escrita en forma más compacta si hacemos uso de la fórmula

$$\varphi_{1,2}(r) = \int \frac{\rho_{1,2}(r')dV'}{|r - r'|}. \tag{22.10}$$

Cambiando de lugares las variables de integración r y r' en uno de los sumandos de (22.8), obtenemos

$$W_{12} = \int \frac{\rho_1(r)\rho_2(r')}{|r - r'|} dVdV'. \tag{22.11}$$

De esta anotación se desprende que la energía de interacción puede ser también representada en las formas

$$W_{12} = \int \rho_1 \varphi_2 dV = \int \rho_2 \varphi_1 dV. \tag{22.12}$$

La energía del sistema aislado de una carga puede, asimismo, ser escrita mediante una integral doble del tipo (22.11):

$$W_{11} = \frac{1}{2} \int \frac{\rho_1(r)\rho_1(r')}{|r - r'|} dVdV'. \tag{22.13}$$

Prestemos atención al factor 1/2 que distingue la energía de un sistema de la de interacción de dos sistemas (22.11).

Ahora, consideremos un sistema de cargas puntuales*) $e_1, \ldots, e_N$ que tienen radios vectores $r_1, \ldots, r_N$. Escribiendo

$$\rho(r) = \sum_{a=1}^{N} e_a \delta(r - r_a)$$

*) Hay que señalar que un sistema inmóvil de cargas puntuales sólo puede existir al haber enlaces que fijen la posición de las cargas en el espacio. El equilibrio de un sistema de partículas inmóviles que sólo están en interacción con las fuerzas eléctricas no es estable (esta afirmación, en cuya demostración no nos detendremos, recibe el nombre de teorema de S. Earnshaw).

y poniendo esta suma en la fórmula del tipo (22.13), obtenemos

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a, b=1 \\ a \neq b}}^{N} \frac{e_a e_b}{|r_a - r_b|} + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N} \frac{e_a^2}{|r_a - r_b|}. \qquad (22.14)$$

Aquí, la primera suma, en la que los índices a y b no coinciden, es la energía de interacción del sistema de cargas puntuales. Se puede escribir sin el factor 1/2. tomando en consideración cada término de la suma una sola vez:

$$W_{\text{int}} = \sum_{\substack{a, b=1 \\ a>b}}^{N} \frac{e_a e_b}{|r_a - r_b|}. \qquad (22.15)$$

La segunda suma en (22.14) describe la suma de las energías propias de las cargas puntuales. En ella cada término diverge a causa de la divergencia del potencial coulombiano con $r \to 0$. La evidente absurdidad de este resultado quiere decir que la electrodinámica clásica no puede ser utilizada a pequeñas distancias. Las dificultades que surgen con la divergencia de la energía propia de la carga puntual es fundamental y no sólo se manifiesta en electrodinámica clásica, sino también en la teoría moderna de las partículas elementales, cuya base son la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad. Con el fin de evitar la divergencia de la energía propia hay que considerar que las partículas elementales son extendidas. Pero esto significa, inevitablemente, que ellas tienen estructura interior, es decir, tienen "carácter no elemental".

En vista de la imposibilidad de calcular en los márgenes de electrodinámica clásica la energía propia de un sistema de cargas puntuales, debemos limitarnos al cálculo de la energía de su interacción con la fórmula (22.15).

El tamaño característico de una partícula elemental puede ser apreciado si la examinamos como un objeto extendido clásico. La energía electrostática de una esfera cargada de radio r_0 se anota en la forma $W = \alpha e^2/r_0$, donde α es un factor del orden de la unidad que depende de la distribución de la carga. P. ej., con la distribución superficial uniforme de la carga $\alpha = 1/2$, con la distribución uniforme por el volumen $\alpha = 3/5$, etc. Suponiendo que toda la masa de la partícula tiene origen electromagnético e igualando la energía en reposo mc^2 a su energía electrostática e^2/r_0, obtenemos

$$r_0 = e^2/mc^2. \qquad (22.15')$$

Para un electrón la magnitud $r_0 = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm y se llama *radio clásico del electrón*. Este parámetro aparece en muchos problemas de electrodinámica. No obstante, no se le puede adjudicar el sentido estricto de radio de una partícula elemental, ya que la teoría clásica, en la que nos hemos basado para obtener la apreciación (22.15'), pierde ya su sentido a causa de los efectos cuánticos, a distancias considerablemente grandes $\Lambda = \hbar/mc$ (donde $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{27}$ erg·c es la constante de Planck). Para el electrón $\Lambda = 137 r_0 = 3{,}9 \cdot 10^{-11}$ cm. La magnitud Λ recibe el nombre de *longitud de onda de Compton*.

22.2. Sistema de cargas en un campo externo. Calculemos la energía de un sistema acotado de cargas en un campo eléctrico externo que varía débilmente en los límites del tamaño de sistema (fig. 22.2). Esta condición permite realizar el desarrollo en una serie y expresar la energía por los momentos multipolares del sistema introducidos en el § 21.

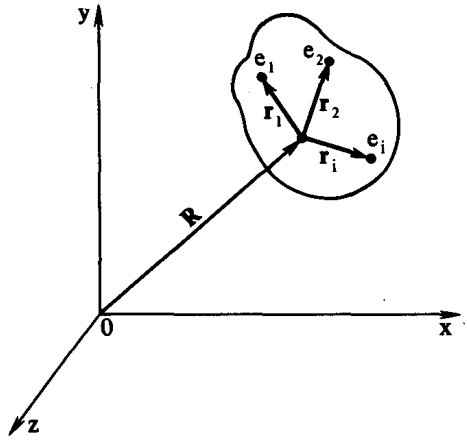

Fig. 22.2

Para mayor precisión vamos a considerar las cargas inmóviles. Hagamos uso de la fórmula (22.12) entendiendo en ella por φ_2 el potencial del campo externo φ. Para las cargas puntuales la indicada fórmula toma el aspecto

$$W = \sum_{i=1}^{N} e_i \varphi(\boldsymbol{R} + r_i). \tag{22.16}$$

Utilicemos la supuesta suavidad del potencial φ en los límites del sistema y desarrollémoslo en la serie exponencial:

$$\varphi(\boldsymbol{R} + r_i) = \varphi(\boldsymbol{R}) + x^i_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} x^i_\alpha x^i_\beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \tag{22.17}$$

Aquí han sido empleadas designaciones tensoriales y la regla de adición de los índices que se repiten.

Si en los márgenes del sistema de cargas que consideramos no hay fuentes del campo externo, el potencial φ de esta región satisface la ecuación de Laplace $\Delta\varphi = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0$. Esto permite escribir en (22.7) el último término del desarrollo en la forma

$$\left(x^{(i)}_\alpha x^{(i)}_\beta - \frac{1}{3} r_i^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \tag{22.18}$$

Poniendo los desarrollos (22.17) y (22.18) en (22.16) tendremos

$$W = q\varphi - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{Q_{\alpha\beta}}{6}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \ldots \tag{22.19}$$

Aquí las magnitudes $\boldsymbol{E}$ y φ se toman con el argumento $\boldsymbol{R}$ y las magnitudes

$$q = \sum_{i=1}^{N} e_i, \qquad p_\alpha = \sum_{i=1}^{N} e_i x_\alpha^{(i)} \tag{22.20}$$

y

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} e_i(3x_\alpha^{(i)}x_\beta^{(i)} - r_i^2\delta_{\alpha\beta})$$

representan la carga total del sistema, sus momentos dipolar y cuadripolar, respectivamente. Las fórmulas (22.20) son análogas de (21.5) — (21.7) que se refieren al caso de las cargas puntuales.

El desarrollo (22.19) se realiza según la razón entre el tamaño del sistema l y la escala L de heterogeneidad del potencial φ. En particular, si φ está creado por una carga puntual que yace en el origen de coordenadas, el parámetro del desarrollo es l/R.

El primer término en (22.19) es la energía de una carga puntual en el campo externo, $W_0 = q\varphi$. Su derivación por $\boldsymbol{R}$ proporciona para la fuerza la conocida expresión:

$$\boldsymbol{F}_0 = -q\nabla\varphi = q\boldsymbol{E}. \tag{22.21}$$

El segundo término

$$W_{\text{dip}} = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E} \tag{22.22}$$

proporciona la energía del dipolo en el campo externo. Calculando su gradiente mediante las fórmulas de la diferenciación vectorial, hallamos la fuerza que actúa sobre el dipolo en el campo externo:

$$\boldsymbol{F}_{\text{dip}} = (\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}. \tag{22.23}$$

Pero la energía del dipolo no sólo depende de las coordenadas, sino también de la orientación de $\boldsymbol{p}$ respecto de $\boldsymbol{E}$. Por eso, en el caso general, sobre el dipolo actúa no sólo una fuerza que tiende a desplazarlo en el espacio, sino también un momento de fuerza torsional. Este último puede ser calculado diferenciando la energía $W_{\text{dip}} = -pE\cos\theta$ por el ángulo entre $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{E}$:

$$N = -\frac{\partial W_{\text{dip}}}{\partial\theta} = -pE\,\text{sen}\,\theta. \tag{22.24}$$

El signo menos nos indica que el momento de fuerza tiende a disminuir el ángulo θ, o sea, orientar el dipolo a lo largo del campo.

§ 23. Potencial de la capa doble

Además de las cargas volumétricas, superficiales y puntuales, son también posibles distribuciones de las cargas eléctricas a lo largo de ciertas líneas (hilos cargados), así como capas eléctricas dobles. Estas son finas capas por un lado de las cuales hay carga positiva de densidad σ y por el otro, carga negativa de densidad $-\sigma$, por lo que en su total la capa es eléctricamente neutra (fig. 23.1).

Sea δ el grosor de la capa (es decir, la distancia entre las superficies con carga positiva y negativa). Vamos a considerar que esta magnitud es pequeña en comparación con todas las demás distancias en el problema. En tal caso, sobre el elemento de superficie de la capa dS corresponderá un momento dipolar eléctrico

$$dp = \sigma \delta dS \tag{23.1}$$

y sobre la unidad de superficie de la capa, el momento dipolar.

$$\vec{k} = \frac{dp}{dS} = \sigma \delta \boldsymbol{n}, \tag{23.2}$$

donde el versor de la normal $\boldsymbol{n}$ debe estar dirigido de la parte negativa de la superficie a la positiva (véase la fig. 23.1).

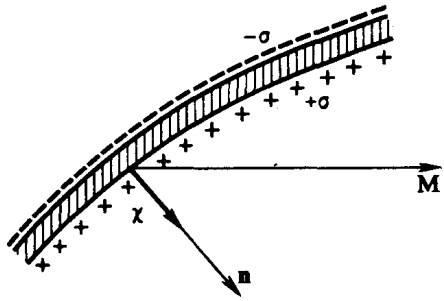

Fig. 23.1

Calculemos el potencial de la capa doble. Hagamos uso del principio de superposición y de la expresión para el potencial del dipolo elemental (21.8), obtenida más arriba:

$$\varphi_M = \int\limits_{(S)} \frac{\vec{k} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} dS. \tag{23.3}$$

Aquí el radio vector $\boldsymbol{r}$ une los puntos de la superficie con el de observación M, en tanto que la integración se lleva a cabo por la superficie ocupada por

la capa doble. A la fórmula (23.3) puede dársele otra forma si advertimos que

$$\frac{\vec{k}\cdot\vec{r}}{r^3}\,dS = \pm k d\Omega, \tag{23.4}$$

donde $d\Omega$ es un elemento del ángulo sólido bajo el que, desde el punto de observación M, vemos el área dS. El signo más, corresponde al caso cuando se ve la parte positiva de la superficie y el signo menos, la negativa.

Mediante (23.4), tendremos

$$\varphi_M = \int\limits_{(\Omega)} (\pm k) d\Omega. \tag{23.5}$$

En particular, si la superficie está orientada de tal modo que en (23.4) el signo es el mismo para todos sus elementos

$$\varphi_M = \pm k\Omega. \tag{23.6}$$

Para una superficie cerrada con capa doble tenemos

$$\varphi_M = \begin{cases} \pm 4\pi k, \text{ el punto } M \text{ en el interior de la superficie;} \\ 0, \text{ el punto } M \text{ en el exterior.} \end{cases} \tag{23.7}$$

Si el punto de observación yace cerca de la superficie de la capa doble es evidente, que

$$\varphi_M = \pm 2\pi k. \tag{23.8}$$

Esto significa que en la propia superficie el potencial sufre un salto:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi k. \tag{23.9}$$

Con esto y debido a que la densidad total de la carga superficial de la capa doble es nula, en la superficie la intensidad del campo es continua:

$$E_{2n} - E_{1n} = 0 \text{ ó bien } \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0. \tag{23.10}$$

Estas condiciones de manera ostensible se distinguen de las condiciones de frontera (19.7) y (19.9) en la superficie cargada.

La superficie de separación sólido — vacío es un ejemplo de sistema físico en el que se realiza la capa doble. Los electrones, que son partículas más ligeras de los iones, pueden hallarse con mayor probabilidad que los núcleos atómicos en la periferia del medio, de modo que la superficie de separación es una capa doble con determinada densidad del momento dipolar. Este momento dipolar superficial puede ser variado si en la superficie del medio se disponen moléculas polares de forma que el vector del momento dipolar de cada una de ellas sea perpendicular a la superficie. Seme-

jante efecto también puede ser alcanzado aplicando sobre la superficie una fina película de un metal alcalino. El átomo de éste puede ceder su electrón al volumen del medio, mientras que en la superficie quedarán los iones del metal cargados positivamente. Esto conduce a la disminución del momento dipolar de la superficie, cuyo valor determina la diferencia de potencial dentro del medio y en el vacío.

Si la superficie de separación es plana y homogénea, el potencial escalar φ del campo eléctrico satisfará la ecuación

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = -4\pi\rho(z). \tag{23.11}$$

Aquí z es la coordenada normal a la superficie de separación. Después de la primera integración la anterior ecuación toma el aspecto

$$\frac{d\varphi}{dz} = -4\pi \int_{-\infty}^{z} \rho(z')dz'$$

y después de la segunda,

$$\varphi(z) - \varphi(-\infty) = -4\pi \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{z'} \rho(z'')dz'' \right] dz'. \tag{23.12}$$

La integral del segundo miembro de esta fórmula la tomamos por partes:

$$\int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{z'} \rho(z'')dz'' \right] dz' = \left[z' \int_{-\infty}^{z'} \rho(z'')dz'' \right] \Bigg|_{-\infty}^{z} - \int_{-\infty}^{z} \rho(z')z'dz' =$$

$$= z \int_{-\infty}^{z} \rho(z')dz' - \int_{-\infty}^{z} dz'z'\rho(z'). \tag{23.13}$$

Si la carga total del medio es nula, $\int_{-\infty}^{z} \rho(z')dz'$ con $z \to \infty$ y en el segundo miembro de (23.13) sólo queda el último sumando

$$\varphi(\infty) - \varphi(-\infty) = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} z\rho(z)dz. \tag{23.14}$$

Así, pues, la diferencia de potencial en la profundidad del medio y en el vacío, a gran distancia del primero, se determina por la densidad superficial del momento dipolar en la superficie de separación. Como el trabajo para el desplazamiento de la carga unitaria del medio al vacío es la diferencia $\varphi(\infty) - \varphi(-\infty)$, esta última magnitud suele llamarse *trabajo de salida*.

Capítulo V. Campo magnético continuo en el vacío

§ 24. Propiedades generales del campo magnético continuo en el vacío

24.1. Ecuaciones fundamentales. Al no haber dependencia del tiempo la intensidad de campo magnético satisface el sistema de ecuaciones (14.6):

$$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} j, \tag{24.1}$$

$$\operatorname{div} H = 0. \tag{24.2}$$

Como $\partial\rho/\partial t = 0$ de la ecuación de continuidad sigue la condición necesaria para que las corrientes sean estacionarias:

$$\operatorname{div} j = 0. \tag{24.3}$$

Es posible obtener esta última relación de la ecuación (24.1) aplicando a sus dos miembros la operación div. Señalemos que para la existencia de la corriente, $j \neq 0$, es necesario que las cargas estén en movimiento. Por esta razón, el campo magnético continuo puede crearse por un sistema de cargas estacionario, pero no estático.

Al calcular los campos magnéticos de las distribuciones simétricas de corrientes, es útil la forma integral de la ecuación (24.1). Se obtiene de (14.15) con $E = 0$ o bien directamente de (24.1) integrando por una superficie no cerrada S arbitraria:

$$\oint_l H dl = \frac{4\pi}{c} \int_{(S)} j \cdot dS. \tag{24.4}$$

Aquí l es el contorno sobre el que se apoya la superficie S, mientras que la integral en el segundo miembro es la intensidad de la corriente que fluye por la superficie S.

Apliquemos la ecuación (24.4) para calcular el campo magnético creado por un conductor cilíndrico largo de radio a con corriente J, distribuida uniformemente por la sección. Basándonos en la simetría cilíndrica del sistema suponemos que las líneas de fuerza son circunferencias con sus centros en el eje del conductor. Eligiendo en calidad del contorno l semejante circunferencia, hallamos

$$\oint H dl = 2\pi r H;$$

en el segundo miembro de la igualdad con $j = J/\pi a^2 = \text{const}$, tenemos

$$\int j dS = \begin{cases} J\left(\frac{r}{a}\right)^2, & r < a; \\ J, & r > a; \end{cases}$$

de esta manera

$$H = \begin{cases} \frac{2J}{ca^2} r, & r < a \\ \frac{2J}{cr}, & r > a. \end{cases} \tag{24.4a}$$

La ecuación (24.2) permite presentar $H(r)$ en forma del rotor de cierto vector $A(r)$, es decir, de potencial vectorial:

$$H = \mathrm{rot} A. \tag{24.5}$$

Esta representación es un caso particular de (8.13). En virtud de la falta de univocidad del potencial vectorial (transformación gradiental $\tilde{A} = A + \mathrm{grad}\chi$ no varía el valor de $H(r)$) puede sobreponerse una condición adicional. Las condiciones de calibración de Lorentz (18.3) y de Coulomb (18.7) para los campos continuos coinciden:

$$\mathrm{div} A = 0. \tag{24.6}$$

el potencial vectorial satisface la ecuación de Poisson

$$\Delta A = -\frac{4\pi}{c} j \tag{24.7}$$

que es un caso particular de la ecuación (18.5) para A y puede obtenerse poniendo (24.5) en (24.1).

Escribamos la solución de la ecuación (24.7) para el caso de un sistema acotado de corrientes estacionarias, partiendo de la analogía con la ecuación de electrostática (19.5). La última ecuación para un sistema acotado de cargas tiene la solución (20.4). Debido a la igualdad de las ecuaciones (19.5) y (24.7), la solución para el potencial vectorial puede escribirse en la forma

$$A(r) = \frac{1}{c} \int \frac{j(r')}{R} dV', \tag{24.8}$$

donde $R = r - r'$.

Indiquemos que la solución (24.8) satisface la condición adicional (24.6). En efecto, aplicando a (24.8) la operación div y cambiando el orden de derivación por las coordenadas r la integración dV', obtenemos

$$\mathrm{div} A = \frac{1}{c} \int \nabla \cdot \frac{j(r')}{R} dV'. \tag{24.9}$$

Señalemos que

$$\nabla \cdot \frac{j(r')}{R} = -\nabla' \cdot \frac{j(r')}{R}, \tag{24.10}$$

donde con ∇' está designado el operador de Hamilton, que actúa sobre la coordenada r', además, ha sido tomada en consideración la condición (24.3). Pongamos (24.10) en (24.9) y empleemos el teorema de Ostrogradski — Gauss:

$$\mathrm{div} A(r) = -\frac{1}{c} \int \frac{j_n(r')}{R} dS.$$

La última integral se toma por una superficie alejada infinitamente y se reduce a cero si $j_n(r')$ decrece con $r' \to \infty$ con mayor rapidez que r'^{-1}. Aquí termina la demostración de la igualdad (24.6) para el potencial vectorial (24.8).

24.2. Ley de Biot — Savart. La fórmula (24.8) nos permite escribir en forma de una integral por el volumen la intensidad H del campo magnético creado por un sistema acotado de corrientes. Apliquemos a (24.8) la operación rot y hagamos uso de (24.5). Esto conduce a

$$H(r) = \frac{1}{c} \int \nabla \times \frac{j(r')}{R} dV'. \tag{24.11}$$

A continuación, empleando la regla de derivación vectorial, hallamos

$$\nabla \times \frac{j(r')}{R} = \frac{1}{R} \nabla \times j(r') - j(r') \times \nabla \left(\frac{1}{R}\right). \tag{24.12}$$

Como $\nabla \times j(r') = 0$, ya que $j(r')$ no depende del vector r sobre el que actúa ∇ y $\nabla(1/R) = R/R^3$,

$$\nabla \times \frac{j(r')}{R} = \frac{j(r') \times R}{R^3} \tag{24.13}$$

y

$$H(r) = \frac{1}{c} \int \frac{j(r') \times R}{R^3} dV'. \tag{24.14}$$

La fórmula (24.14) muestra que el elemento de volumen dV', por el que fluye una corriente de densidad j, crea un campo magnético

$$dH(r) = \frac{j(r') \times R}{cR^3} dV' \tag{24.15}$$

(ley de Biot — Savart).

Si el campo es creado por una corriente cuasilineal cerrada que fluye a lo largo de cierto contorno l, en las fórmulas (24.14), (24.15) será preciso realizar una evidente sustitución

$$j\,dV' \to J dl, \tag{24.16}$$

donde J es la intensidad de la corriente en el contorno. Un pequeño elemento de corriente cuasidimensional crea un campo

$$dH(r) = \frac{J}{c} \frac{dl \times R}{R^3}, \tag{24.17}$$

mientras que el campo magnético total se obtiene integrando (24.17) por todo el contorno.

La ley de Biot — Savart puede considerarse como la base de la magnetostática y partiendo de ella, podemos llegar a las ecuaciones (24.1), (24.2).

24.3. Potencial seudoescalar del campo magnético y hojas magnéticas. Debido a que el empleo del potencial vectorial del campo magnético es menos cómodo que la aplicación del potencial escalar en electrostática, surge la pregunta ¿es también posible para el campo magnetostático introducir cierto potencial seudoescalar*) $\psi(r)$?

Examinemos con mayor detalle esta posibilidad. Sea

$$H(r) = -\operatorname{grad}\psi(r). \tag{24.18}$$

Como, de acuerdo con (24.1), $\operatorname{rot} H = (4\pi/c)j$ y de (24.18) se deduce que $\operatorname{rot} H = -\operatorname{rot}\operatorname{grad}\psi = 0$, la fórmula (24.18) sólo puede ser justa en las regiones donde $j = 0$.

En tales regiones el potencial ψ debe satisfacer la ecuación de Laplace

$$\Delta\psi = 0 \tag{24.19}$$

que sigue de (24.2), (24.18) y, por sí, expresa el hecho de la carencia en la naturaleza de cargas magnéticas $\rho_m = 0$. Pero incluso en las regiones donde $j = 0$ y, desde el punto de vista formal, puede introducirse el potencial escalar ψ, éste posee una desagradable propiedad: multiformidad.

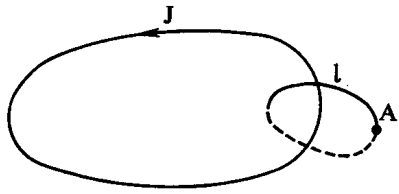

Fig. 24.1

Ilustremos esto en el ejemplo de un contorno cuasilineal con corriente (fig. 24.1). Elijamos para la integración el contorno arbitrario l que abarca el circuito con corriente J. Calculemos el valor del potencial en el punto A después de circular por este contorno:

$$\tilde{\psi}_A = \psi_A + \oint_{(l)} d\psi. \tag{24.20}$$

Si $\psi(r)$ fuese una función unívoca continua de las coordenadas, $\oint_{(l)} d\psi = 0$. Pero en realidad

$$\oint_{(l)} d\psi = \oint_{(l)} \nabla\psi dl = -\oint_{(l)} H \cdot dl = -\frac{4\pi}{c} J, \tag{24.21}$$

*) Recordemos que H es un seudovector.

y, por lo tanto,

$$\psi_A - \tilde{\psi}_A = \frac{4\pi}{c} J. \tag{24.22}$$

La última relación nos muestra que $\psi_A(r)$ es una función unívoca de las coordenadas y después de circular por cualquier contorno cerrado, abarcado por un circuito con corriente, adquiere el incremento $4\pi J/c$, donde J es la corriente total que fluye por la superficie arbitraria que se apoya en el contorno de integración.

Prestemos atención a la similitud entre (24.22) y las condiciones de frontera (23.9) en la superficie de la capa eléctrica doble: en (24.22) el papel de potencia de la capa es desempeñado por la magnitud

$$k_m = J/c. \tag{24.23}$$

La segunda condición de frontera, análoga a (23.10), también se cumple en cualquier superficie, ya que la componente normal del campo magnético es continua:

$$\partial\psi_2/\partial n = \partial\psi_1/\partial n. \tag{24.24}$$

Así, pues, el contorno cuasilineal con corriente es matemáticamente equivalente a la capa magnética doble, llamada también hoja magnética. Es de remarcar que el sentido de las hojas magnéticas es puramente formal. La posición de la superficie de la hoja magnética no es unívoca y en ella no hay cargas magnéticas reales o corrientes. La propia introducción del potencial escalar del campo magnético y la noción de las hojas magnéticas ligada con él es útil para resolver ciertos problemas magnetostáticos.

24.4. Fórmula de Ampére. En un campo magnético sobre una partícula cargada de pequeño tamaño actúa la fuerza de Lorentz

$$\bar{\mathscr{F}} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \boldsymbol{H}. \tag{24.25}$$

Hallemos la fuerza que actúa sobre un pequeño elemento macroscópico dl de corriente cuasilineal. Sea que las partículas están en movimiento a una velocidad v por un conductor de sección S. Su concentración es n y la densidad de corriente se da con la fórmula $j = \rho\mathbf{v} = en\mathbf{v}$. La magnitud $J = jS$ será la intensidad de la corriente en el conductor, mientras que el elemento de su volumen será escrito $dV = Sdl$.

La fuerza dF que actúa en el elemento dl del conductor es obtenida sumando (24.25) por todas las partículas dentro de volumen dV:

$$dF = \sum_{(dV)} \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \boldsymbol{H}] = \frac{endV}{c} [\mathbf{v} \times \boldsymbol{H}] = \frac{envS}{c} [dl \times \boldsymbol{H}] = \frac{J}{c} [dl \times \boldsymbol{H}].$$

Aquí ha sido utilizado el hecho del paralelismo de v y dl, así como la constancia de H en los márgenes del pequeño volumen dV. La última fórmula

$$dF = \frac{J}{c}[dl \times H] \tag{24.26}$$

recibe *el nombre de Ampére.*

La fuerza que actúa sobre un pequeño elemento de corriente volumétrica es obtenida de (24.26) por la sustitución $Jdl \to jdV$:

$$dF = \frac{1}{c}[j \times H]dV = fdV, \tag{24.27}$$

donde

$$f = \frac{1}{c} j \times H \tag{24.28}$$

es la densidad de la fuerza (referida a la unidad de volumen).

§ 25. Momento magnético

En este parágrafo calcularemos el campo magnético a grandes distancias de un sistema acotado de corrientes estacionarias. Este problema se parece al que resolvimos en el § 21 y que se reduce al desarrollo del potencial vectorial (24.8) por los momentos multipolares. Pero aquí sólo nos limitaremos a tomar en cuenta el miembro dipolar.

Sea que las corrientes fluyen en un volumen finito de dimensión lineal l. Si la distancia hasta el punto de observación $r \gg l$, en el desarrollo (21.1) podemos limitarnos al término lineal por l/r:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{r \cdot r'}{r^3}. \tag{25.1}$$

Sustituyendo este dasarrollo en (24.8), obtendremos

$$A(r) = \frac{1}{cr}\int j(r')dV' + \frac{1}{cr^3}\int (r \cdot r')j(r')dV'. \tag{25.2}$$

Mostremos que

$$\int j(r')dV' = 0. \tag{25.3}$$

Con ello, partimos de la identidad

$$\operatorname{div}'[(a \cdot r')j(r')] = a \cdot j(r'), \tag{25.4}$$

donde a es un vector constante arbitrario, en tanto que div′ se toma por las coordenadas r'. En (25.4) se ha hecho uso de la condición de que las corrientes son estacionarias $\operatorname{div}' j(r') = 0$. Integrando (25.4) por todo el espacio y empleando el teorema de Ostrogradski — Gauss, tendremos

$$\int a \cdot j(r')dV' = \int j_n(r')(a \cdot r')dS = 0,$$

ya que $j_n = 0$ en una superficie infinitamente alejada. Debido a la arbitrariedad del vector a, de la última igualdad sigue (25.3). Esto significa que en el caso dado, el término análogo al potencial coulombiano no existe.

Transformemos ahora en (25.2) la segunda integral. Partiendo de la identidad

$$[r' \times j(r')] \times r = j(r')(r \cdot r') - r'(j \cdot r). \tag{25.5}$$

En el último sumando sustituimos $j \cdot r = \operatorname{div}'[j(r \cdot r')]$. A continuación, multiplicamos en forma escalar los dos miembros de esta igualdad por el vector constante arbitrario a y la integramos por todo el espacio:

$$a\left[\int [r' \times j(r')]dV' \times r\right] = \\ = a\int j(r')(r \cdot r')dV' - \int (a \cdot r') \operatorname{div}'[j(r')(r \cdot r')]dV'. \tag{25.6}$$

Esta última integral se transforma mediante la identidad

$$(a \cdot r') \operatorname{div}'[j(r')(r \cdot r')] = \operatorname{div}'[j(r \cdot r')(a \cdot r')] - (a \cdot j)(r \cdot r').$$

Después de la integración por todo el espacio y de emplear el teorema de Ostrogradski — Gauss, el sumando en el primer miembro que contiene div′ se reduce a cero. Como resultado, la igualdad (25.6) toma el aspecto

$$a\left[\int [r' \times j(r')]dV' \times r\right] = 2a\int j(r')(r \cdot r')dV'. \tag{25.7}$$

Debido a la arbitrariedad del vector a, de (25.7) se desprende:

$$\int [r' \times j(r')]dV' \times r = 2\int j(r')(r \cdot r')dV'. \tag{25.8}$$

Sustituyendo (25.3) y (25.8) en el desarrollo (25.2), obtendremos

$$A(r) = \frac{M \times r}{r^3}, \tag{25.9}$$

donde el vector

$$M = \frac{1}{2c}\int [r \times j(r)]dV \tag{25.10}$$

recibe el nombre de *momento magnético dipolar.*

Las fórmulas (25.9) y (25.10) resuelven el problema de cálculo del potencial vectorial lejos del sistema de corrientes estacionarias. Indiquemos que el momento magnético M es invariante con relación al desplazamiento del sistema de referencia: la sustitución de r por $r + a$, a causa de la igualdad (25.3), no varía la integral en (25.10).

Como ejemplo de empleo de la fórmula (25.10) calculemos el momento magnético de un contorno plano con corriente continua J que yace en el plano xy (fig. 25.1). Realizando la sustitución $jdV \to Jdl$ (véase (24.16)), escribimos

$$M = \frac{J}{2c}\oint [r \times dl]. \tag{25.11}$$

Es fácil ver que el valor del vector $1/2\,[r \times dl]$ es igual al área del triángulo sombreado y está dirigido a lo largo de la normal n al plano del contorno. Así, pues,

$$\frac{1}{2}\oint [r \times dl] = Sn, \tag{25.12}$$

donde S es el área acotada por el contorno con corriente. Como resultado, el momento magnético de un contorno plano con corriente deberá ser escrito

$$M = \frac{J}{c} Sn. \tag{25.13}$$

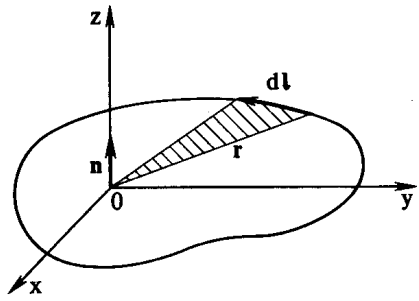

Fig. 25.1

Consideremos, como segundo ejemplo, el cálculo del momento magnético creado por un sistema de partículas cargadas. Sea que las cargas y masas de las partículas son iguales a e_i y m_i, respectivamente ($i = 1, 2, \ldots, N$). Utilizando la fórmula (13.14) para la densidad de corriente

$$j = \sum_a e_a \mathbf{v}_a \delta(r - r_a), \tag{25.14}$$

obtendremos de (25.10)

$$M = \sum_i \frac{e_i}{2c} [r_i \times \mathbf{v}_i] = \sum_i \frac{e_i}{2m_i c} [r_i \times p_i]. \tag{25.15}$$

Aquí, $p_i = m_i \mathbf{v}_i$ es el impulso de la partícula, en tanto que

$$l_i = r_i \times p_i, \tag{25.16}$$

el momento del impulso respecto del origen de coordenadas.

De tal manera,

$$M = \sum_i \frac{e_i}{2m_i c} l_i. \tag{25.17}$$

Esta fórmula se simplifica en caso de la identidad de las partículas, cuyas cargas y masas (o bien sus razones) son iguales:

$$M = \frac{e}{2mc} L, \tag{25.18}$$

donde $L = \sum_i l_i$ es el momento total del impulso del sistema de partículas.

En particular, la fórmula (25.18) siempre es justa para una partícula cargada independiente que realiza un movimiento finito en cierto campo exterior. El coeficiente de proporcionalidad entre los momentos mecánico y magnético

$$\eta = e/2mc \tag{25.19}$$

se determina con la razón entre la carga de la partícula y su masa.

La relación (25.18) proporciona la ligazón entre los momentos mecánico y magnético creados por el movimiento de partículas cargadas en el espacio. Pero para muchas partículas tanto cargadas (electrones, protones), como neutrales (neutrones, átomos), es también propio el momento magnético interno de espín, determinado por su estructura interior. Entre los momentos magnético M_s y el momento mecánico L_s se cumple la relación del tipo (25.18)

$$M_s = \eta_s L_s,$$

pero el coeficiente de proporcionalidad η_s no coincide con (25.19) y es diferente para diversas partículas. El momento magnético (de espín) es un fenómeno cuántico inexplicable por la electrodinámica clásica.

Retornemos a la fórmula (25.9) y calculemos la intensidad del campo magnético $H = \operatorname{rot} A$ distanciado del sistema de corrientes. Tenemos

$$H = \nabla \times \frac{M \times r}{r^3} = \frac{1}{r^3} \nabla \times [M \times r] - [M \times r] \times \nabla \left(\frac{1}{r^3}\right)$$

y

$$\nabla \times [M \times r] = M(\nabla \cdot r) - (M \cdot \nabla) r = 2M, \qquad \nabla \left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3r}{r^5},$$

por lo tanto

$$H = \frac{3r(M \cdot r)}{r^5} - \frac{M}{r^3}. \tag{25.20}$$

Señalemos que la fórmula (25.19) coincide con una precisión hasta las designaciones con la intensidad del campo del dipolo eléctrico (21.11). Los componentes esféricos de H tienen el aspecto

$$H_r = \frac{2M \cos \vartheta}{r^2}, \qquad H_\vartheta = \frac{M \operatorname{sen} \vartheta}{r^2}, H_\alpha = 0, \tag{25.21}$$

(comp. con (21.12)). La forma de las líneas de fuerza de los dipolos eléctrico y magnético es la misma.

§ 26. Energía y fuerzas en el campo magnético continuo

26.1. Energía magnética de las corrientes estacionarias. Calculemos la energía magnética total de un sistema acotado de corrientes estacionarias. Partiendo de la expresión para la densidad, la energía magnética (fórmula (16.28) para $E = 0$):

$$w = H^2/8\pi. \tag{26.1}$$

Haciendo uso de las identidades $\operatorname{div}[H \times A] = A \cdot \operatorname{rot} H - H \cdot \operatorname{rot} A$ y de la fórmula (24.5), hallamos

$$w = \frac{\operatorname{div}[H \times A]}{8\pi} + \frac{A \cdot \operatorname{rot} H}{8\pi}. \tag{26.2}$$

La energía total es proporcionada por la integral de w por todo el espacio. La integral volumétrica de $\operatorname{div}[H \times A]$ se transforma en una integral por una superficie infinitamente alejada y se anula debido al decrecimiento rápido del producto $[H \times A] \sim r^{-5}$ a grandes distancias del sistema. Expresemos el factor $\operatorname{rot} H$ por j con ayuda de la ecuación (24.1). Como resultado obtenemos la energía magnética total del sistema en la forma

$$W = \frac{1}{2c} \int j \cdot A dV. \tag{26.3}$$

La expresión hallada es análoga a la fórmula (22.5) para la energía electrostática.

26.2. Energía de un sistema de contornos con corriente. Coeficientes de autoinducción e inducción mutua. Sea que hay varios conductores con corriente. Escribamos $A = \sum_a A_a$, donde A_a es el potencial vectorial creado por el a-ésimo conductor. Debido a la linealidad de las ecuaciones de electrodinámica el valor de A_a no depende de la presencia de otros conductores y la intensidad de la corriente en ellos. Mediante (26.3), obtenemos

$$W = \sum_a W_{aa} + \sum_{a>b} W_{ab}, \tag{26.4}$$

donde

$$W_{aa} = \frac{1}{2c} \int j_a \cdot A_a dV \tag{26.5}$$

es la energía magnética propia del a-ésimo conductor,

$$W_{ab} = \frac{1}{2c} \int j_a \cdot A_b dV_a + \frac{1}{2c} \int j_b \cdot A_a dV_b \tag{26.6}$$

es la energía de interacción de los conductores a y b. La integración se realiza por el volumen de los conductores. Las dos integrales en el segundo

miembro de la última igualdad son iguales, de lo que podemos cerciorarnos con facilidad mediante la fórmula (24.8). Al aplicar la fórmula indicada encontremos

$$W_{ab} = \frac{1}{c^2}\int \frac{j_a(r)\cdot j_b(r')}{|r - r'|}\, dV_a dV'_b. \tag{26.7}$$

La densidad de corriente en el conductor y el campo creado por él son proporcionales a la intensidad de la corriente: $j_a \sim J_a$, $A_a \sim J_a$. Por esto, las energías propia y mutua de los conductores pueden ser escritas en la forma

$$W_{aa} = \frac{J_a^2}{2c^2} L_{aa},\ W_{ab} = \frac{J_a J_b}{c^2} L_{ab}, \tag{26.8}$$

donde L_{aa}, $L_{ab} = L_{ba}$ son coeficientes que no dependen de la intensidad de la corriente, pero dependen de la forma y las dimensiones de los conductores, de su disposición mutua, así como, hablando en general, de la distribución de la corriente por sus secciones. Respectivamente, reciben el nombre de *coeficientes de autoinducción y de inducción mutua*.

Cuando tratamos conductores cuasilineales, cuyo grosor es pequeño en comparación con su longitud, sustituyendo en (26.7) $jdV \to Jdl$ y comparando el resultado con (26.8), hallaremos para el coeficiente de inducción mutua una expresión en forma de una integral doble de contorno:

$$L_{ab} = \oint\oint \frac{dl_a \cdot dl_b}{R_{ab}}. \tag{26.9}$$

Aquí vemos que L_{ab} tiene la dimensión de la longitud, con la particularidad de que por el orden de la magnitud $L_{ab} \approx l_1 l_2/R$, donde l_1 y l_2 son las longitudes de los conductores, R, la distancia media entre ellos.

Sin embargo, la aproximación de un conductor infinitamente fino no es aplicable al calcular el coeficiente de autoinducción, ya que ella conduce a la divergencia de la correspondiente integral. Por esto, ese coeficiente debe calcularse mediante la energía magnética:

$$L_{aa} = 2c^2 W_{aa}/J_a^2. \tag{26.10}$$

P. ej., apreciemos según su orden el valor de la autoinducción de un conductor fino cerrado de radio a y longitud $l \gg a$. A distancias $r \ll l$ del eje del conductor su campo poco se diferencia de el de un conductor recto. Considerando la distribución de la corriente uniforme por la sección y utilizando la fórmula (24.4a), la energía magnética dentro del conductor puede ser escrita en la forma

$$W_{aa}^{(i)} = \int_{r<a} \frac{H^2}{8\pi} 2\pi r dr dl = \frac{J^2 l}{4c^2}.$$

Para la energía acumulada en el exterior, tendremos

$$W_{aa}^{(l)} = \int_{r>a} \frac{H^2}{8\pi} 2\pi r dr dl = \frac{J^2}{c^2}\int_{r>a} \frac{dr dl}{r}.$$

El integrando describe el campo correctamente sólo a distancias $r \ll l$. Con $r \gg l$ el campo decrece con considerable rapidez, $H \sim r^{-3}$, ya que a tales distancias el circuito con corriente puede considerarse como un dipolo magnético y la integral converge. Obtendremos la apreciación $W_{aa}^{(l)}$ según el orden de la magnitud, si cortamos la integral por r a una distancia del orden de l:

$$W_{aa}^{(l)} \approx \frac{J^2}{c^2} l \ln (l/a).$$

De esta apreciación vemos que $W_{aa}^{(i)}$ es menor que $W_{aa}^{(l)}$ en el factor $\ln (l/a)$ y si dicho logaritmo es grande

$$L_{aa} \approx 2c^2 W_{aa}^{(l)}/J_a^2 \approx 2l \ln (l/a). \tag{26.11}$$

Establezcamos la ligazón entre los coeficientes de inducción y los flujos magnéticos para un sistema de conductores cuasilineales. En la fórmula (26.5) sustituyamos $j_a dV_a$ por $J_a dl_a$, donde dl_a es un elemento de la línea axial de un conductor cuasilineal cerrado. Obtenemos

$$W_{aa} = \frac{J_a}{2c} \oint A_a dl_a = \frac{J_a}{2c} \int H_a dS_a = \frac{1}{2c} J_a \Phi_{aa}, \tag{26.8a}$$

donde Φ_a es el flujo de la intensidad del campo magnético creado por la corriente en el conductor que pasa por una superficie acotada por la línea axial del conductor. Al pasar a la integración por el circuito despreciamos la no homogeneidad del campo propio de la corriente en los límites del grosor de conductor. Esto es tolerable para un conductor fino, ya que, como vimos más arriba, la región interior introduce pequeña aportación.

Una transformación análoga nos proporciona

$$W_{ab} = \frac{1}{c} J_a \Phi_{ab} = \frac{1}{c} J_a \Phi_{ba}, \tag{26.8b}$$

donde $\Phi_{ab} = \int H_b dS_a$ es el flujo magnético creado por el contorno b a través del contorno a. Mediante la comparación de las dos últimas fórmulas con (26.7), hallamos

$$\Phi_{aa} = L_{aa} J_a/c, \qquad \Phi_{ab} = L_{ab} J_b/c, \tag{26.12}$$

es decir, las inductancias participan como coeficientes de proporcionalidad entre los correspondientes flujo magnético e intensidad de la corriente.

26.3. Sistema de corrientes en el campo exterior. Hagamos uso de la expresión (26.6) para calcular la energía de interacción de un pequeño sistema de corrientes estacionarias con campo magnético exterior débilmente no homogéneo en los límites del sistema de corrientes que examinamos. Eligiendo el origen de referencia O' dentro del sistema considerado (fig. 26.1), representemos el potencial vectorial del campo exterior en la forma

$$A(R + r) = A(R) + (r \cdot \nabla) A(R), \tag{26.13}$$

donde el operador ∇ actúa sobre las coordenadas $\boldsymbol{R}$. La energía buscada se expresará así

$$W = \frac{1}{c}\int j(r)\cdot A(R)dV + \frac{1}{c}\int j(r)\cdot(r\cdot\nabla)A(R)dV. \qquad (26.14)$$

Aquí la integración se realiza por las coordenadas del vector r. Debido a la igualdad (25.3) la primera integral se anula. La segunda se transforma mediante la fórmula (25.8), en la que r conviene ser sustituida por el vector ∇:

$$\frac{1}{c}\int j(r)(r\cdot\nabla)dV = \frac{1}{2c}\int [r\times j(r)]dV\times\nabla = M\times\nabla. \qquad (26.15)$$

y empleada la definición de momento magnético (25.10).

Con el fin de obtener la segunda integral en la igualdad (26.14) hay que multiplicar de forma escalar (26.15) por $A(R)$, lo que nos permite escribir:

$$W_{\text{int}} = [M\times\nabla]\cdot A(R) = M\cdot H, \qquad (26.16)$$

donde $H(R) = \nabla\times A(R)$ es la tensión del campo magnético exterior.

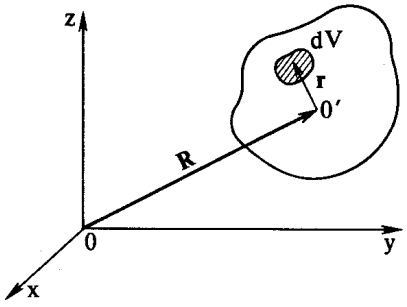

Fig. 26.1

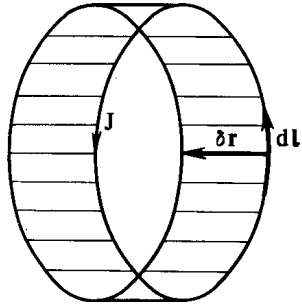

Fig. 26.2

26.4. Fuerzas en el campo magnético continuo. Calculemos la fuerza que actúa sobre un contorno con corriente ubicado en un campo magnético. Es cómodo partir de la expresión para el trabajo elemental δA de un campo magnético con el fin de desplazar cada elemento del circuito dl a una pequeña distancia δr (fig. 26.2):

$$\delta A = \oint_{(l)} dF\cdot\delta r = \frac{J}{c}\oint_{(l)}\cdot[dl\times H]\cdot\delta r = \frac{J}{c}\oint_{(l)} H\cdot[\delta r\times dl] =$$

$$= \frac{J}{c}\oint_{(\delta S)} H\cdot dS = \frac{J}{c}\delta\Phi. \qquad (26.17)$$

Al escribir esta secuencia de igualdades hemos utilizado la fórmula de Ampére (24.26). Con δS está designada la superficie descrita por el circuito con

corriente que examinamos durante su desplazamiento y deformación. Así, pues, $\delta\Phi$ es el flujo magnético adicional que pasa por el contorno. Esto significa que la fórmula obtenida (26.17) proporciona la expresión para el trabajo elemental con el desplazamiento lento (adiabático) del circuito cuando es posible despreciar en él la variación de la corriente a cuenta de la inducción electromagnética.

Es de señalar que la magnitud en el segundo miembro de (26.17) es el incremento de la energía magnética (26.8,b) de circuito con corriente en el campo magnético exterior:

$$\frac{J}{c}\delta\Phi = \delta W_{\text{int}}. \tag{26.18}$$

Si introducimos la magnitud

$$U = -W_{\text{int}} = -\frac{J}{c}\Phi, \tag{26.19}$$

que recibe el nombre de *función potencial* del circuito con corriente en el campo magnético, para el trabajo elemental obtenemos la forma

$$\delta A = -\delta U \tag{26.20}$$

es decir, lo mismo que en mecánica el trabajo se expresa por medio de la energía potencial. Pero como, por otro lado, el trabajo está ligado con las fuerzas generalizadas Q_i y el incremento de las coordenadas generalizadas δq_i mediante la fórmula corriente

$$\delta A = \sum_i Q_i \delta q_i, \tag{26.21}$$

al comparar (26.20) con (26.21) hallamos la expresión para las fuerzas generalizadas

$$Q_i = -\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)\dot{J}. \tag{26.22}$$

Como se desprende de la última relación, así como de (26.20), la magnitud U, al calcular las fuerzas, desempeña el mismo papel que la energía potencial. Pero, como el campo magnético no es potencial, dicha magnitud no es denominada energía potencial, sino función potencial.

Aunque hemos demostrado la fórmula $U = -W$ sólo para el caso del circuito con corriente, ella también es válida para otros sistemas (la demostración de esto no va a ser aducida).

En particular, para el dipolo magnético en el campo exterior

$$U = -\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{H}. \tag{26.23}$$

Esta expresión conduce al siguiente valor de la fuerza que actúa sobre el dipolo:

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U = (\boldsymbol{M}\cdot\nabla)\boldsymbol{H} \tag{26.24}$$

y al momento de fuerza:

$$N = M \times H \tag{26.25}$$

(comp. con las correspondientes fórmulas (22.23) y (22.24) para el dipolo eléctrico).

Capítulo VI. Ondas electromagnéticas

§ 27. Ecuaciones de onda

27.1. Ecuaciones del campo electromagnético al no haber cargas. El sistema de ecuaciones de Maxwell para $\rho = j = 0$ toma el aspecto (14.17):

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} H = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}, \tag{27.1}$$
$$\operatorname{div} E = 0, \qquad \operatorname{div} H = 0.$$

Para cada uno de los vectores E, H por separado es fácil obtener ecuaciones de II orden. Apliquemos la operación rot a la primera ecuación, lo que conduce a

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} H = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \tag{27.2}$$

donde también hemos hecho uso de la ecuación para $\operatorname{rot} H$. De inmediato transformamos:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} E = \nabla \times (\nabla \times E) = \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E = -\Delta E, \tag{27.3}$$

ya que $\operatorname{div} E = \nabla \cdot E = 0$. En resumen (27.2) toma la forma de la ecuación de onda de d'Alembert:

$$\Delta E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \tag{27.4}$$

Exactamente de este mismo modo obtenemos la ecuación de onda para H:

$$\Delta H - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0. \tag{27.5}$$

Pasemos ahora al problema de la más cómoda elección de los potenciales electromagnéticos para describir el campo al no haber cargas. Como ya sabemos, en el caso general, necesitamos una magnitud de cuatro componentes (φ, A). Hagamos uso de la transformación de calibración

$$\tilde{A} = A + \nabla\chi, \qquad \tilde{\varphi} = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}$$

con el fin de reducir el potencial escalar a cero: $\tilde{\varphi} = 0$. Elijamos la calibración de Lorentz y empleemos la ecuación (18.6). Diferenciándola según el tiempo, hallamos

$$\Box \frac{\partial \chi}{\partial t} = 0.$$

Pero, de acuerdo con (18.5), a semejante ecuación también satisface el potencial escalar para $\rho = 0$:

$$\Box \varphi = 0.$$

Por ello, podemos elegir χ de tal manera que $\frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} = \varphi$, es decir, $\tilde{\varphi} = 0$.

Ahora, omitiendo en el potencial vectorial el símbolo "tilde", escribimos las fórmulas que ligan a ésta con las intensidades del campo $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}. \tag{27.6}$$

El potencial vectorial, para $j = 0$, satisface la ecuación de onda homogénea

$$\Box \boldsymbol{A} = 0 \tag{27.7}$$

y las condiciones de Lorentz (18.3) y de Coulomb (18.7) coinciden:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0. \tag{27.8}$$

Debemos señalar que la elección de la calibración con la que $\varphi = 0$ no es invariante desde el punto de vista relativista: en otro sistema de referencia inercial el potencial φ', que es uno de los componentes del 4-vector, será diferente de cero y para anularlo hay que efectuar una transformación gradiental más.

27.2. Ejemplo de solución de la ecuación de onda — ondas planas. De las ecuaciones (27.4), (27.5), (27.7) se deduce que cualquier componente cartesiano u de los vectores $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{A}$ satisface la ecuación de onda. Investiguemos su solución dependiente sólo de la coordenada x y del tiempo t. Es evidente que la dirección del eje x es plenamente arbitraria.

En las suposiciones adoptadas, la magnitud $u(x, t)$ satisface la ecuación

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t) = 0, \tag{27.9}$$

en la que hemos escrito el operador de d'Alembert en forma del producto de dos factores. Introduzcamos nuevas variables

$$\xi = x - ct, \eta = x + ct \tag{27.10}$$

de forma que la transformación inversa proporciona

$$x = (\xi + \eta)/2, \qquad t = (\eta - \xi)/2c. \tag{27.11}$$

Tenemos

$$2\frac{\partial}{\partial \xi} = 2\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

y

$$2\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

como resultado de lo cual la ecuación (27.9) adquiere el aspecto

$$\frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Resolviendo la última ecuación, obtenemos

$$\frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} = F(\eta)$$

e integrando una vez más por η, hallamos

$$u(\xi, \eta) = g(\eta) + h(\xi).$$

Aquí $dg/d\eta = F(\eta)$ y $h(\xi)$ desempeña el papel de constante de integración por η que puede depender de la segunda variable como del parámetro. La forma de las funciones g y h no se determina de la solución de la ecuación y debe establecerse prefijando las condiciones iniciales. Retornando a las variables iniciales, tendremos

$$u(x, t) = g(x + ct) + h(x - ct). \tag{27.12}$$

La solución es la superposición de dos perturbaciones cada una de las cuales se propaga a los largo del eje x (en la dirección de crecimiento o decrecimiento de x) a una velocidad c. Esto sigue de la condición de constancia del argumento: $x \pm ct = \text{const}$. El desplazamiento de un punto con valor constante de g o de h transcurre según la ley $x = \pm ct + \text{const}$. Semejantes perturbaciones reciben el nombre de *ondas móviles planas.*

Ahora, determinemos la orientación mutua de los vectores E, H, A en la onda plana. De la condición (27.8) se deduce:

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0.$$

Pero como x entra en el argumento de A en combinación con $x \pm ct$, la última igualdad proporciona $A_x = \text{const}$. Por consiguiente

$$E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = 0 \qquad \text{y} \qquad H_x = \operatorname{rot}_x A = 0.$$

Las proyecciones de las intensidades del campo sobre la dirección de propagación no existen, ya que en el vacío las ondas electromagnéticas planas son transversales.

Las posteriores relaciones serán obtenidas para las ondas en movimiento en una dirección. Suponiendo que $A(x, t) = A(x - ct)$, hallamos

$$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial x}.$$

A continuación,

$$H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}, \qquad H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x}, \qquad H = e_x \times \frac{\partial A}{\partial x},$$

o bien

$$H = n \times E, \qquad E = H \times n \tag{27.13}$$

donde n es un vector unitario en el sentido de la propagación. Ya que, como hemos visto más arriba $E \perp n$, de (27.13) se deduce la igualdad de los valores absolutos de los vectores magnético y eléctrico:

$$H = E. \tag{27.14}$$

En conclusión calculamos el vector de Poynting:

$$\gamma = \frac{c}{4\pi} E \times H = \frac{c}{4\pi} E \times (n \times E) = \frac{c}{4\pi} E^2 n = cwn, \tag{27.15}$$

donde $w = E^2/4\pi = (E^2 + H^2)/8\pi$ es la densidad de la energía electromagnética en la onda plana. Al deducir (27.15) se hizo uso de la condición de transversalidad $n \cdot E = 0$. La fórmula (27.15) demuestra de modo evidente el transporte de la energía electromagnética en las ondas planas a la velocidad de luz c.

No es dificultoso obtener la solución de la ecuación de onda en forma de ondas esféricas. Con la presencia de simetría esférica la ecuación de onda fuera de la región, ocupada por las fuentes, adopta el aspecto

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{27.16}$$

Si buscamos la solución en la forma

$$u(r, t) = \frac{\chi(r, t)}{r}$$

la nueva función $\chi(r, t)$ satisfará la ecuación de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0,$$

cuyas soluciones ya fueron halladas. De esta manera, la solución general (27.16) es así

$$u(r, t) = \frac{h(r - ct)}{r} + \frac{g(r + ct)}{r}. \tag{27.17}$$

El primer sumando describe una onda esférica divergente en propagación desde el origen de coordenadas a una velocidad c. Su amplitud decrece como r^{-1} debido a que el flujo prefijado de energía se distribuye por una gran área. El segundo sumando describe una onda emitida al infinito y convergente hacia el centro.

§ 28. Ondas planas monocromáticas

28.1. Amplitud, frecuencia y vector de onda. Fase de una onda plana monocromática. En las ondas móviles ocupan importante lugar las ondas planas monocromáticas:

$$u(x, t) = u_0 \cos [k(x - ct) + \varphi_0], \tag{28.1}$$

donde k, u_0, φ_0 son constantes, sus valores se determinan por las condiciones de excitación de la onda. En semejante onda la dependencia entre el campo electromagnético y el tiempo en el punto prefijado del espacio es sinusoidal. La magnitud $\omega = ck$ recibe el nombre de *frecuencia circular* y k, de *vector de onda* (que en nuestro caso está dirigido por el eje x). El argumento del coseno $\varphi = k(x - ct) + \varphi_0$ se denomina *fase* de la onda, la constante u_0, su *amplitud*.

Es fácil generalizar la fórmula (28.1) para el caso cuando la propagación de la onda plana monocromática transcurre en dirección arbitraria respecto de los ejes de coordenadas. Escribámosla para el campo eléctrico E:

$$E(r, t) = \vec{\mathscr{E}}_0 \cos (k \cdot r - \omega t + \varphi_0). \tag{28.2}$$

Sustituyendo esta función en (27.4), tendremos

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 E, \qquad \Delta E = -k^2 E,$$

de forma que la ecuación de onda será satisfecha con

$$\omega^2 = (ck)^2 \qquad \text{o bien } \omega = ck. \tag{28.3}$$

La última ecuación define la ley de dispersión de las ondas electromagnéticas en el vacío. De ella sigue que la velocidad de fase v_p y de grupo v_g de las ondas coinciden:

$$v_p = \frac{\omega}{k} = c, \qquad v_g = \frac{d\omega}{dk} = c, \tag{28.4}$$

lo que significa que la velocidad de propagación de las ondas no depende de su frecuencia ω, en tanto que los *paquetes de onda* (superposición de ondas planas monocromáticas con diversas fases) se propagan por el vacío sin cambiar de forma.

La superficie de fase constante $\varphi = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi_0$ representa en cierto momento prefijado de tiempo un plano descrito con la ecuación

$$r_{\parallel} = \frac{\omega}{k} t + \text{const}, \tag{28.5}$$

donde $r_{\parallel}$ es la proyección de $\boldsymbol{r}$ sobre $\boldsymbol{k}$. El plano de fase constante es perpendicular al *vector de onda* $\boldsymbol{k}$ y se desplaza a lo largo de $\boldsymbol{k}$ a una velocidad $\dot{r}_{\parallel} = \omega/k = c$. La frecuencia y el vector de onda están ligados con el período de variación del campo T y la longitud de onda λ mediante las conocidas relaciones:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}. \tag{28.6}$$

Debido a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell y de las ecuaciones de onda, que se desprenden de las primeras, su solución no sólo es (28.2), sino también una función compleja más general

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0 \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t) \tag{28.7}$$

cuya parte real para $\boldsymbol{E}_0 = \mathscr{E}_0 e^{i\varphi_0}$ es (28.2). Desde el punto de vista matemático es más cómodo trabajar con exponenciales que con funciones trigonométricas, ya que el uso de operadores diferenciales div, rot, Δ, $\partial/\partial t$ no varían su forma:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}, \quad \Delta\boldsymbol{E} = -k^2\boldsymbol{E}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -i\omega\boldsymbol{E}. \tag{28.8}$$

Por esto, en electrodinámica, por regla, se hace uso de las representaciones complejas de los campos, teniendo en cuenta que las magnitudes físicas que se miden son partes reales de las respectivas expresiones complejas. En adelante, también utilizaremos, principalmente, funciones complejas designándolas con los símbolos anteriores $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, etc., en todos los casos cuando ello no provoque equívocos.

No obstante, hay que comprender que al pasar a magnitudes energéticas, cuadráticas respecto a las intensidades del campo, es preciso utilizar los campos reales. Al calcular campos medios por su período de valores $2\pi/\omega$ de las magnitudes cuadráticas son cómodas las siguientes fórmulas:

si $A = A_0 e^{-i\omega t}$ y $B = B_0 e^{-i\omega t}$, entonces

$$\overline{A^2} = \overline{[\operatorname{Re}(A_0 e^{-i\omega t})]^2} = |A_0|^2/2 = |A|^2/2, \tag{28.9}$$

$$\overline{AB} = \overline{\operatorname{Re}(A_0 e^{-e\omega t})\operatorname{Re}(B_0 e^{-i\omega t})} =$$

$$= 1/4(A_0 B_0^* + A_0^* B_0) = 1/2\operatorname{Re}(AB^*). \tag{28.10}$$

Retornemos al análisis de las propiedades de la onda plana monocromática. En ella, el campo magnético debe depender de $\boldsymbol{r}$ y t por la misma ley (28.7) que el campo eléctrico, ya que de otro modo no serán satisfechas

las ecuaciones de Maxwell (27.1):

$$H(r, t) = H_0 \exp(ik \cdot r - i\omega t). \tag{28.11}$$

La sustitución de (28.7), (28.11) en el sistema (27.1) permite obtener la ligazón entre las amplitudes complejas de los campos:

$$H_0 = n \times E_0, \qquad E_0 = H_0 \times n, \qquad n \cdot E_0 = 0, \qquad n \cdot H_0 = 0. \tag{28.12}$$

Aquí

$$n = ck/\omega = k/k \tag{28.13}$$

es un vector unitario en la dirección de propagación de la onda. Las correlaciones (28.12) significan que los vectores E_0, H_0, n forman un trío de vectores perpendiculares entre sí, con la particularidad de que los módulos de las amplitudes E_0 y H_0 son iguales: $|E_0|^2 = |H_0|^2$.

28.2. Transformación de la frecuencia y el vector de onda. Efecto Doppler. Aclaremos la ley de transformación de fase de una onda plana monocromática al pasar a otro sistema de referencia inercial. Después de escribir las fórmulas de transformación de las intensidades (10.3) en la forma

$$E'_{0\parallel} e^{i\varphi'} = E_{0\parallel} e^{i\varphi}, \text{ etc}$$

vemos que ellas sólo pueden satisfacerse en cualquier punto del espacio — tiempo en caso de la invariancia de la fase: $\varphi' = \varphi = \text{inv}$. Esto está ligado con que la magnitud $\Delta\varphi/2\pi$ es el número de máximos o de mínimos del campo entre dos puntos espaciales — temporales que no desprende del sistema de referencia elegido.

De la invariancia de la fase se desprende

$$k \cdot r - \omega t = \text{inv} \tag{28.14}$$

y, como $x^i(ct, r)$ forman un 4-vector, la frecuencia ω y el vector de onda k de una onda plana monocromática forman también un 4-vector:

$$k^i = \left(\frac{\omega}{c}, k\right). \tag{28.15}$$

La ley de transformación de k y ω se desprende de las fórmulas generales (1.18) de transformación del 4-vector.

Hallemos la relación entre la frecuencia ω_0 de la onda en el sistema de la fuente y la frecuencia ω de esa misma en el sistema del observador. La fuente y el observador se mueven a velocidad relativa V. Escribamos la ley de transformación de los componentes termporales k^0:

$$\frac{\omega'}{c} = \frac{\omega/c - Vk_x/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{28.16}$$

Suponiendo que $\omega' = \omega_0$, $k_x = \frac{\omega}{c}\cos\theta$, donde θ es el ángulo de propagación de la onda respecto de V en el sistema del observador, hallamos

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - (V/c)\cos\theta}. \tag{28.17}$$

Esta fórmula expresa el *efecto Doppler*, es decir, la variación de la frecuencia de la onda provocada por el movimiento relativo de la fuente y el receptor.

Para $V/c \ll 1$, tendremos

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \omega_0(V/c)\cos\theta. \tag{28.18}$$

La frecuencia de la onda crece al aproximarse la fuente y el observador (la proyección de la velocidad sobre la dirección del rayo $V_\parallel = V\cos\theta > 0$) y decrece al alejarse ($V_\parallel < 0$) (*efecto longitudinal Doppler*). Si la velocidad relativa está dirigida perpendicularmente al rayo visual ($\cos\theta = 0$), la disminución de la frecuencia es un efecto cuadrático según V/c:

$$\Delta\omega = -\frac{\omega_0}{2}\left(\frac{V}{c}\right)^2, \tag{28.19}$$

es decir, *el efecto transversal Doppler.*

De las fórmulas de transformación del 4-vector de onda también podemos obtener la ley de aberración de la luz ya estudiado en el § 2.

28.3. Polarización de una onda plana. Aquí vamos a estudiar con mayor detalle las propiedades de la amplitud $\boldsymbol{E}_0$ de la onda plana monocromática. Al describir el campo de forma compleja $\boldsymbol{E}_0$ es un vector complejo que puede ser descompuesto en dos vectores reales:

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E}_{01} + i\boldsymbol{E}_{02}. \tag{28.20}$$

En virtud de las condiciones (28.12) $\boldsymbol{E}_{01}$ y $\boldsymbol{E}_{02}$ deben ser perpendiculares al vector de onda $\boldsymbol{k}$; por lo demás ellos son arbitrarios.

Desprendamos de (28.20) el factor de fase $e^{i\varphi_0}$ de forma que los dos vectores reales restantes sean entre sí perpendiculares:

$$\boldsymbol{E}_0 = (\vec{\mathscr{E}}_1 + i\vec{\mathscr{E}}_2)e^{i\varphi_0}, \qquad \vec{\mathscr{E}}_1 \cdot \vec{\mathscr{E}}_2 = 0. \tag{28.21}$$

Expresando de (28.21) $\vec{\mathscr{E}}_1$ y $\vec{\mathscr{E}}_2$

$$\begin{aligned} \vec{\mathscr{E}}_1 &= \boldsymbol{E}_{01}\cos\varphi_0 + \boldsymbol{E}_{02}\operatorname{sen}\varphi_0, \\ \vec{\mathscr{E}}_2 &= -\boldsymbol{E}_{01}\operatorname{sen}\varphi_0 + \boldsymbol{E}_{02}\cos\varphi_0, \end{aligned} \tag{28.22}$$

de la condición de perpendicularidad $\vec{\mathscr{E}}_1 \cdot \vec{\mathscr{E}}_2 = 0$, obtenemos el valor de la fase φ_0:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\boldsymbol{E}_{01}\cdot\boldsymbol{E}_{02}}{E_{01}^2 - E_{02}^2}. \tag{28.23}$$

Después de esto la parte real de E, o sea, el campo observado se escribirá en la forma

$$E = \vec{\mathscr{E}}_1 \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi_0) + \vec{\mathscr{E}}_2 \operatorname{sen}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi_0). \tag{28.24}$$

Eligiendo los ejes x e y a lo largo de los vectores $\vec{\mathscr{E}}_1$ y $\vec{\mathscr{E}}_2$, respectivamente, hallamos la ecuación de la curva que describe el extremo del vector E:

$$E_x^2/\mathscr{E}_1^2 + E_y^2/\mathscr{E}_2^2 = 1. \tag{28.25}$$

En el caso general ésta es una elipse con semiejes $\mathscr{E}_1$ y $\vec{\mathscr{E}}_2$, es decir, la polarización de la onda es elíptica. En dependencia de si $\vec{\mathscr{E}}_1$, $\vec{\mathscr{E}}_2$, $\boldsymbol{n}$ forman una terna de vectores derecha o izquierda, la dirección de rotación se denomina izquierda o derecha. (Históricamente se ha creado una terminología que contradice a la que sería más natural).

El vector magnético también describe una elipse cuyos ejes están girados respecto a los ejes del vector eléctrico en $\pi/2$. Las direcciones de rotación de E y H coinciden.

Siendo $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2$ la polarización elíptica degrada en círculo que también puede tener dos direcciones de rotación. Cuando $\mathscr{E}_1 \neq 0$, $\mathscr{E}_2 = 0$ o bien $\mathscr{E}_1 = 0$, $\mathscr{E}_2 \neq 0$ la polarización se convierte en lineal: los vectores eléctrico y magnético oscilan a lo largo de las direcciones fijadas perpendiculares entre sí. Es de señalar que con $\boldsymbol{k}$ prefijado son posibles dos polarizaciones independientes de la onda plana monocromática: elíptica (en caso particular, circular) con dirección de rotación derecha o izquierda o bien dos polarizaciones lineales por direcciones perpendiculares entre sí.

§ 29. Ondas no monocromáticas. Descomposición espectral

Por regla, los campos magnéticos alternativos, creados por fuentes reales, en mayor o menor grado son no monocromáticos. Supongamos que en el punto dado el campo puede desarrollarse en la integral de Fourier. Escribamos dicho desarrollo, generalizando la fórmula (28.1), en la forma

$$U'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty u(\omega) \cos[\varphi(\omega) - \omega t]\, d\omega. \tag{29.1}$$

Aquí $U'(t)$ es cierto componente cartesiano de los vectores E, H o A, magnitud real. En vertad, en el desarrollo (29.1) introduce, por regla, la aportación fundamental cierta región finita de frecuencias ω determinada por la forma de la función $u(\omega)$.

Lo mismo que para las ondas monocromáticas es cómoda la descripción compleja del campo. Por analogía con (28.7) liguemos al campo (29.1) la función compleja

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty u(\omega) \exp[i\varphi(\omega) - i\omega t]\, d\omega, \tag{29.2}$$

con la particularidad de que

$$U(t) = U'(t) + iU''(t). \tag{29.3}$$

La parte imaginaria

$$U''(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty u(\omega) \operatorname{sen} [\varphi(\omega) - \omega t]\, d\omega \tag{29.4}$$

se determina unívocamente 0 por la parte real $U'(t)$, ya que ella se obtiene de la última al sustituir la fase $\varphi(\omega)$ de cada armónica de Fourier por $\varphi(\omega) - \pi/2$.

La magnitud $U(t)$ recibe el nombre de *señal analítica*. Es utilizada con frecuencia en la teoría de los campos de ondas, de oscilaciones, en radiotécnica, etc. La singularidad característica de la función $U(t)$ consiste en que ella contiene las armónicas de Fourier sólo con frecuencias positivas. Por lo tanto, si con todas las t reales (o sea, la integral por ω en (29.2) converge) $U(t)$ es acotada, ella también seguirá siéndolo con los valores complejos $t = t' + it''$ que yacen en el semiplano inferior ($t'' < 0$). En efecto, sustituyendo en (29.2) t por $t' + it''$ obtenemos en el integrando el factor adicional $\exp(\omega t'')$ que, para $t'' < 0$, sólo aumenta la convergencia de la integral por ω. Esto nos indica que la función $U(t)$, examinada para t complejos, en el semiplano inferior es analítica (no tiene singularidades).

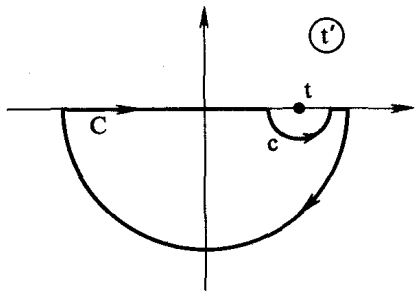

Fig. 29.1

La analiticidad de $U(t)$ en el semiplano inferior de t complejo permite establecer una relación integral sencilla entre $U'(t)$ y $U''(t)$. Con este fin examinemos la integral (29.5) por el circuito no cerrado C (fig. 29.1), pero al mismo tiempo el punto $t' = t$ circula por el arco de la pequeña semicircunferencia por abajo. Como $U(t')$ y $(t' - t)^{-1}$ no tienen singularidades dentro del contorno de integración, dicha integral se reduce a cero:

$$\int_C \frac{U(t')}{t' - t}\, dt' = 0. \tag{29.5}$$

La integral por el arco de círculo grande se anula a causa del rápido decrecimiento de $U(t')$ cuando $t' \to \infty$ en la semicircunferencia inferior. La integral por la semicircunferencia pequeña c se calcula directamente y proporciona el semiresiduo de la función subintegral:

$$\int_c \frac{U(t')}{t' - t}\, dt' = i\pi U(t). \tag{29.6}$$

Por fin, la integral restante por el eje real debe calcularse con el punto exclusivo en el sentido del valor principal, es decir, de la integración se excluye el segmento $(t - \rho, t + \rho)$ del eje real, cuando $\rho \to 0$. En resumen, tomando en consideración (29.6), llevamos (29.5) a la forma

$$i\pi U(t) + \int\!\!\!\!\!\!-_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(t')}{t' - t}\, dt' = 0. \tag{29.7}$$

Dividiendo en (29.7) las partes real e imaginaria, hallamos la relación buscada entre ellas:

$$U'(t) = -\frac{1}{\pi} \int\!\!\!\!\!\!-_{-\infty}^{+\infty} \frac{U''(t)}{t' - t}\, dt', \quad U''(t) = \frac{1}{\pi} \int\!\!\!\!\!\!-_{-\infty}^{+\infty} \frac{U'(t')}{t' - t}\, dt'. \tag{29.8}$$

Las relaciones (29.8), que ligan las partes real e imaginaria de cierta función compleja de la variable real, llevan en matemáticas el nombre de *transformaciones de Hilbert*. Estas desempeñan importante papel en física (véase, p. ej., el § 5 de la II parte del presente libro) y, por regla, son llamadas *relaciones de dispersión*, puesto que por primera vez fueron investigadas en la teoría de dispersión de la luz.

Más cómoda que (29.1) es la forma compleja de anotación del desarrollo de Fourier de la función real $U'(t)$:

$$U'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \tag{29.9a}$$

$$v(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} U'(t) e^{i\omega t} dt, \tag{29.9b}$$

donde la integral (29.9,a) es real, ya que

$$v(-\omega) = v^*(\omega). \tag{29.10}$$

Después de reescribir (29.9,a) en la forma

$$U'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [v(\omega) e^{-i\omega t} + v^*(\omega) e^{i\omega t}] d\omega$$

y comparar dicha anotación con (29.1), hallamos la ligazón entre las amplitudes de Fourier real $u(\omega)$ y compleja $v(\omega)$:

$$u(\omega) = 2v(\omega)e^{-i\varphi(\omega)}. \tag{29.11}$$

La última relación permite escribir el desarrollo de Fourier de la señal analítica con el siguiente aspecto

$$U(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty v(\omega)e^{-i\omega t}d\omega. \tag{29.12}$$

Claro está que, como antes, él sólo contiene las armónicas de Fourier positivo-frecuenciales.

El desarrollo de Fourier permite hallar la composición espectral de la energía de un campo electromagnético no monocromático. P. ej., examinemos la energía total W de una onda electromagnética plana que pasa por un área unitaria, perpendicular a n, en el transcurso de todo el tiempo de existencia de la onda. Basándonos en (27.15), tendremos

$$W = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E^2(t)dt. \tag{29.13}$$

Identificando la magnitud real $E(t)$ con $U'(t)$, con ayuda de (29.9), obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E^2(t)dt = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' v(\omega)v(\omega') \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega'+\omega)t}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' v(\omega)v(\omega')\delta(\omega + \omega'). \tag{29.14}$$

Aquí hicimos uso de la representación de la función delta (comp. IV. 21). Más adelante, tomando en consideración (29.10) o integrando por $d\omega'$, con ayuda de la función delta, hallamos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |v(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |v(\omega)|^2 d\omega. \tag{29.15}$$

De esta forma, empleando de nuevo (29.13), veremos que

$$W = \frac{c}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} |v(\omega)|^2 d\omega. \tag{29.16}$$

Por esto, la magnitud

$$\frac{dW_\omega}{d\omega} = \frac{c}{4\pi^2} |v(\omega)|^2 \tag{29.17}$$

puede ser considerada como la densidad espectral del flujo de la energía electromagnética. La integración de (29.17) por todas las frecuencias (positivas) proporciona la energía total W.

Con facilidad comprobamos que la energía del campo, estudiada más arriba, también puede expresarse con sencillez mediante la función compleja $U(t)$, es decir, la señal analítica. Por medio de (29.12) nos cercioramos de que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E^2(t)dt \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} U^{\sim 2}(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} U^*(t)U(t)dt. \tag{29.18}$$

Esta representación conduce al desarrollo espectral anterior (29.15).

La noción de señal analítica resulta ser muy útil intentando representar el campo no monocromático real $U^{\sim}(t)$ en forma de una onda sinusoidal de amplitud que varía lentamente. Después de escribir $U^{\sim}(t)$ así

$$U^{\sim}(t) = A(t)\cos[\Phi(t) - \omega_0 t], \tag{29.19}$$

donde ω_0 es cierta frecuencia "central" prefijada, debemos indicar el criterio según el cual la función prefijada $U^{\sim}(t)$ se descompone en dos: la amplitud $A(t)$ y la parte de la fase $\Phi(t)$ en lenta variación. El empleo de la señal analítica nos permite formular tal criterio.

Presentemos la señal analítica $U(t)$, cuya parte real es (29.19), en la forma

$$U(t) = A(t)\exp[i\Phi(t) - i\omega_0 t] \tag{29.20}$$

con amplitud positiva $A(t) > 0$. De acuerdo con (29.12) y (29.20)

$$A(t)\exp[i\Phi(t)] = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty v(\omega)\exp[i(\omega_0 - \omega)t]d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\infty} a(\varepsilon)e^{-i\varepsilon t}d\varepsilon, \tag{29.21}$$

donde $\varepsilon = \omega - \omega_0$, $a(\varepsilon) = 2v(\omega_0 + \varepsilon)$. Si la banda de frecuencias $\Delta\omega$, que determina el desarrollo de Fourier $U(t)$, es suficientemente estrecha, $\Delta\omega \ll \omega_0$, las armónicas que entran en el desarrollo (29.21) serán, en comparación con ω_0, de baja frecuencia:

$$|\varepsilon| \lesssim \Delta\omega \ll \omega_0. \tag{29.22}$$

De aquí se deduce que la amplitud $A(t)$ y el factor de fase $\exp[i\Phi(t)]$, en comparación con $\exp(i\omega_0 t)$, variarán con lentitud y el campo (29.20) puede

considerarse causimonocromático. Cuando (29.22) se cumple, el límite inferior de la integral en (29.21) puede sustituirse por $-\infty$, el error será pequeño.

Es fácil expresar directamente la amplitud $A(t)$ y la fase $\Phi(t)$ por la señal analítica prefijada $U(t)$. Escribiendo (29.20) en la forma (29.19) y

$$U''(t) = A(t)\,\mathrm{sen}\,[\Phi(t) - \omega_0 t],$$

hallamos

$$A(t) = [U'^2(t) + U''^2(t)]^{1/2} = (U^*U)^{1/2} = |U|,$$

$$\Phi(t) = \omega_0 t + \operatorname{arctg}\frac{U''(t)}{U'(t)} = \omega_0 t + \operatorname{arctg}\left(i\frac{U^* - U}{U^* + U}\right). \qquad (29.23)$$

Las fórmulas aducidas conservan su validez con cualquier anchura del espectro, incluso con $\Delta\omega \gtrsim \omega_0$, pero la propia representación (29.20) sólo es útil para el espectro (29.22) de banda estrecha, cuando A y Φ son funciones lentas del tiempo.

Es de importancia señalar que la duración de la señal en el tiempo está simplemente ligada con la anchura $\Delta\omega$ de su espectro de frecuencias. Con el fin de cerciorarnos de esto, consideremos de nuevo el desarrollo (29.21). Sea que con $|\varepsilon| > \Delta\omega$ la amplitud de Fourier $a(\varepsilon)$ decrece con rapidez, ya que, en realidad, la integral por $d\varepsilon$ se toma en los límites $(-\Delta\omega, +\Delta\omega)$. Para $|t| \lesssim 1/\Delta\omega$ el factor $e^{-i\varepsilon t}$ oscilará débilmente en la región de integración y la integral (29.21) se diferenciará de forma notoria de cero. Pero siendo $|t| \gg 1/\Delta\omega$ el número de variaciones de los signos del seno y coseno, en los que se desarrolla $e^{-i\varepsilon t}$, será grande en el intervalo característico $-\Delta\omega \leqslant \varepsilon \leqslant \Delta\omega$ y, con tales valores de t, la integral (29.21) será pequeña. De lo dicho se deduce que la duración Δt de la señal $U(t)$ y la anchura de su espectro $\Delta\omega$ satisfacen la condición

$$\Delta t\,\Delta\omega \gtrsim 1. \qquad (29.24)$$

La apreciación hecha más arriba determina el producto escrito sólo en lo que atañe al orden de la magnitud. Su valor preciso depende de la determinación de las magnitudes Δt y $\Delta\omega$, así como de la forma concreta de $a(\varepsilon)$ o bien $U(t)$. Pero en todos los casos el producto $\Delta t\,\Delta\omega$ no se distinguirá fuertemente de la unidad.

Como ejemplo examinemos una señal generada en cierto punto por una fuente de radiación amortiguada:

$$U'(t) = A_0\Theta(t)\exp(-\gamma t/2)\cos(\omega_0 t), \qquad (29.25)$$

donde $\gamma > 0$ es la constante de amortiguamiento. La presencia de la función escalonada $\Theta(t)$ (véase el Complemento IV. 14) significa que $U'(t) = 0$ para $t < 0$. De acuerdo con las reglas expuestas más arriba, confeccionamos la señal analítica:

$$U(t) = A_0\Theta(t)\exp(-\gamma t/2 - i\omega_0 t), \qquad (29.26)$$

para lo cual

$$A(t) = A_0\Theta(t)\exp(-\gamma t/2), \qquad \Phi(t) = 0.$$

Hallemos la amplitud de Fourier $a(\varepsilon)$:

$$a(\varepsilon) = \int_0^\infty A(t)e^{i\varepsilon t}dt = \frac{A_0}{\gamma/2 - i\varepsilon}. \tag{29.27}$$

De acuerdo con (29.15) la distribución de la energía por las frecuencias será proporcional a

$$|a|^2 = \frac{A_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2}. \tag{29.28}$$

Determinemos la duración de la señal $U(t)$ como el tiempo Δt en el transcurso del cual su intensidad $I(t) \sim |U(t)|^2$ disminuye e veces en comparación con su valor máximo. Haciendo uso de (29.26) hallamos que $\Delta t = \gamma^{-1}$. Si determinamos ahora la anchura del espectro de $\Delta\omega$ por la condición de que la potencia espectral también disminuye durante la desintonización e veces, es decir, $|a(\Delta\omega)|^2 = |a(0)|^2/e$, entonces $\Delta\omega = \gamma\sqrt{e - 1/2}$ y

$$\Delta t\, \Delta\omega = \sqrt{e - 1/2},$$

lo que concuerda con el resultado general (29.24).

§ 30. Coherencia e interferencia

30.1. Descripción del campo no coherente de radiación con ayuda del tensor correlativo. Tiempo y longitud de la coherencia. La mayoría de las fuentes reales de ondas electromagnéticas consta de una gran cantidad de radiadores independientes (no coherentes) que irradian ondas con valores aleatorios de las fases y las amplitudes iniciales, así como con toda clase de polarizaciones. P. ej., así son las fuentes de luz térmicas y luminiscentes, así como las fuentes en las que las ondas electromagnéticas son emitidas en forma de un haz de electrones de alta velocidad al frenarlos en la sustancia o bien en el campo magnético. Podemos alcanzar un grado de concordancia considerablemente mayor cuando las ondas de radio son emitidas por antenas o bien al irradiar la luz por un generador óptico cuántico, en el que el papel principal es desempeñado por la radiación forzada. Pero en tales dispositivos también son posibles fluctuaciones de fase, amplitud y polarización debido al movimiento térmico de las partículas, la radiación espontánea y la dispersión en diversas heterogeneidades de fluctuación.

Además, cada radiador aislado irradia ondas no monocromáticas. Por esta razón, el campo creado por fuentes reales tiene, en muchos casos, una estructura muy complicada: los valores del campo varían en el espacio y el tiempo de modo casual e imposible de predecir. Semejantes campos se denominan campo *casual*.

Para prefijar un campo casual es preciso indicar algunas magnitudes mediadas que caracterizan semejante campo. El procedimiento de mediación está estrechamente ligado con el de medición de las correspondientes magnitudes. Con la mayor frecuencia, los instrumentos realizan la medición según el tiempo. El intervalo de mediación Δt debe elegirse de forma

que supere los períodos de todos los componentes armónicos del campo casual. Con semejante mediación el valor medio del campo de radiación se anula:

$$\overline{E_\alpha(r, t)} = 0. \tag{30.1}$$

Será diferente de cero el tensor correlativo de II rango:

$$J_{\alpha\beta}(r_1, t_1; r_2, t_2) = \overline{E_\alpha(r_1, t_1) E^*_\beta(r_2, t_2)}, \tag{30.2}$$

donde E_α es la función compleja (señal analítica) que describe el campo. Hablando en general, para la descripción total del campo casual también es preciso prefijar el conjunto infinito de tensores correlativos de rangos más altos, pero al resolver múltiples problemas podemos limitarnos con el tensor de II rango. En lo que se refiere a las características mediadas del campo magnético, ellas pueden ser expresadas con los valores correspondientes del campo mediante las ecuaciones de Maxwell. Cuando los argumentos coinciden ($r_1 = r_2$, $t_1 = t_2$, $\alpha = \beta$) el tensor (30.2) es proporcional a la energía contenida en el α-ésimo componente del campo eléctrico.

Para que el tensor promediado (30.2) siga siendo función de los tiempos t_1, t_2, la mediación se debe realizar de la siguiente forma:

$$J_{\alpha\beta}(r_1, t_1; r_2, t_2) = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} E_\alpha(r_1, t_1 + t') E_\beta(r_2, t_2 + t') dt'. \tag{30.3}$$

Con frecuencia, en particular al haber variaciones en la banda óptica, la mediación del tipo (30.3) se realiza durante el proceso de medición a cuenta de la inertancia del instrumento de medición. El tiempo de puesta en funcionamiento de los detectores de la radiación óptica constituye 10^{-10} — 10^{-12} s, en tanto que los períodos de las oscilaciones ópticas son de un orden de 10^{-15} — 10^{-16} s.

En adelante sólo nos van a interesar los campos estacionarios casuales cuyas características promediadas no varían con el tiempo. Esto significa que $J_{\alpha\beta}$ sólo dependerá de la diferencia de tiempo $\tau = t_1 - t_2$, pero no desde el origen de referencia:

$$J_{\alpha\beta}(r_1, t_1; r_2, t_2) = J_{\alpha\beta}(r_1, r_2, \tau). \tag{30.4}$$

Si el campo casual también es homogéneo en el espacio, es decir, sus características medias (¡pero no instantáneas!) no dependen de las coordenadas, los radios vectores r_1, r_2 entrarán en $J_{\alpha\beta}$ sólo en forma de la diferencia $r = r_1 - r_2$. P. ej., semejantes características posee el campo de la radiación térmica en una cavidad cerrada. Pero el campo creado por una fuente de dimensiones finitas en el espacio libre no es homogéneo.

Para los campos casuales el tensor correlativo $J_{\alpha\beta}(r_1, r_2, \tau)$, por regla, decrece con suficiente rapidez al aumentar τ. P. ej., sea que el campo de radiación está creado por fuentes térmicas, es decir, por átomos excitados

durante colisiones aleatorias entre sí. Cada uno de los átomos emite una onda no monocromática de duración finita τ_{coh} (paquete o tren de ondas) en momentos aleatorios de tiempo, por lo que los paquetes de ondas de átomos aislados son entre sí independientes. En el transcurso del tiempo τ_{coh}, la emisión de cada átomo aislado es coherente.

Fijando cierto punto del espacio $r_1 = r_2 = r$ examinemos la media:

$$\overline{E_\alpha(r, t + \tau)E_\beta(r, t)} = J_{\alpha\beta}(r, r, \tau). \tag{30.5}$$

Es fácil comprender que este valor medio se distinguirá de cero sólo para aquellos valores de τ que son menores o iguales al orden de la duración de un paquete de ondas aislado, $\tau \lesssim \tau_{coh}$. Si, al contrario, $\tau \gg \tau_{coh}$ en (30.5) se promediarán los campos de diversos paquetes de ondas, independientes entre sí. Entre ellos no habrá una relación notoria y la media del producto podrá sustituirse por el producto de las medias:

$$J_{\alpha\beta}(r, r, \tau) \approx \overline{E_\alpha(t + \tau)} \cdot \overline{E_\beta(t)} = 0, \tau \gg \tau_{coh}.$$

El tiempo τ, durante el que el tensor $J_{\alpha\beta}$ se diferencia notoriamente de cero, recibe el nombre de *tiempo de correlación o coherencia* de los componentes del campo E_α y E_β. Este tiempo también puede determinarse de manera formal, p. ej., del modo siguiente:

$$\tau_{coh} = \frac{1}{J_{\alpha\beta}(r, r, 0)} \int_0^\infty J_{\alpha\beta}(r, r, \tau)d\tau. \tag{30.6}$$

Hablando en general, éste puede ser diferente para distintos pares de componentes, pero en adelante, para simplificar, vamos a considerarlo igual para todos los componentes del campo.

También tiene carácter análogo la dependencia del tensor correlativo $J_{\alpha\beta}$ de las coordenadas: al crecer las diferencias $x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2$ la correlación se debilita. Por analogía con (30.6) podemos introducir las longitudes de correlación (*longitudes de coherencia*) l_x, l_y, l_z. Por el orden de su valor son iguales a las dimensiones espaciales de los paquetes de ondas, en el límite de los cuales las armónicas de Fourier aisladas del campo están ligadas por fase. En un campo de radiación homogéneo e isótropo las longitudes de correlación son iguales por todas las direcciones, mientras que el tensor $J_{\alpha\beta}$ sólo depende de la diferencia $r_1 - r_2$. En semejante campo $l_{coh} \approx \approx c\tau_{coh}$, ya que la dimensión de los paquetes de onda en el espacio son del orden $c\tau_{coh}$, en tando que la correlación estará fuertemente debiltada si los campos de los puntos r_1 y r_2 pertenecieran a diferentes paquetes de ondas.

En un campo de radiación anisótropo, p. ej., cuando los paquetes de onda son irradiados por cierta fuente lejana y todos están en movimiento en una misma dirección, la correlación $l^{\parallel}_{coh} \approx c\tau_{coh}$ será válida sólo para la longitud longitudinal de coherencia (en la dirección de propagación). La

longitud transversal de coherencia se determina, en este caso, mediante otros factores y no está ligada directamente con τ_{coh}.

Para un proceso rigurosamente determinado, como lo es la onda plana monocromática en el caso estacionario, la longitud y el tiempo de coherencia son infinitos. Pero para todos los procesos reales ellos tienen valores finitos. P. ej., una fuente térmica corriente de luz (v. gr., una lámpara de sodio) tiene un tiempo característico de coherencia $\tau_{coh} \approx 10^{-10}$ s y la correspondiente longitud de coherencia $l_{\parallel} = c\tau_{coh} \approx 3$ cm. El láser de gas a helio y neón, que funciona en régimen continuo, tiene un tiempo de coherencia $\tau_{coh} = 0{,}02 - 0{,}002$ s y longitud de coherencia longitudinal $l_{\parallel} = 60 - 600$ km.

La promediación según el tiempo (30.3) es sustituida con frecuencia por la promediación según la asociación de todas las realizaciones posibles del campo casual. Imaginémonos un gran número (en el límite, infinito) de sistemas macroscópicos, que no está en interacción, idénticos al inicial, es decir, que constan de iguales fuentes de radiación junto con aquella parte del espacio por la que la radiación se propaga. Semejante agrupación de sistemas físicos macroscópicos idénticos recibe el nombre *de asociación*. Debido al carácter aleatorio de la radiación de las ondas electromagnéticas los valores de los campos $E'_{\alpha}, E''_{\alpha}, \ldots$, en puntos equivalentes del espacio, en un mismo momento de tiempo, hablando en general, serán en diferentes sistemas distintos:

$$E'_{\alpha}(r, t) \neq E''_{\alpha}(r, t) \neq E'''_{\alpha}(r, t) \neq \ldots$$

Por la asociación la media (o bien la media estadística) es la media aritmética (promedio)

$$\langle E_{\alpha}(r_1, t_1) E_{\beta}(r_2, t_2) \rangle = \lim_{N \to \infty} \frac{E'_{\alpha}(r_1, t_1) E'_{\beta}(r_2, t_2) + E''_{\alpha}(r_1, t_1) E''_{\beta}(r_2, t_2) + \ldots}{N}, \tag{30.7}$$

donde N es el número total de sistemas en la asociación. Para sistemas que irradian no hay motivo para considerar que la promediación según la asociación (30.7) y según el tiempo (30.3) proporcionan iguales resultados. Sin embargo, para una extensa clase de procesos aleatorios y, entre ellos, para muchos sistemas radiantes reales, la media por la asociación y por el tiempo coinciden (con tiempo de mediación suficientemente grande). Tales sistemas se denominan *ergódicos*.

La condición de ergodicidad*) para los campos casuales estacionarios requiere una debilitación suficientemente rápida de la correlación con el

*) La demostración del teorema ergódico y su enunciación más precisa pueden ser halladas en los libros [80, 81].

crecimiento de τ:

$$\lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} J_{\alpha\beta}(r, r, \tau) d\tau = 0.$$

Durante el análisis teórico de los campos casuales, por regla, se hace uso de la mediación estadística. En adelante, nosotros también vamos a realizar la mediación por la asociación considerando ergódicos los campos de radiación que estudiamos. En condiciones de ergodicidad los resultados obtenidos de este modo coincidirán con las medias según el tiempo que son medidas por los detectores de la radiación.

30.2. Influencia de la coherencia temporal y espacial sobre la interferencia de las ondas. La posibilidad de obtener el cuadro de la ampliación y debilitamiento regulares de las ondas en el espacio y el tiempo durante la interferencia (superposición) está ligada íntimamente con sus propiedades coherentes. De los razonamientos cualitativos está claro que la figura regular de interferencia sólo será observada si la diferencia de fases entre armónicas aisladas de iguales frecuencias queda, aproximadamente, igual en el transcurso del tiempo de observación, es decir, las oscilaciones son coherentes.

La ligazón entre la coherencia temporal y la figura de interferencia pueden ser estudiadas con ayuda del interferómetro de Michelson, cuyo esquema se muestra en la fig. 30.1. De una pequeña fuente S formada por

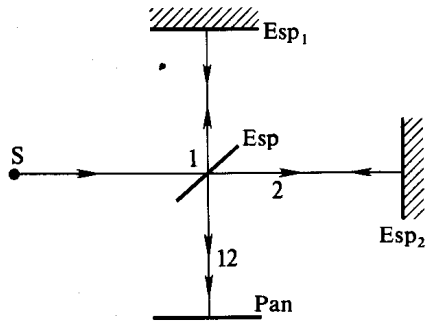

Fig. 30.1

radiadores independientes (átomos excitados), el rayo de luz se divide con el espejo semitransparente *Es* en dos rayos, *1* y *2*. A su vez, estos dos rayos se reflejan de los espejos Es_1 y Es_2 y en la región *12* se mezclan, creando la figura de interferencia (alternación de franjas oscuras y claras) en la pantalla *Pan*. Variando la longitud de los recorridos s_1 y s_2 puede introducirse un retardo temporal (diferencia de recorrido) entre las oscilaciones en interferencia.

Aclaremos las condiciones de aparición de la figura de interferencia en la instalación descrita. Sea que cada átomo irradia una onda cuasimonocromática (paquete de ondas) de una duración de τ_{coh} en el intervalo de frecuencias $\Delta\omega$. Como los paquetes de ondas de diversos átomos tienen fases iniciales casuales, al producirse la superposición de tales paquetes no surge la figura de interferencia: los máximos y mínimos del campo de paquetes por separado se superpondrán de modo aleatorio. La interferencia se produce cuando se superponen campos generados por un átomo que han pasado diferentes recorridos s_1 y s_2. Pero para que sea posible semejante superposición el tiempo de retardo $\tau = (s_1 - s_2)/c$ no debe superar la duración del paquete de ondas, ya que en caso contrario su parte que se propaga por el recorrido más largo llegará a la pantalla cuando la segunda parte ya ha sido absorbida por la pantalla o se ha reflejado de ella.

El tiempo máximo de retardo, con el que aún se observa la figura de interferencia, no debe superar la duración de un paquete de ondas aislado que es, precisamente, el tiempo de coherencia:

$$\tau \lesssim \tau_{coh} \approx 1/\Delta\omega. \tag{30.8}$$

De acuerdo con (29.24), aquí hemos expresado el tiempo de coherencia por el intervalo espectral de ondas irradiadas por un átomo aislado.

Examinaremos ahora otro planteamiento del experimento de interferencia (experimento de Young). Supongamos que la luz cuasimonocromática de cierta fuente térmica de dimensiones finitas a (fig. 30.2), después de

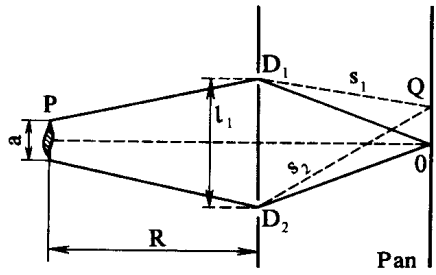

Fig. 30.2

pasar por dos rendijas D_1 y D_2 en una pantalla transparente, crea en la pantalla *Pan* una figura de interferencia. Una interferencia estable sólo puede ser creada por las ondas irradiadas por un mismo átomo, ya que la radiación de diferentes átomos no es coherente. Para observar la interferencia de toda la fuente extendida es preciso que las figuras de interferencia de átomos aislados se formen con fases aproximadamente iguales. Hallemos las respectivas condiciones.

Sea simétrica la disposición de los diafragmas, la fuente y la pantalla como se muestra en la fig. 30.2. A continuación, supongamos que la dis-

tancia hasta la fuente es grande:

$$R \gg a \qquad \text{y} \qquad R \gg l_{\perp}.$$

El desplazamiento relativo en el espacio de dos haces de luz que han pasado por las rendijas D_1 y D_2, es determinado por la diferencia de recorridos $|PD_1 - PD_2|$. Las figuras de interferencia de distintos átomos se amplificarán entre sí cuando la indicada diferencia de recorridos no supera la longitud de onda de radiación λ_0 para todos los átomos radiadores, independientemente de su disposición en la superficie de la fuente.

Es evidente que el valor máximo de $|PD_1 - PD_2|$ será alcanzado para los átomos que se hallan en el borde de la fuente. Escribiendo

$$(PD_1)^2 = R^2 + (l_{\perp} - a)^2/4, (PD_2)^2 = R^2 + (l_{\perp} + a)^2/4$$

obtenemos

$$|PD_1 - PD_2| \approx al_{\perp}/2R \qquad \text{y} \qquad al_{\perp}/R \lesssim \lambda_0,$$

donde en la última desigualdad, válida respecto del orden de la magnitud, ha sido omitido el factor 1/2. Así, pues, la figura de interferencia será observada para una distancia las rendijas que no supere

$$l_{\perp \text{coh}} = \lambda_0 R/a \tag{30.9}$$

que en el caso dado desempeña el papel de longitud transversal de coherencia. La magnitud

$$A = (l_{\perp \text{coh}})^2 = \lambda_0^2 R^2/S \tag{30.10}$$

es el "*area de coherencia*" y el producto

$$\Delta V = l_{\parallel \text{coh}} A = c\tau_{\text{coh}} A \tag{30.11}$$

recibe el nombre de *volumen de coherencia.* Aquí, $S = a^2$, es decir, el área de la sección transversal de la fuente.

Para la descripción cuántica, la luz (y, en general, todo campo electromagnético de radiación) es un conjunto de fotones — cuantos del campo electromagnético. La energía de cada fotón de frecuencia ω es igual a $\hbar\omega$, donde $\hbar$ es la constante de Planck. Una importante característica de las propiedades coherentes del campo es el parámetro de degeneración δ, igual al número medio de fotones que se hallan en un mismo estado de polarización dentro del volumen de coherencia, o sea, el número medio de fotones de la polarización dada que cruzan el área de coherencia durante el tiempo de coherencia.

Sea I_{ω} el número medio de fotones irradiados en la unidad de tiempo por una área unitaria de la superficie de la fuente en el intervalo unitario de frecuencias y en el ángulo sólido unitario normal a la superficie de la fuente. Si las dos direcciones posibles de polarización están representadas con la misma probabilidad, entonces

$$\delta = 1/2 I_{\omega} S \Delta\omega \Delta\Omega \tau_{\text{coh}},$$

donde $\Delta\Omega = A/R^2$ es el ángulo sólido bajo el que el área de coherencia se ve desde la fuente. Con ayuda de (30.8) y (30.10), tendremos

$$\delta \approx \frac{2\pi^2 c^2}{\omega^2} I_{\omega}. \tag{30.12}$$

El parámetro de degeneración escrito de esta forma no depende de la geometría y sólo caracteriza las propiedades de la fuente de radiación.

De la definición de δ se desprende que mientras mayor él será, más coherente será el campo de la fuente dada. Para las fuentes térmicas de luz el mayor valor de δ es de un orden de 10^{-3}, o sea, $\delta \ll 1$. Para los láseres $\delta \gg 1$ y puede alcanzar valores de un orden de 10^{14}.

Hallemos la ligazón cuantitativa entre la figura de interferencia que se observa en la pantalla del interferómento de Michelson y en el experimento de Young y el tensor correlativo del campo de radiación. Para simplificar, vamos a considerar que la luz es de polarización lineal y que ésta no varía durante la propagación. Entonces, el campo de radiación puede describirse con la función escalar compleja $U(r, t)$. En el punto Q (véase la fig. 30.2) el campo es el resultado de la superposición de los campos en los orificios D_1 y D_2. Podemos escribirlo así

$$U(r, t) = a_1 U(r_1, t - t_1) + a_2 U(r_2, t - t_2), \tag{30.13}$$

donde $t_1 = s_1/c$ y $t_2 = s_2/c$ son los tiempos de transmisión de las perturbaciones de D_1 y D_2 a Q; a_1 y a_2, los "coeficientes de transmisión" que, en general, son complejos, dependientes de las dimensiones y la forma de los orificios. En adelante, vamos a considerar que sus fases son iguales.

La figura de interferencia en la pantalla será determinada por la intensidad del campo $I(r)$ promediado respecto a la asociación por el cuadrado del módulo $\langle U^*(r, t)U(r, t) \rangle = I(r)$. Debido al supuesto carácter estacionario de la fuente la magnitud I no depende del tiempo. Con ayuda de (30.13), obtenemos

$$I(r) = |a_1|^2 I(r_1) + |a_2|^2 I(r_2) + 2|a_1 a_2| \operatorname{Re} \Gamma(r_1, r_2, \tau). \tag{30.14}$$

Aquí $\tau = t_1 - t_2 = (s_1 - s_2)/c$, la magnitud compleja

$$\Gamma(r_1, r_2, \tau) = \quad U^*(r_1, t)U(r_2, t + \tau) \tag{30.15}$$

recibe la denominación de *función de mutua coherencia*. Es la variante escalar del tensor correlativo estidiado en el p. 30.1 (bien el componente aislado diagonal del indicado tensor). Las intensidades de la luz en los puntos $r_j, j = 1, 2$, están ligadas con la función mutua de coherencia mediante la correlación

$$I(r_j) = \Gamma(r_j, r_j, 0). \tag{30.16}$$

La intensidad del campo en el punto Q creada por un orificio (cuando el segundo está cerrado) se determina

$$I_j(r) = |a_j|^2 I(r_j). \tag{30.17}$$

Determinemos también la función normada de la coherencia mutua (cruzada) $\gamma(r_1, r_2, \tau)$ que asimismo recibe el nombre de *grado complejo de coherencias*:

$$\gamma(r_1, r_2, \tau) = \frac{\Gamma(r_1, r_2, \tau)}{[I(r_1)/(r_2)]^{1/2}}. \tag{30.18}$$

Escribamos la intensidad del campo en el punto Q por medio de la intensidad de las ondas que pasan independientemente por cada uno de los orificios:

$$I(r) = I_1(r) + I_2(r) + 2[I_1(r)I_2(r)]^{1/2}\mathrm{Re}\,\gamma(r_1, r_2, \tau). \tag{30.19}$$

Para la luz cuasimonocromática, para la que $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$, la dependencia entre $U(r, t)$ y el tiempo será, en lo fundamental, determinada por el factor $\exp(-i\bar{\omega}t)$. La amplitud $A(t)$ y la adición a la fase $\Phi(t)$ (véase (29.20)), siendo funciones aleatorias para la luz no coherente, a pesar de todo, varían con mucha más lentitud, como $\exp(i\Delta\omega t)$. Por ello, si escribimos

$$\gamma(r_1, r_2, \tau) = |\gamma(r_1, r_2, \tau)| \exp[i\alpha(r_1, r_2, \tau) - i\bar{\omega}\tau], \tag{30.20}$$

γ y $\exp(i\alpha)$, serán funciones lentas de τ (en comparación con $\exp(-i\bar{\omega}t)$). Ellas sólo variarán durante el tiempo $\tau \gtrsim \tau_{\mathrm{coh}}$, mientras que $\exp(-i\bar{\omega}t)$ cambiará fuertemente en el período de las oscilaciones ópticas.

Haciendo uso de (30.20) reescribamos (30.19) en la forma

$$I(r) = I_1(r) + I_2(r) + 2[I_1(r)I_2(r)]^{1/2}|\gamma| \cos(\alpha - \bar{\omega}t). \tag{30.21}$$

Tomando en consideración lo dicho más arriba acerca de la lentitud de variación de $|\gamma|$ y α, vemos que el $\cos(\alpha - \bar{\omega}t)$ siendo $\tau \ll \tau_{\mathrm{coh}}$, fundamentalmente, cambia a cuenta de $\bar{\omega}\tau$. Por lo tanto, al desplazarse el punto Q por la pantalla y al variar la diferencia $s_1 - s_2 = c\tau$, la intensidad de iluminación de la pantalla cambiará en los límites desde

$$I_{\mathrm{máx}}(r) = I_1 + I_2 + 2(I_1I_2)^{1/2}|\gamma| \tag{30.22}$$

hasta

$$I_{\mathrm{mín}}(r) = I_1 + I_2 - 2(I_1I_2)^{1/2}|\gamma|. \tag{30.23}$$

Como $I \geqslant 0$ para cualquier relación entre I_1 e I_2, de (30.22) y (30.23) sigue que el módulo del grado complejo de coherencia puede variar en los márgenes

$$0 \leqslant |\gamma(r_1, r_2, \tau)| \leqslant 1. \tag{30.24}$$

Determinemos el contraste (eficacia luminosa, visibilidad) de la figura de interferencia en el punto dado r mediante el parámetro

$$\mathscr{V} = (I_{\mathrm{máx}} - I_{\mathrm{mín}})/(I_{\mathrm{máx}} + I_{\mathrm{mín}}). \tag{30.25}$$

De (30.22), (30.23) tenemos

$$\mathscr{V} = 2\left(\sqrt{\frac{I_1}{I_2}} + \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}\right)^{-1}_{|\gamma(r_1, r_2, \tau)|}. \tag{30.26}$$

En particular, siendo $I_1 = I_2$

$$\mathscr{V} = |\gamma(r_1, r_2, \tau)|, \tag{30.27}$$

es decir, el contraste de las bandas de interferencia, medido en el experimento, es igual al módulo del grado complejo de coherencia.

La fase del grado complejo de coherencia puede medirse según la posición de los máximos de intensidad de la figura de interferencia. De acuerdo con (30.21) la posición de los máximos se determina por la condición

$$\alpha\left(r_1, r_2, \frac{s_1 - s_2}{c}\right) - \frac{2\pi}{\bar{\lambda}}(s_1 - s_2) = 2m\pi, \qquad m = 0, \pm 1, \ldots \quad (30.28)$$

Las intensidades I_1 e I_2 son también magnitudes medidas. De este modo, la función de coherencia mutua $\Gamma(r_1, r_2, \tau)$ puede determinarse (por lo menos, en principio) mediante la figura de interferencia que se observa y las intensidades I_1, I_2 medidas.

Retornando a la expresión (30.19) vemos que para $|\gamma| = 0$ no surgen bandas de interferencia, la pantalla está iluminada de modo uniforme. Esto significa que dos haces luminosos que llegan a la pantalla D_1 y D_2 son no coherentes por completo. Si $|\gamma| = 1$ las bandas de interferencia tienen el contraste máximo posible, pero la intensidad del campo de radiación en los mínimos de luminosidad cae hasta cero. Los dos haces son plenamente coherentes. En los casos intermedios, $0 < |\gamma| < 1$, son parcialmente coherentes.

Si en el experimento de Young (véase la fig. 30.2) observamos la figura de interferencia cerca del eje de simetría del sistema (en el punto 0, $\tau = 0$) siendo distintas distancias entre D_1 y D_2, o sea, cambiando la diferencia $r_1 - r_2$, al desaparecer la figura de interferencia se puede establecer la longitud transversal de coherencia $l_{\text{coh}}^{\perp}$. Semejante experimento permite investigar la coherencia espacial del campo de radiación, o sea, la función $\gamma(r_1, r_2, 0)$. Por lo contrario, en el interferómetro de Michelson (véase la fig. 30.1) se investiga la coherencia temporal y mide la función de correlación temporal $\gamma(r_1, r_2, \tau)$. Aquí las coordenadas $r_1 = r_2 = r$ se prefijan con la posición del espejo *Es* que divide la luz en dos haces para introducir el retardo temporal entre ellos.

En conclusión escribamos la intensidad (30.21) en la forma

$$I = (1 - |\gamma|)(I_1 + I_2) + |\gamma|\{I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{1/2}\cos(\alpha - \bar{\omega}\tau)\}. \quad (30.29)$$

Vemos que en el punto Q es posible representar el campo como una mezcla de luz por completo no coherente y coherente. La primera tiene una intensidad $(1 - |\gamma|)(I_1 + I_2)$, en tanto que la segunda es una mezcla coherente del todo de dos haces con intensidades $|\gamma| I_1$, $|\gamma| I_2$ y de la diferencia de fase $\alpha - \bar{\omega}\tau$.

30.3. Polarización parcial de las ondas electromagnéticas. Al examinar más arriba la figura de interferencia hicimos uso de la función escalar de coherencia mutua. No obstante, al estudiar las propiedades de polarización de la luz parcialmente coherente, hay que examinar el tensor correlativo completo $J_{\alpha\beta}$.

Sea que el campo de radiación es un flujo de ondas cuasimonocromáticas no coherentes en propagación a lo largo del eje z. En tal caso, el tensor $J_{\alpha\beta}$ sólo tiene 4 componentes, los índices α, β toman los valores 1, 2. La intensidad completa del campo en el punto r será igual a la suma de los componentes diagonales del tensor $J_{\alpha\beta}$ tomada para $r_1 = r_2 = r$ y $t_1 = t_2 = t$:

$$I(r) = J_{\alpha\alpha}(r, r, 0). \tag{30.30}$$

Aquí se supone que el campo es estacionario, la intensidad no depende del tiempo.

Primero examinemos varios casos particulares.

1. Luz polarizada por completo. Todas las direcciones de las oscilaciones en el plano xy son equiprobables, el tensor $J_{\alpha\beta}$ es invariante respecto de los giros alrededor del eje z. Esto quiere decir, que $J_{\alpha\beta}$ es proporcional al tensor unitario $\delta_{\alpha\beta}$:

$$J_{\alpha\beta} = 1/2I\delta_{\alpha\beta}. \tag{30.31}$$

La magnitud I es la intensidad total de la luz.

2. Onda plana monocromática. Hagamos uso de la fórmula (28.7) y (28.21). En los ejes dirigidos a lo largo de los vectores reales $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, perpendiculares entre sí, tendremos

$$J_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \mathscr{E}_1^2 & \pm i\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 \\ \pm i\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 & \mathscr{E}_2^2 \end{pmatrix}. \tag{30.32}$$

Este tensor, para $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ arbitrarios, describe una onda con polarización elíptica.

A las ondas de polarización lineal corresponden los tensores

$$(J_{\alpha\beta}) = I\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (J_{\alpha\beta}) = I\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{30.33}$$

a las de polarización circular, los tensores con componentes diagonales mínimos

$$(J_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}I\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (J_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}I\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \tag{30.34}$$

donde, en todo lugar, I es la intensidad total. La singularidad característica de los tensores (30.32) — (30.34) que describen la onda polarizada por completo, consiste en que sus determinantes se reducen a cero:

$$|J_{\alpha\beta}| = J_{11}J_{22} - |J_{12}|^2 = 0. \tag{30.35}$$

Con la polarización parcial de las ondas $|J_{\alpha\beta}| \neq 0$ a pesar de que, como antes, el tensor $J_{\alpha\beta}$ es hermitiano: $J_{\alpha\beta} = J^*_{\beta\alpha}$. Representémoslo en forma de la suma de dos tensores

$$J_{\alpha\beta} = J^{(n)}_{\alpha\beta} + J^{(p)}_{\alpha\beta}, \tag{30.36}$$

de los cuales, uno de ellos,

$$J_{\alpha\beta}^{(n)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \tag{30.37}$$

describe la onda no polarizada totalmente y el otro,

$$J_{\alpha\beta}^{(p)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} B & D \\ D^* & C \end{pmatrix} \tag{30.38}$$

la polarizada por completo. Basándonos en (30.36) — (30.38)

$$I_n + B = 2J_{11}, D = 2J_{12}, D^* = 2J_{21}, I_n + C = 2J_{22}.$$

Exigiendo que

$$B \geqslant 0, C \geqslant 0 \text{ y } BC - DD^* = 0$$

(condición de polarización total), obtenemos la ecuación para I_n:

$$(2J_{11} - I_n)(2J_{22} - I_n) - 4J_{12}J_{21} = 0.$$

De aquí, hallamos

$$I_n = J_{11} + J_{22} \pm \sqrt{(J_{11} - J_{22})^2 + 4|J_{12}|^2}. \tag{30.39}$$

La solución con signo menos delante de la raíz nos proporciona

$$B = J_{11} - J_{22} + \sqrt{(J_{11} - J_{22})^2 + 4|J_{12}|^2} \geqslant 0, \tag{30.40}$$

$$C = J_{22} + J_{11} \pm \sqrt{(J_{11} - J_{22})^2 + 4|J_{12}|^2} \geqslant 0,$$

en tanto que la solución con el signo más nos da $B \leqslant 0$, $C \leqslant 0$ y debe ser desechada.

La intensidad total de la onda

$$I = I_n + 1/2(B + C) = J_{11} + J_{22}, \tag{30.41}$$

mientras que la de la onda polarizada totalmente

$$I_p = 1/2(B + C) = \sqrt{(J_{11} - J_{22})^2 + 4|J_{12}|} = \\ = \sqrt{(J_{11} + J_{22})^2 - 4|J_{\alpha\beta}|}. \tag{30.42}$$

La convolución $J_{\alpha\alpha} = J_{11} + J_{22}$ y el determinante $|J_{\alpha\beta}|$ son magnitudes invariantes respecto de los giros, por lo que la división de la intensidad total en I_n e I_p no depende de la elección de los ejes x e y en el plano perpendicular a Oz. La razón de la intensidad de la onda polarizada totalmente a la intensidad total recibe el nombre de *grado de polarización* P de la onda inicial

$$P = \frac{I_p}{I} = \sqrt{1 - \frac{4|J_{\alpha\beta}|}{(J_{11} + J_{22})^2}}, \tag{30.43}$$

mientras que la magnitud $p = 1 - P$, *grado de su despolarización*. Es fácil cerciorarse de que

$$0 \leqslant P \leqslant 1, \qquad 1 \geqslant p \geqslant 0. \tag{30.44}$$

También es posible otra representación del tensor de polarización. Hallemos sus valores propios $I^{(1)}$, $I^{(2)}$ y vectores propios $e_\alpha^{(1)}$, $e_\alpha^{(2)}$, los que elegiremos normados $\mathbf{e}_\alpha^{*(i)}\mathbf{e}_\alpha^{(i)} = 1$. Para ello, confeccionamos y resolvemos la ecuación

$$J_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\beta = I\mathbf{e}_\alpha. \tag{30.45}$$

Los valores propios $I^{(1,2)}$ pueden hallarse de la igualdad a cero del determinante

$$|J_{\alpha\beta} - I\delta_{\alpha\beta}| = 0,$$

de donde obtenemos

$$I^{(1,2)} = 1/2(J_{11} + J_{22}) \pm 1/2\sqrt{(J_{11} + J_{22})^2 - 4|J_{\alpha\beta}|}. \tag{30.46}$$

Debido al carácter hermitiano de $J_{\alpha\beta}$, los valores propios $I^{(1)}$, $I^{(2)}$ son reales y, hablando en general, diferentes: como sigue de (30.42), la igualdad $I^{(1)} = I^{(2)}$ es posible en un solo caso: $J_{11} = J_{22}, J_{12} = 0$, correspondiente al campo no polarizado totalmente con tensor (30.31).

Los vectores propios $\mathbf{e}_\alpha^{(1)}$, $\mathbf{e}_\alpha^{(2)}$ cuando $I^{(1)} \neq I^{(2)}$ son perpendiculares entre sí. Para cerciorarnos de esto transformemos (30.45) a las siguientes formas:

$$I^{(1)}e_\alpha^{(1)}e_\alpha^{*(2)} = e_\alpha^{*(2)}J_{\alpha\beta}e_\beta^{(1)},$$

$$I^{(2)}e_\alpha^{(1)}e_\alpha^{*(2)} = e_\alpha^{(1)}J_{\alpha\beta}^{*}e_\beta^{*(2)}.$$

Componiendo la diferencia de las dos últimas igualdades, hallamos

$$(I^{(1)} - I^{(2)})e_\alpha^{(1)}e_\alpha^{*(2)} = e_\alpha^{*(2)}J_{\alpha\beta}e_\beta^{(1)} - e_\beta^{*(2)}J_{\beta\alpha}e_\alpha^{(1)} = 0,$$

donde hicimos uso del carácter hermitiano de $J_{\alpha\beta}$. De aquí

$$e_\alpha^{(1)}e_\alpha^{*(2)} = 0. \tag{30.47}$$

Desarrollemos $J_{\alpha\beta}$ por sus vectores propios $e_\alpha^{(1)}$, $e_\alpha^{(2)}$. Escribiendo

$$J_{\alpha\beta} = J^{(1)}e_\alpha^{(1)}e_\beta^{*(1)} + J^{(2)}e_\alpha^{(2)}e_\beta^{*(2)}$$

y empleando la propiedad de ortogonalidad (30.47), con ayuda de (30.45), obtenemos

$$J^{(1)} = e_\alpha^{*(1)}J_{\alpha\beta}e_\alpha^{(1)} = I^{(1)}, \qquad J^{(2)} = e_\alpha^{*(2)}J_{\alpha\beta}e_\alpha^{(2)} = I^{(2)}.$$

Los vectores complejos $\mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}^{(2)}$, como vimos en el § 28, describen en el caso general ondas polarizadas elípticamente, por lo que la representación

$$J_{\alpha\beta} = I^{(1)}e_\alpha^{(1)}e_\beta^{*(1)} + I^{(2)}e_\alpha^{(2)}e_\beta^{*(2)} \tag{30.48}$$

puede considerarse como la superposición no coherente de dos ondas de polarización elíptica. Escribiéndola en la forma

$$J_{\alpha\beta} = I^{(2)}(e_\alpha^{(1)}e_\beta^{*(1)} + e_\alpha^{(2)}e_\beta^{*(2)}) + \\ + (I^{(1)} - I^{(2)})e_\alpha^{(1)}e_\beta^{*(1)}, \tag{30.49}$$

teniendo en cuenta que $\delta_{\alpha\beta} = e_\alpha^{(1)}e_\beta^{*(1)} + e_\alpha^{(2)}e_\beta^{*(2)}$ y comparando con (30.36), hallamos

$$I_n = 2I^{(2)}, \qquad I_p = I^{(1)} - I^{(2)}. \tag{30.50}$$

El sumando

$$J_{\alpha\beta}^{(n)} = I^{(2)}(e_\alpha^{(1)}e_\beta^{*(1)} + e_\alpha^{(2)}e_\beta^{*(2)})$$

proporciona la representación de una onda totalmente polarizada en forma de la superposición no coherente de dos ondas polarizadas de igual intensidad.

Los grados de polarización y despolarización pueden expresarse por medio de los valores propios $I^{(1)}$, $I^{(2)}$ del tensor de polarización:

$$P = \frac{I^{(1)} - I^{(2)}}{I^{(1)} + I^{(2)}}, \rho = \frac{2I^2}{I^{(1)} + I^{(2)}}. \tag{30.51}$$

El tensor de polarización se expresa, en ocasiones, por la intensidad total I y los parámetros de Stokes ξ_α ($\alpha = 1, 2, 3$):

$$J_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix}. \tag{30.52}$$

Los componentes $J_{\alpha\beta}$ y los parámetros de Stokes se determinan con facilidad mediante los valores medidos de las intensidades, ligados con las proyecciones del vector E en diferentes ejes en el plano xy.

§ 31. Forma hamiltoniana de las ecuaciones del campo electromagnético

En el § 28 establecimos que las ondas planas monocromáticas son tipos posibles de oscilaciones del campo electromagnético en el vacío que, por lo tanto, es un sistema oscilatorio con número infinito de grados de libertad. Más abajo introduciremos las coordenadas normales (principales) de dicho sistema oscilatorio y escribiremos las ecuaciones del campo en forma hamiltoniana. Semejante enfoque resulta cómodo al resolver muchos problemas sobre la interacción entre las partículas cargadas y el campo electromagnético*) en los márgenes de electrodinámica clásica. Pero el método hamiltoniano es particularmente útil al realizar la descripción cuántica del campo electromagnético.

*) Véase el libro de V. L. Guinsburg [32] en el que con amplitud se emplea el método de Hamilton.

31.1. Tipos propios de oscilaciones (modos) del campo electromagnético. Cuando no hay cargas, el campo electromagnético puede describirse mediante el potencial vectorial $A(r, t)$ que satisfaga las ecuaciones (27.7) y (27.8):

$$\Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0, \qquad \operatorname{div} A = 0. \tag{31.1}$$

Es cómodo examinar el campo en el interior de un cubo de cara L superponiendo al campo las condiciones de periodicidad para cada una de las coordenadas cartesianas:

$$A(x,y,z,t) = A(x+L,y,z,t) = A(x,y+L,z,t) = A(x,y,z+L,t). \tag{31.2}$$

Esto significa que dividimos todo el espacio en regiones cúbicas de volumen $L^3 = V$ y consideramos que en todas esas regiones el campo se comporta de modo semejante. De razonamientos físicos sigue que es evidente que para L suficientemente grandes, la conducta del campo dentro del volumen V dependerá débilmente de las condiciones en sus límites. Por lo que, ningunos resultados físicos no contendrán el volumen V de la región principal. Al mismo tiempo la superposición de las condiciones de frontera periódicas (31.2), dejando infinito el número de oscilaciones propias del sistema permite convertirlas en discretas, lo que proporciona determinadas ventajas.

Estudiemos soluciones particulares de las ecuaciones (31.1) en forma de ondas planas con valores determinados del vector de onda k y de la polarización:

$$\tilde{A}_{k\sigma}(r, t) = q_{k\sigma}(t) A_{k\sigma}(r). \tag{31.3}$$

Aquí $A_{k\sigma}(r)$ es una función propia de coordenadas que satisface las condiciones de frontera (31.2) y la ecuación $\operatorname{div} A = 0$. Elijámosla en forma de

$$A_{k\sigma}(r) = \mathbf{e}_{k\sigma}\sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}}\exp(ik\cdot r), \tag{31.4}$$

donde $\mathbf{e}_{k\sigma}$ es un vector unitario que describe la polarización de la onda plana. El satisface la condición

$$k\cdot\mathbf{e}_{k\sigma} = 0. \tag{31.5}$$

El índice σ determina el tipo de polarización de la onda plana y toma dos valores: $\sigma = 1, 2$. Si han sido elegidas ondas de polarización plana, podemos hacer

$$\mathbf{e}_{k1} = \mathbf{e}_x, \qquad \mathbf{e}_{k2} = \mathbf{e}_y, \tag{31.6}$$

donde $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ son los versores del sistema de coordenadas cartesianas con el

eje z dirigido a lo largo de $\boldsymbol{k}$. Con la polarización circular de la onda, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k1} &= (1/\sqrt{2})(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y), \\ \mathbf{e}_{k2} &= (1/\sqrt{2})(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y), \end{aligned} \tag{31.7}$$

Es fácil también describir de modo análogo la polarización elíptica. En todos los casos, los versores de la polarización satisfacen las condiciones de ortogonalidad:

$$\mathbf{e}^*_{k\sigma} \cdot \mathbf{e}_{k\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}. \tag{31.8}$$

Asimismo es cómodo exigir el cumplimiento de la condición

$$\mathbf{e}_{-k\sigma} = \mathbf{e}^*_{k\sigma} \tag{31.9}$$

con el fin de que la función propia posea una propiedad análoga

$$A_{-k\sigma}(r) = A^*_{k\sigma}(r). \tag{31.10}$$

De la condición de periodicidad (31.2) podemos obtener los valores posibles del vector de onda:

$$\exp(ik_xL) = \exp(ik_yL) = \exp(ik_zL) = 1,$$

de donde

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_1, \qquad k_y = \frac{2\pi}{L} n_2, \qquad k_z = \frac{2\pi}{L} n_3. \tag{31.11}$$

Aquí $n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ son números enteros tomados al azar. Por medio de (31.11) es fácil calcular la integral del producto de las funciones propias:

$$\int_{(V)} (A^*_{k'\sigma'} \cdot A_{k\sigma}) dV.$$

Haciendo uso de las coordenadas cartesianas, tendremos

$$\int_0^L \exp\{i(k_x - k'_x)x\} dx = \frac{\exp\{2\pi i(n_1 - n'_1)\} - 1}{i(k_x - k'_x)} = \begin{cases} 0 \text{ si } n_1 \neq n'_1, \\ L \text{ si } n_1 = n'_1. \end{cases}$$

En resumen, obtenemos la condición de ortogonalidad y de normación de las funciones propias:

$$\int_{(V)} (A^*_{k\sigma} \cdot A_{k\sigma}) dV = 4\pi c^2 \delta_{kk} \cdot \delta_{\sigma\sigma'}. \tag{31.12}$$

Claro está que la elección del factor de normación es arbitraria y se dicta por consideraciones de comodidad de anotación de las fórmulas posteriores.

Retornemos a (31.3) y obtengamos la ecuación a la que satisfacen las funciones $q_{k\sigma}(t)$ dependientes del tiempo que desempeñan el papel de coordenadas generalizadas. Sustituyendo (31.3) en la ecuación de onda (31.1), obtenemos

$$\ddot{q}_{k\sigma} + \omega_k^2 q_{k\sigma} = 0, \tag{31.13}$$

donde $\omega_k = ck$. Vemos que las magnitudes $q_{k\sigma}$ satisfacen la ecuación del oscilador armónico y, por consiguiente, son las coordenadas principales del sistema oscilatorio.

Escribamos la solución (31.13) en la forma

$$q_{k\sigma} = q_{k\sigma}^0 \exp(-i\omega_k t) \tag{31.14}$$

y superpongamos determinada ligazón entre $q_{k\sigma}$ y $q_{-k\sigma}$, exijamos que se cumpla una relación análoga a (31.10):

$$q_{-k\sigma}(t) = q_{k\sigma}^*(t). \tag{31.15}$$

A semejante condición el potencial vectorial total $A(r, t)$, escrito como la suma de las soluciones particulares de (30.3) con todas las k y σ posibles, será una magnitud real:

$$A(r, t) + \sum q_{k\sigma}(t) A_{k\sigma}(r). \tag{31.16}$$

La realidad de A se asegura porque cada término $q_{k\sigma} A_{k\sigma}$ en la suma (31.16) es acompañado de un término complejo-conjugado

$$q_{-k\sigma} A_{-k\sigma} = (q_{k\sigma} A_{k\sigma})^*.$$

Desde el punto de vista matemático el desarrollo (31.16) es una serie de Fourier. También puede ser escrito en tal forma que cada sumando, siendo k, σ prefijadas, sea real:

$$A(r, t) = \sum [q_{k\sigma}(t) A_{k\sigma}(r) + q_{k\sigma}^*(t) A_{k\sigma}^*(r)]. \tag{31.17}$$

En comparación con (31.16) en (31.17) el número de sumandos es doble, cada término se tiene en cuenta dos veces.

31.2. Número de oscilaciones propias. Calculemos el número de oscilaciones propias del campo en el intervalo dado de frecuencias o de vectores de onda. A cada valor de una terna de números propios n_1, n_2, n_3 en (31.11) corresponde cierto valor del vector de onda. Por ello, a los intervalos prefijados Δn_1, Δn_2, Δn_3 de los números propios, corresponderá un número de valores del vector de onda

$$\Delta N = \Delta n_1 \Delta n_2 \Delta n_3.$$

Si L es grande y los valores n_1, n_2, n_3 son también suficientemente grandes, los incrementos Δn_i pueden considerarse infinitesimales:

$$dN = dn_1 dn_2 dn_3.$$

Haciendo uso de (31.11), hallamos el número de oscilaciones propias del campo (con una polarización para cada valor de $\boldsymbol{k}$) que corresponde al intervalo prefijado de valores de la proyección del vector de onda:

$$dN = \frac{V}{(2\pi)^3} dk_x dk_y dk_z. \tag{31.18}$$

Escribiendo d^3k en coordenadas esféricas, obtenemos el número de oscilaciones propias dN en otras variables:

$$dN = \frac{V}{(2\pi)^3} k^2 dk d\Omega_k, \tag{31.19}$$

donde $d\Omega_k$ es el ángulo sólido dentro del cual está dirigido $\boldsymbol{k}$. Para finalizar, haciendo en (31.19) $k = \omega/c$, hallamos dN en la función de frecuencia:

$$dN = \frac{V}{(2\pi c)^3} \omega^2 d\omega d\Omega_k. \tag{31.20}$$

El número total de oscilaciones propias, teniendo en cuenta dos tipos posibles de polarización para cada $\boldsymbol{k}$, será igual a $2dN$.

Si el espectro de valores de $\boldsymbol{k}$ es próximo al continuo (gran volumen V), la suma en (31.16), (31.17) puede sustituirse por la integración. Con ello, las series de Fourier se convierten en las integrales de Fourier, p. ej., (31.16) tomará la forma

$$A(r, t) = \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_{\sigma=1,2} \int q_{k\sigma}(t) A_{k\sigma}(r) d^3k. \tag{31.21}$$

31.3. Hamiltoniano y forma hamiltoniana de las ecuaciones del campo. Calculemos la energía del campo en el volumen V. Mediante de (31.16) y las fórmulas (27.6), hallamos

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{c} \sum_{k,\sigma} \dot{q}_{k\sigma} A_{k\sigma} = -\frac{1}{c} \sum_{k,\sigma} \dot{q}^*_{k\sigma} A^*_{k\sigma}, \\ H &= i \sum_{k,\sigma} q_{k\sigma} [k \times A_{k\sigma}] = -i \sum_{k,\sigma} q^*_{k\sigma} [k \times A^*_{k\sigma}]. \end{aligned} \tag{31.22}$$

Aquí, las segundas sumas están escritas partiendo de la indicación, hecha más arriba, acerca de la realidad de $A(r, t)$.

La energía del campo

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_{(V)} (E^2 + H^2) dV.$$

Calculando por separado las integrales de E^2 y H^2, hallamos

$$\frac{1}{8\pi}\int_{(V)} E^2 dV = \frac{1}{8\pi c^2} \sum_{k,k',\sigma,\sigma'} \dot{q}^*_{k'\sigma'}\dot{q}_{k\sigma}\int (A^*_{k'\sigma'}\cdot A_{k\sigma})dV = \frac{1}{2}\sum_{k,\sigma} \dot{q}^*_{k\sigma}\dot{q}_{k\sigma},$$

donde hemos hecho uso de la condición (31.12). La suma doble H^2 contiene el producto

$$[k' \times A^*_{k'\sigma'}]\cdot[k \times A_{k\sigma}] = (k'\cdot k)(A^*_{k'\sigma'}\cdot A_{k\sigma}) - (k\cdot A^*_{k'\sigma'})(k\cdot A_{k\sigma}).$$

La integración de este producto por dV conduce a la condición $k' = k$ y el segundo término proporciona cero debido a que las ondas son transversales. Como resultado tenemos

$$\frac{1}{8\pi}\int H^2 dV = \frac{1}{2}\sum_{k,\sigma} (ck)^2 q^*_{k\sigma} q_{k\sigma}.$$

Por medio de (31.14) hallamos $\dot{q}_{k\sigma} = -i\omega_k q_{k\sigma}$ y obtenemos la energía del campo en la forma

$$W = \sum_{k,\sigma} \omega_k^2 q^*_{k\sigma} q_{k\sigma}. \tag{31.23}$$

La energía total del campo se ha expresado en forma de la energía de oscilaciones propias aisladas:

$$W = \sum_{k,\sigma} W_{k\sigma}, \qquad W_{k\sigma} = \omega_k^2 q^*_{k\sigma} q_{k\sigma}. \tag{31.24}$$

Un cálculo análogo permite hallar el impulso del campo:

$$P = \frac{1}{4\pi c}\int_{(V)} [E \times H]dV = \sum_{k,\sigma} \frac{k W_{k\sigma}}{\omega_k}. \tag{31.25}$$

La magnitud $k W_{k\sigma}/\omega_k$ es el impulso de un modo propio. La ligazón entre la energía y el impulso de cada modo es la misma que para una partícula ultrarrelativista, $W_{k\sigma} = cP_{k\sigma}$.

En lugar de las coordenadas complejas principales $q_{k\sigma}(t)$ introduzcamos las variables reales canónicas $Q_{k\sigma}$, $P_{k\sigma}$:

$$q_{k\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q_{k\sigma} + \frac{iP_{k\sigma}}{\omega_k}\right). \tag{31.26}$$

De (31.13) y (31.26) se desprende que ellas también satisfacen la ecuación del oscilador, en particular

$$\ddot{Q}_{k\sigma} + \omega_k^2 Q_{k\sigma} = 0. \tag{31.27}$$

La energía del sistema expresada por las coordenadas generalizadas y los impulsos es de por sí la función de Hamilton. Sustituyendo (31.26) en

(31.23) y empleando la designación $\mathscr{H}$ para la función de Hamilton, obtenemos

$$\mathscr{H} = 1/2 \sum_{k,\sigma} (P_{k\sigma}^2 + \omega_k^2 Q^2{}_{k\sigma}), \tag{31.28}$$

es decir, sistemas hamiltonianos de osciladores armónicos que no están en interacción. Las ecuaciones canónicas tienen el aspecto

$$\dot{Q}_{k\sigma} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial P_{k\sigma}} = P_{k\sigma}, \dot{P}_{k\sigma} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q_{k\sigma}} = -\omega_k^2 Q_{k\sigma} \tag{31.29}$$

y conducen a la ecuación correcta de movimiento (31.27). Esto demuestra que $P_{k\sigma}$ y $Q_{k\sigma}$ son variables canónico-conjugadas.

Capítulo VII. Campos de cargas en movimiento

§ 32. Potenciales retardados

En este capítulo vamos a confeccionar los casos más importantes de solución de ecuaciones de onda no homogéneas

$$\begin{aligned} \Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} j(r,t), \\ \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho(r,t), \end{aligned} \tag{32.1}$$

en las que j y ρ son funciones arbitrarias de las coordenadas y el tiempo. Consideremos que las fuentes están distribuidas en una región finita del espacio y hallemos los potenciales creados por dichas fuentes por todo el espacio infinito. Hay que remarcar que semejante planteamiento del problema tiene, desde un principio, carácter aproximado. En realidad, el campo creado por las partículas cargadas influye sobre su movimiento, por lo que j y ρ en los segundos miembros, hablando en rigor, son funcionales no lineales de los potenciales buscados. En muchos casos (aunque no siempre) el efecto inverso del campo sobre el movimiento de las cargas es pequeño y puede despreciarse. Con esto, el problema se linealiza. En el presente parágrafo vamos a hacer, precisamente, uso de semejante planteamiento del problema.

32.1. Función de Green de la ecuación de onda. Podemos hallar la solución de la ecuación no homogénea con ayuda de la función de Green, como ya lo hicimos en electrostática (§ 20). Determinemos la función de Green $G(r, t, r', t')$ como solución de la ecuación:

$$\Delta G - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi\delta(r - r')\delta(t - t') \tag{32.2}$$

para un espacio infinito. La solución de las ecuaciones de onda puede ser escrita por medio de la función de Green en forma de una integral:

$$A(r,t) = \frac{1}{c}\int G(r,t,r',t')j(r',t)d^3r'dt'. \tag{32.3}$$

Para φ también podemos escribir una integral análoga. Aplicando a $A(r,t)$ el operador de d'Alembert y, haciendo uso de (32.2), nos cercioramos de que la ecuación (32.1) se satisface.

Más abajo veremos que la ecuación (32.2) satisface no una, sino que una extensa clase de funciones de Green que al ser utilizadas en (32.3) conducen a diversas soluciones para $A(r,t)$. Con el fin de destacar la única solución adecuada para el problema que examinamos, hay que tomar en consideración razonamientos físicos equivalentes a la prefijación de ciertas condiciones de frontera. Si consideramos la radiación de ondas electromagnéticas por una fuente preestablecida al espacio infinito sin haber límites de ninguna clase, para destacar la solución única tolerable desde el punto de vista físico, es suficiente adoptar el principio de causalidad. Este requiere que la causa (movimiento de las cargas en la fuente que provoca la radiación) preceda al efecto (excitación del campo en el punto de observación). Los potenciales que satisfacen este criterio se denominan *retardados*. Un examen adicional de este importante problema será realizado en el p. 32.2.

Designando $\boldsymbol{R} = r - r'$ y $\tau = t - t'$, convertimos (32.2) en la forma

$$\Delta_R G - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} = -4\pi\delta(\boldsymbol{R})\delta(\tau). \tag{32.4}$$

De aquí se desprende que la función de Green sólo depende de la diferencia de los argumentos: $G(r - r', t - t') = G(\boldsymbol{R}, \tau)$.

Es cómodo resolver la ecuación (32.4) con ayuda del desarrollo de la función buscada en la integral de Fourier:

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{R},\tau) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int \tilde{G}(\boldsymbol{k},\omega)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R} - i\omega\tau)d^3k d\omega, \\ \tilde{G}(\boldsymbol{k},\omega) &= \int G(\boldsymbol{R},\tau)\exp(i\omega\tau - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R})d^3R d\tau, \end{aligned} \tag{32.5}$$

donde la integración se efectúa en límites infinitos. Multipliquemos (32.4) por $\exp(i\omega\tau - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R})$ e integremos por $d^2R d\tau$. El primier miembro se transforma mediante la integración doble miembro por miembro, p. ej.,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 G}{\partial\tau^2}\exp(i\omega\tau)d\tau = \frac{\partial G}{\partial\tau}\exp(i\omega\tau)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - i\omega\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial G}{\partial\tau}\exp(i\omega\tau)d\tau. \tag{32.6}$$

El sumando separado se anula a causa del decrecimiento de G para τ y $\boldsymbol{R}$ grandes. Integrando (32.6) una vez más, miembro por miembro, obtene-

mos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} \exp(i\omega\tau - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}) d^3R d\tau = -\omega^2 \tilde{G}(\boldsymbol{k}, \omega). \tag{32.7}$$

Transformando de modo análogo el término con el laplaciano en (32.4), obtenemos una ecuación algebraica para la imagen de Fourier $\tilde{G}(\boldsymbol{k}, \omega)$:

$$(k^2 - \omega^2/c^2)\tilde{G}(\boldsymbol{k}, \omega) = 4\pi. \tag{32.8}$$

A primera vista parece que la imagen de Fourier $\tilde{G}(\boldsymbol{k}, \omega)$ se determina de forma única de (32.8):

$$\tilde{G}(\boldsymbol{k}, \omega) = 4\pi/(k^2 - \omega^2/c^2). \tag{32.9}$$

Pero esto no es así. La cuestión radica en que el factor $(k^2 - \omega^2/c^2)$ se anula para $\omega = \pm kc$. Esto permite escribir la ecuación (32.8) en forma equivalente:

$$(k^2 - \omega^2/c^2)\tilde{G}(\boldsymbol{k}, \omega) = 4\pi + F_0(\boldsymbol{k}, \omega)(k^2 - \omega^2/c^2)\delta(k^2 - \omega^2/c^2), \tag{32.10}$$

donde $F_0(\boldsymbol{k}, \omega)$ es una función arbitraria acotada cuando $k^2 = \omega^2/c^2$. Debido a las propiedades de la función delta el producto

$$(k^2 - \omega^2/c^2)\delta(k^2 - \omega^2/c^2) = 0,$$

por lo que (32.10) es equivalente a (32.8). Pero en (32.10) vemos que al escribir la solución en la forma (32.9) hemos omitido el sumando que contiene la función arbitraria

$$\tilde{G}(\boldsymbol{k}, \omega) = 4\pi \Big/ \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) + F_0(\boldsymbol{k}, \omega)\delta\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right). \tag{32.11}$$

Como vemos de su estructura, este sumando es la solución de la ecuación homogénea de onda.

Para nuestros objetivos es suficiente construir una función de Green que no sea de la forma más general, sino de cierto tipo particular, por lo que nos limitaremos a la solución particular (32.9). Pero incluso la imagen de Fourier (32.9) no conduce a una sola función de Green. Esto se explica porque el denominador de (32.9) se anula para valores reales de $\boldsymbol{k}$ y ω, por lo que al calcular la integral de Fourier (32.5) hay que prefijar una regla adicional de integración de la función singular. Como veremos, en dependencia de esta regla serán obtenidas diferentes funciones de Green.

Escribimos la integral de Fourier en la forma

$$G(\boldsymbol{R}, \tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} G(\boldsymbol{k}, \omega) \exp(-i\omega\tau). \tag{32.12}$$

Al calcular la integral interior

$$G(\boldsymbol{k}, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} G(\boldsymbol{k}, \omega) \exp(i\omega\tau) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c^2 d\omega}{\omega_k^2 - \omega^2} \exp(-i\omega\tau) \quad (32.13)$$

el integrando tiene polos en los puntos $\omega = \pm\omega_k = \pm ck$, por ello si interpretamos la integral al pie de la letra, ella no tiene sentido. Para determinarla es preciso preestablecer las reglas de integración de singularidades. Estas deben reducirse a cierta deformación del circuito de integración, debido a la cual los polos resultan yacer fuera del contorno, y por consiguiente la integral se determina unívocamente.

Estudiemos el plano de la variable no compleja ω. En las integrales (32.13) la vía de integración pasa por el eje real. Deformémoslo de forma que los dos polos sean contorneados por semicircunferencias infinitesimales en el semiplano superior (fig. 32.1). Después de esto, la integral por el contorno C_R se calcula con facilidad con ayuda de los residuos. Siendo $\tau > 0$ cerramos el circuito de integración con el arco de la semicircunferencia de gran radio R en el semiplano inferior. Para $R \to \infty$ la integral por la semicircunferencia grande se reduce a cero, ya que el grado del exponente adquiere una parte real negativa grande. Pero la integral por un contorno cerrado se determina mediante la suma de los residuos respecto de los polos ubicados en el interior del contorno:

$$G = 2c^2 \int_{C_R} \frac{\exp(-i\omega\tau)}{\omega_k^2 - \omega^2} d\omega =$$

$$= 2c^2(-2\pi i)\left\{\frac{\exp(i\omega_k\tau)}{2\omega_k} - \frac{\exp(-i\omega_k\tau)}{2\omega_k}\right\} = 4\pi c^2 \frac{\operatorname{sen}(\omega_k\tau)}{\omega_k}, \ \tau > 0.$$

Si $\tau < 0$ es preciso cerrar el contorno de la otra semicircunferencia en el semiplano superior, en el que el integrando es exponencialmente pequeño. Al interior del contorno cerrado no penetra ni un solo residuo, por lo que $G(\boldsymbol{k}, \tau) = 0$ cuando $\tau < 0$. En resumen, el resultado definitivo para la integral interior (32.12) tiene el aspecto:

$$G^R(\boldsymbol{k}, \tau) = \begin{cases} \dfrac{4\pi c^2 \operatorname{sen}(\omega_k\tau)}{\omega_k}, & \tau > 0; \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \quad (32.14)$$

La función de Green, distinta de cero para $\tau > 0$, recibe el nombre de *retardada*. Este hecho se designa con el índice R (del inglés *Retarded*).

Pasando al cálculo de la integral por d^3k introducimos en el espacio $\boldsymbol{k}$ el sistema esférico de coordenadas con el eje z dirigido a lo largo del eje $\boldsymbol{R}$. Como $G^R(\boldsymbol{k}, \tau)$ no depende de los ángulos del vector $\boldsymbol{k}$, podemos integrar el

factor $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R})$ independientemente por los ángulos:

$$\int \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R})d\Omega_k = 2\pi \int_0^{\pi} \exp(ikR\cos\vartheta)\,\mathrm{sen}\,\vartheta d\vartheta = \frac{4\pi}{kR}\,\mathrm{sen}\,(kR). \quad (32.15)$$

A continuación, sustituyendo (32.14) y (32.15) en (32,12), donde $d^3k = k^2dkd\Omega_k$, siendo $\tau > 0$, tendremos

$$G^R(\boldsymbol{R},\tau) = \frac{2c}{\pi R}\int_0^{\infty} \mathrm{sen}\,(kR)\,\mathrm{sen}\,(kc\tau)dk =$$

$$= \frac{c}{\pi R}\int_0^{\infty} [\cos(kR - kc\tau) - \cos(kR + kc\tau)]dk.$$

Haciendo uso de la representación de la función delta (comp. IV. 21), obtenemos

$$G^R(\boldsymbol{R},\tau) = \begin{cases} \dfrac{c}{R}[\delta(\boldsymbol{R} - c\tau) - \delta(\boldsymbol{R} + c\tau)], & \tau > 0; \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \quad (32.16)$$

Como por definición $R \geqslant 0$, entonces $\delta(\boldsymbol{R} + c\tau) = 0$ es idéntica si $\tau > 0$. La forma definitiva de la función retardada de Green:

$$G^R(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t') = \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\,\delta\left(t - t' - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}\right). \quad (32.17)$$

Aquí hemos empleado la fórmula $\delta(\alpha x) = \delta(x)/|\alpha|$. El hecho que $G^R = 0$ siendo $t < t'$ puede ser remarcado especialmente, ya que esta condición se asegura con la estructura del argumento de la función delta.

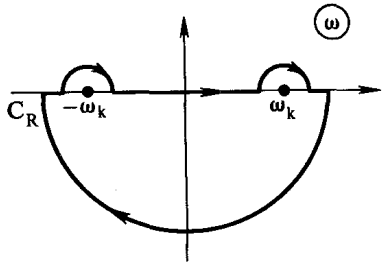

Fig. 32.1

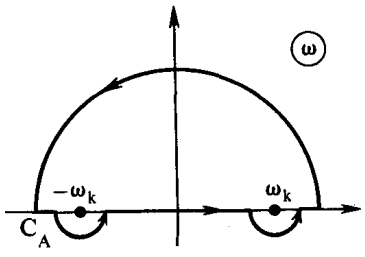

Fig. 32.2

Ahora, aclaremos como influye sobre la forma de la función de Green otra elección del contorno de integración. Examinemos el contorno C_A (fig. 32.2) que recorre los puntos singulares en el semiplano inferior de ω compleja. En este caso, el resultado de la integración por $d\omega$, distinto de cero, será obtenido si $\tau < 0$, lo que corresponde al cierre del contorno en el

semiplano superior. La función de Green que sigue del resultado recibe el nombre *de avanzada* (o *de avance*) y tiene el aspecto

$$G^A(r - r', t - t') = \frac{1}{|r - r'|}\,\delta\left(t - t' + \frac{|r - r'|}{c}\right). \qquad (32.18)$$

Como G^R y G^A satisfacen una misma ecuación no homogénea (32.2), su diferencia $G^R - G^A$ satisfará la ecuación homogénea de d'Alembert:

$$\Box(G^R - G^A) = 0. \qquad (32.19)$$

Esto muestra que G^A puede obtenerse de G^R mediante la elección especial de la función $F_0(k, \omega)$ en (32.11), es decir, resolviendo una ecuación homogénea.

Variando las reglas de recorrido de los puntos singulares podemos obtener varios tipos más de funciones de Green, que hallan aplicación en la teoría cuántica del campo. Pero en electrodinámica clásica desempeña el papel fundamental la función retardada de Green y, en ocasiones, la avanzada, al examen de las cuales vamos a limitarnos.

A veces, en las aplicaciones se utilizan las imágenes de Fourier G^R_ω y G^A_ω por el tiempo $\tau = t - t'$:

$$G^{R,A}_\omega(r - r') = \int_{-\infty}^{\infty} G^{R,A}(r - r', \tau)e^{i\omega\tau}d\tau = \frac{1}{|r - r'|}\exp(\pm ik|r - r'|), \qquad (32.20)$$

donde $k = \omega/c$. El signo más corresponde a G^R_ω, el menos a G^A_ω. Las funciones de Green (32.20) satisfacen a la ecuación no homogénea de Helmholtz

$$\Delta G^{R,A}_\omega + k^2 G^{R,A}_\omega = -4\pi\delta(r - r'), \qquad (32.21)$$

obtenida de (32.2).

32.2. Elección de los potenciales retardados. Con ayuda de la función retardada de Green G^R confeccionemos las soluciones no homogéneas de onda (32.1). En la integral (32.3) la integración por el tiempo se efectúa con facilidad mediante la función delta y el resultado tiene el aspecto

$$A^R(r, t) = \frac{1}{c}\int \frac{j(r', t - |r - r'|/c)}{|r - r'|}\,dV', \qquad (32.22)$$

$$\varphi^R(r, t) = \int \frac{\rho(r', t - |r - r'|/c)}{|r - r'|}\,dV'. \qquad (32.23)$$

Los potenciales (32.22) y (32.23) son retardados. La estructura de su argumento temporal nos muestra que, en el punto r y el momento de tiempo t, el campo se determina por el estado de las fuentes en el momento precedente de tiempo $t' = t - |r - r'|/c$ que se diferencia en el tiempo de propagación de la perturbación electromagnética desde la fuente hasta el punto

de observación. En este caso, el retardo interviene como forma de manifestación del principio de causalidad: la causa (movimiento de las cargas en el punto r') precede al efecto (surgimiento del campo en el punto r) en el tiempo $|r - r'|/c$ necesario para transmitir la señal (perturbación electromagnética) de r' a r.

Si en el espacio no hay otras fuentes del campo A^R y φ^R describirán el campo total creado por las distribuciones prefijadas de j y ρ. Si lejos de las fuentes prefijadas (en el infinito) hay otras fuentes, a los potenciales A^R y φ^R es preciso añadir la solución de la ecuación homogénea de onda que describe el campo de las fuentes alejadas. Pero dicha solución no dependerá de ninguna manera de j y ρ prefijadas.

Al elegir la función avanzada de Green G^A para construir las soluciones, es posible hallar los potenciales avanzados:

$$A^A(r, t) = \frac{1}{c} \int \frac{j(r', t + |r - r'|/c)}{|r - r'|} dV', \tag{32.24}$$

$$\varphi^A(r, t) = \int \frac{\rho(r', t + |r - r'|/c)}{|r - r'|} dV'. \tag{32.25}$$

Aunque estos potenciales, lo mismo que (32.22), (32.23), satisfacen las ecuaciones (32.1) ellos no pueden ser utilizados para describir el campo de las fuentes prefijadas en el espacio infinito, ya que no satisfacen el principio de causalidad.

A las soluciones en forma de los potenciales retardados y avanzados puede dárseles otra interpretación. Si el sistema de cargas es capaz de irradiar ondas electromagnéticas, los potenciales retardados (32.22), (32.23) a grandes distancias del sistema tendrán el aspecto de ondas esféricas divergentes, lo que corresponde al transporte de las perturbaciones electromagnéticas del sistema emisor al espacio circundante. En lo que atañe a los potenciales avanzados, éstos describirán ondas esféricas convergentes que podrían crearse por cierta fuente situada en el infinito, pero no prefijada por un sistema de cargas.

32.3. Descomposición espectral de los potenciales retardados. Si la variación de los potenciales retardados con el tiempo en cada punto del espacio es un proceso aperiódico, ellos pueden ser desarrollados en la integral de Fourier (29.9a). La amplitud de Fourier

$$A^R_\omega(r) = \int_{-\infty}^{\pm\infty} A(r, t) \exp(i\omega t) dt \tag{32.26}$$

se convierte con ayuda de (32.22) en la forma

$$A^R_\omega(r) = \frac{1}{c} \int \frac{j(r', t - |r - r'|/c)}{|r - r'|} \exp(i\omega t) dV' dt. \tag{32.27}$$

Si integramos (32.27) primero por $\tau = t - |r - r'|/c$, (32.27) se lleva a la forma

$$A_\omega^R(r) = \frac{1}{c} \int \frac{\exp(i\omega|r - r'|/c)}{|r - r'|} dV' \int_{-\infty}^{+\infty} j(r', \tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \qquad (32.28)$$

o bien

$$A_\omega^R(r) = \frac{1}{c} \int \frac{\exp(i\omega|r - r'|/c)}{|r - r'|} j_\omega(r') dV'. \qquad (32.29)$$

De manera análoga se expresa $\varphi_\omega^R(r)$:

$$\varphi_\omega^R(r) = \int \frac{\exp(i\omega|r - r'|/c)}{|r - r'|} \rho_\omega(r') dV'. \qquad (32.30)$$

En los dos casos en el integrando entra la imagen de Fourier (32.20) de la función retardada de Green.

§ 33. Principio de Huygens y fórmula de Kirchhoff

Los potenciales retardados (32.22), (32.23) proporcionan la solución total del problema del campo electromagnético creado por un sistema acotado de cargas en movimiento en el espacio infinito. Con esto, también se supone que el movimiento de las cargas transcurre según una ley prefijada.

Pero el planteamiento del problema puede ser otro: las cargas y las corrientes es posible que sólo estén prefijadas en el volumen acotado V del espacio. En lo que se refiere a las fuentes situadas tras los límites de V pueden prefijarse no con la distribución de las cargas y las corrientes en ellos, sino por medio del campo electromagnético proporcionado en la superficie S que acota el volumen V. En este caso, para calcular el campo dentro de V hay que tomar en consideración las fuentes del campo ubicadas dentro de V y las perturbaciones que partirán de la superficie S.

Cuando no hay cargas en el interior del volumen V todo el campo en él será creado por las fuentes exteriores. No obstante, el examen explícito de las fuentes se puede sustituir por el estudio del campo que ellas crean en la superficie S. Como más adelante veremos, cada elemento de la superficie S puede examinarse como fuente de perturbaciones secundarias que se propagan en todas direcciones. Superponiéndose dichas perturbaciones son las que crean el campo resultante en el volumen V.

Fue C. Huygens el que en el siglo XVII desarrolló razonamientos cualitativos de semejante especie y llevan el nombre de *principio de Huygens*. Más adelante fueron precisadas y formuladas en forma cuantitativa por otros investigadores, en particular por O. Fresnel y G. Kirchhoff. Más abajo deduciremos la fórmula de Kirchhoff que ofrece la solución de los problemas planteados con anterioridad.

33.1. Deducción de la fórmula de Kirchhoff. Partimos de la identidad de Green (20.1):

$$\int_{(V)} (\varphi \Delta' \psi - \psi \Delta' \varphi) dV' = \oint_{(S)} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right) dS'. \tag{33.1}$$

Por $\varphi(r', t')$ vamos a entender el potencial escalar que satisface la segunda de las ecuaciones (32.1) y por ψ, la función retardada de Green (32.17):

$$\psi = G^R(r - r', t - t'). \tag{33.2}$$

Aquí r es el radio vector de cierto punto que yace dentro de V; por las coordenadas $r'(x', y', z')$ se realiza la integración; n' es la normal exterior a la superficie.

Integremos (33.1) por el tiempo dt' en los límites desde $-\infty$ hasta cierto valor $T > t$ y pongamos las magnitudes

$$\Delta' \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2} - 4\pi \rho(r', t')$$

y

$$\Delta' \psi \equiv \Delta' G^R = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G^R}{\partial t'^2} - 4\pi \delta(r - r') \delta(t - t')$$

obtenidas de las ecuaciones (32.1) y (32.2). El primer miembro de (33.1) toma la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{T} dt' \int_{(V)} dV' (\varphi \Delta' \psi - \psi \Delta' \varphi) =$$

$$= 4\pi \int_{-\infty}^{T} dt' \int_{(V)} dV' \{ G^R(r - r', t - t') \rho(r', t') -$$

$$- \delta(r - r') \delta(t - t') \varphi(r', t') \} + \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{T} dt' \int_{(V)} dV' \left\{ \varphi \frac{\partial^2 G^R}{\partial t'^2} - G^R \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2} \right\}. \tag{33.3}$$

Con ayuda de la forma explícita de la función de Green y las reglas de integración de expresiones con funciones delta, calculamos las dos primeras integrales en el segundo miembro de (33.3):

$$\int_{-\infty}^{T} dt' \int_{(V)} dV' G^R(r - r', t - t') \rho(r', t') = \int_{(V)} \frac{\rho(r', t - R/c)}{R} dV',$$

$$\int_{-\infty}^{T} dt' \int_{(V)} dV' \delta(r - r') \delta(t - t') \varphi(r', t') = \varphi(r, t),$$

donde $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$. En la integral restante primero realizamos la integración por el tiempo:

$$\int_{-\infty}^{T} dt' \left(\varphi \frac{\partial^2 G^R}{\partial t'^2} - G^R \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2}\right) = \left(\varphi \frac{\partial G^R}{\partial t'} - G^R \frac{\partial \varphi}{\partial t'}\right)_{t'=-\infty}^{t'=T} = 0.$$

En los límites superior e inferior se obtienen ceros debido a la presencia de la función delta en G^R (su argumento para $t' = T > t$ y para $t' = -\infty$ es distinto de cero). En total, el primer miembro de (33.1) nos proporciona después de la integración por dt'

$$\int_{-\infty}^{T} dt' \int_{(V)} dV' (\varphi \Delta' \psi - \psi \Delta' \varphi) = 4\pi \int_{(V)} \frac{\rho(r', t - R/c)}{R} dV' - 4\pi\varphi(r, t). \tag{33.4}$$

Comenzaremos la transformación del segundo miembro por el cálculo de la derivada de la función de Green:

$$\frac{\partial G^R}{\partial n'} \equiv \boldsymbol{n}' \cdot \nabla' G^R = \frac{\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{R}}{R^3} \delta(t - t' - R/c) - \frac{\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{R}}{cR^2} \frac{\partial \delta(t - t' - R/c)}{\partial t'}, \tag{33.5}$$

donde hemos tenido en cuenta el hecho de que $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ y $\nabla' R = -\boldsymbol{R}/R$. Con ayuda de (33.5) calculamos el segundo miembro (33.1):

$$\int_{-\infty}^{T} dt' \oint_{(S)} dS' \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n'}\right) =$$

$$= \oint_{(S)} dS' \left(\frac{\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{R}}{R^3} + \frac{\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{R}}{cR^2} \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{1}{R} \boldsymbol{n}' \cdot \nabla'\right) \varphi(r', t') \Big|_{t'=t-R/c}. \tag{33.6}$$

El sumando con la derivada de la función delta ha sido integrado por partes.

Igualando (33.4) y (33.6) obtendremos la expresión para el potencial escalar en un punto arbitrario dentro del volumen V:

$$\varphi(r, t) = \int_{(V)} \frac{\rho(r', t - R/c)}{R} dV' +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \oint_{(S)} dS' \left(\frac{1}{R} \boldsymbol{n}' \cdot \nabla' - \frac{\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{R}}{cR^2} \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{R}}{R^3}\right) \varphi(r', t') \Big|_{t'=t-R/c}. \tag{33.7}$$

La sustitución de t' por $t - R/c$ debe realizarse después de aplicar a $\varphi(r', t')$ el operador entre paréntesis. La fórmula obtenida resuelve plenamente el problema de representación del potencial escalar dentro del volumen V,

mediante la distribución de las fuentes en él, así como de los valores de φ, $\nabla\varphi$ y $\partial\varphi/\partial t$ en el límite del volumen.

Al no haber cargas dentro del volumen V, el campo sólo se determina con la integral de superficie:

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_{(S)} dS' \left(\frac{1}{R} n' \cdot \nabla' - \frac{n' \cdot R}{cR^2} \frac{\partial}{\partial t'} \frac{n' \cdot R}{R_3} \right) \varphi(r', t) \Big|_{t'=t-R/c}. \tag{33.8}$$

Esta fórmula lleva el nombre de *integral de Kirchhoff* y da la enunciación cuantitativa del principio de Huygens: enlaza el campo en un punto arbitrario con su valor de cierta superficie acotada. Así, pues, las perturbaciones electromagnéticas en la superficie desempeñan el papel de fuentes que generan perturbaciones secundarias que son, precisamente, las que crean el campo en el punto r. Hay que señalar que las fórmulas (33.7) y (33.8) no pueden ser consideradas como la solución de la ecuación de onda, ya que los valores de φ, $\nabla\varphi$ y $\partial\varphi/\partial t$ en la superficie no son conocidos de antemano y no pueden prefijarse al azar. Pero las fórmulas halladas son muy útiles en los problemas de difracción de las ondas electromagnéticas, cuando los valores del campo en cierta superficie pueden prefijarse de manera aproximada.

Con dependencia armónica del tiempo $\varphi(r, t) = \varphi(r)e^{-i\omega t}$ (33.8) toma la forma

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi} \oint_{(S)} \left\{ \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial\varphi(r')}{\partial n'} - \varphi(r') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{e^{ikR}}{R} \right\} dS', \tag{33.9}$$

donde $k = \omega/c$.

Al no haber cargas cada uno de los componentes cartesianos A, E y H satisface esa misma ecuación de onda que φ. Por ello, (33.8) es válida para cualquier componente de los indicados vectores. Haciendo uso de esta circunstancia es fácil escribir la integral de Kirchhoff en forma vectorial. Sin dar los cálculos*) vamos a escribir el resultado definitivo:

$$E(r) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{(S)} \{ik[n' \times H]G_\omega^R + [n' \times E] \times \nabla' G_\omega^R + (n' \cdot E)\nabla' G_\omega^R\} dS', \tag{33.10}$$

$$H(r) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{(S)} \{-ik[n' \times E]G_\omega^R + [n' \times H] \times \nabla' G_\omega^R + (n' \cdot H)\nabla' G_\omega^R\} dS', \tag{33.11}$$

*) Pueden ser hallados en el libro de J. Jeksson [44].

Suponemos que el campo es monocromático, n', la normal exterior a la superficie S, la función de Green G_ω^R se determina por medio de la fórmula (32.20).

33.2. Óptica geométrica. Difracción de Fresnel. Las fórmulas escalar y vectorial de Kirchhoff (33.9) — (33.11) son en particular útiles para el análisis de la propagación de las ondas electromagnéticas cortas (para mayor brevedad en adelante vamos a hablar de la luz). El caso cuando la longitud de la onda de luz es pequeña en comparación con las dimensiones de los cuerpos y las distancias desde éstos hasta la fuente y el punto de observación, recibe el nombre de *aproximación de la óptica geométrica.*

Estudiemos desde el punto de vista de la aproximación de la óptica geométrica la difracción de la luz de la fuente puntual S (fig. 33.1) en el extremo de una pantalla opaca. Vamos a suponer que la longitud de la onda de luz λ es pequeña en comparación con las distancias desde la fuente S y el punto de observación P hasta el extremo de la pantalla. Consideremos que dichas distancias son finitas. Debido a esta última circunstancia hay que tener en cuenta la curvatura del frente de la onda tanto incidente, como difractada. Los fenómenos observados en tales condiciones reciben la denominación de *difracción de Fresnel.* Por lo contrario, si los puntos S y P yacen a grandes distancias de la pantalla, los frentes de onda de las ondas incidente y difractada pueden considerarse planos. Tal caso se llama *difracción de Fraunhofer.*

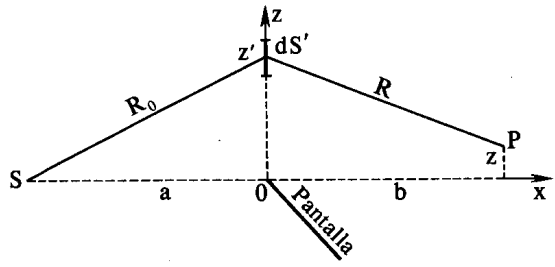

Fig. 33.1

Hagamos uso de la variante escalar de la fórmula de Kirchhoff (33.9), entendiendo por $\varphi(r)$ uno de los componentes cartesianos del campo eléctrico que designaremos con u. Como superficie de integración tomemos el semiplano yz ($z > 0$). Aceptemos también la aproximación corriente en la teoría de difracción, según la cual en el plano indicado el campo de onda coincide con el campo no perturbado de la fuente. Para la distribución esférico-simétrica de la radiación de la fuente S en el plano yz (comp. (27.17)) tendremos

$$u(y', z') = \frac{A}{R_0} \exp(ikR_0), \tag{33.12}$$

donde $A = \text{const}$, R_0 es la distancia desde la fuente hasta dS' (véase la fig. 33.1).

Teniendo en cuenta que kR, $kR_0 \gg 1$ y, por esa causa, diferenciando en (33.9) sólo exponentes, obtenemos

$$u_P(z) = \frac{ik}{4\pi} \int_{(S)} \frac{u(r')}{R} \exp(ikR) \left(\frac{R_0}{R_0} + \frac{R}{R}\right) \cdot n' dS', \tag{33.13}$$

o bien tomando en consideración (33.12)

$$u_P(z) = \frac{ikA}{4\pi} \int_{(S)} \frac{\exp[ik(R_0 + R)]}{R_0 R} \left(\frac{R_0}{R_0} + \frac{R}{R}\right) \cdot n' dS'. \tag{33.13a}$$

Más abajo veremos que para longitudes pequeñas de onda (en comparación con otras distancias en el problema) la luz se propaga fundamentalmente de forma lineal sólo sufriendo desviaciones relativamente pequeñas de la rectilinealidad que conducen al contorneo de los obstáculos (difracción). En virtud de esto en la integral (33.13) es sólo de importancia una pequeña parte de la superficie de integración situada junto a la recta que une la fuente con el punto de observación. En nuestro caso, ésta será parte del plano yz en el entorno del origen de coordenadas. En esta región podemos sustituir $(R_0/R_0 + R/R)n' \approx -2$, en los factores preexponenciales hacer $R_0 \approx a$, $R \approx b$ en el exponente

$$R_0 + R \approx a + b + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) y'^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{z'^2}{a} + \frac{(z - z')^2}{b}\right]. \tag{33.14}$$

En la aproximación a examinar de las variables de integración sólo dependerá el exponente. Al integrar por dy' haremos uso de las integrales de tabla

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} t^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos t^2 dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{33.15}$$

Tendremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) y'^2\right] dy' = \sqrt{\frac{2ab}{k(a + b)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2} dt =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi ab}{k(a + b)}} (1 + i). \tag{33.16}$$

De (33.16) sigue que la principal aportación introduce en la integral el segmento de longitud $[2\lambda ab/(a + b)]^{1/2} \approx \sqrt{\lambda L}$, donde L es la menor de las distancias a, b. A causa de la pequeñez de la razón λ/L la región importante para la integración tiene dimensiones lineales $(\lambda/L)^{1/2} L \ll L$. El segmento importante para la integración por dz' tiene un mismo orden de magnitud.

De los sumandos dependientes de z' destaquemos el cuadrado total:

$$\frac{z'^2}{2a} + \frac{(z - z')^2}{2b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(z' - \frac{az}{a + b}\right)^2 + \frac{z^2}{2(a + b)}. \quad (33.17)$$

Realizando la sustitución de la variable $t = \sqrt{\frac{k(a + b)}{2ab}}\, z'$, tendremos

$$\int_0^\infty \exp\left\{\frac{ik}{2}\left[\frac{z'^2}{a} + \frac{(z - z')^2}{b}\right]\right\} dz' = \sqrt{\frac{2ab}{k(a+b)}} \exp\left[\frac{ikz^2}{2(a+b)}\right] \int_{-s}^\infty e^{it^2} dt, \quad (33.18)$$

donde

$$s = z\sqrt{\frac{ka}{2b(a + b)}}. \quad (33.19)$$

La integral por dt se expresa por las integrales de Fresnel:

$$C(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^s \cos t^2 dt,\ S(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^S \operatorname{sen} t^2\, dt. \quad (33.20)$$

Con ayuda de (33.15), (33.20), obtenemos

$$\int_{-s}^\infty e^{it^2} dt = \int_0^\infty e^{it^2} dt + \int_0^s e^{it^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\left(C(s) + \frac{1}{2}\right) + i\left(S(s) + \frac{1}{2}\right)\right]. \quad (33.21)$$

Uniendo en un todo (33.12) — (33.21) escribimos el campo en el punto de observación P:

$$u_P(z) = \frac{A(1 - i)}{2(a + b)} \exp\left[ik\left(a + b + \frac{z^2}{2(a + b)}\right)\right]\left\{C(s) + \frac{1}{2} + i\left(S(s) + \frac{1}{2}\right)\right\}. \quad (33.22)$$

Siendo libre la propagación a una distancia $a + b$ de la fuente, el campo de onda tendría el valor

$$u_0 = \frac{A}{a + b} \exp\left[ik(a + b)\right]. \quad (33.23)$$

Introduciendo las intensidades $I(z) = |u_p(z)|^2$, $I_0 = |u_0|^2$, obtenemos

$$I(z) = 1/2 I_0[(C(s) + 1/2)^2 + (S(s) + 1/2)^2]. \quad (33.24)$$

La distribución de la intensidad en la región de sombra ($z < 0$) y en la iluminada ($z > 0$) se determina por el valor del parámetro (33.19). En el límite de la sombra geométrica, a lo que corresponde $s = 0$, tenemos $C(0) = S(0) = 0$ e $I(0) = I_0/4$. Lejos de este límite, $|s| \gg 1$, es fácil hallar las expresiones aproximadas para intensidad.

Región de sombra, $s < 0$, $|s| \gg 1$. Integramos sucesivamente por partes:

$$\int_{|s|}^{\infty} e^{it^2} dt = \int_{|s|}^{\infty} \frac{e^{it^2} dt^2}{2t} = -\frac{1}{2i|s|} e^{is^2} + \int_{|s|}^{\infty} \frac{e^{it^2} dt^2}{4it^3} =$$

$$= -\frac{1}{2i|s|} e^{is^2} + \frac{1}{4|s|^3} e^{is^2} - \ldots$$

En la serie asintótica obtenida es suficiente tener en cuenta sólo el primer término, lo que da la posibilidad de obtener en la región de la sombra geométrica:

$$I(z) = I_0/4\pi s^2. \tag{33.25}$$

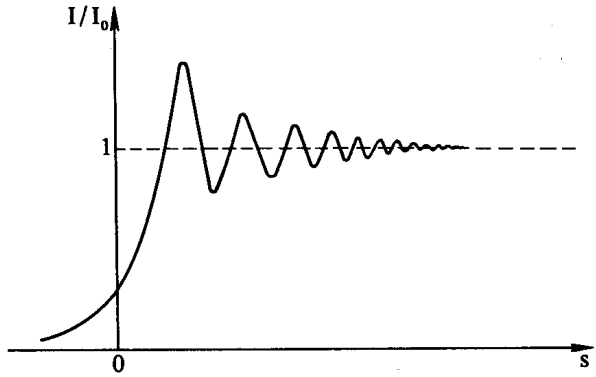

Fig. 33.2

Región iluminada, $s \gg 1$. Con una precisión salvo la primera potencia del parámetro pequeño s^{-1}, tenemos

$$\int_{-s}^{\infty} e^{it^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 + i) + \frac{1}{2is} e^{is^2};$$

lo que, con la misma precisión, nos permite obtener

$$\left| \int_{-s}^{\infty} e^{it^2} dt \right|^2 = \pi \left[1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\operatorname{sen}(s^2 - \pi/4)}{s} \right]$$

y hallar la intensidad del campo de luz en la región iluminada:

$$I(z) = I_0 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\operatorname{sen}(s^2 - \pi/4)}{s} \right]. \tag{33.26}$$

Al alejarse del límite de la sombra geométrica la intensidad oscila un número infinito de veces, aproximándose al valor constante I_0 (fig. 33.2).

33.3. Difracción de Fraunhofer. Ahora vamos a examinar la difracción en un orificio en una pantalla opaca plana a las condiciones cuando la fuente puntual de luz está alejada de la pantalla a una distancia mayor que el tamaño del orificio. También observemos la difracción a distancias que superan en alto grado la dimensión característica l del orificio. La longitud de onda de luz deberá ser considerada pequeña en comparación con todas las distancias, incluida l. Con ellos, la onda que incide sobre el orificio podemos representarla plana, es decir, los rayos de luz que inciden sobre diferentes puntos del plano del orificio son paralelos. Pero, debido a la difracción tras el orificio los rayos se separan de modo flabeliforme, el frente de onda se curva. Pero siendo pequeña la razón λ/l los ángulos de difracción serán pequeños. Calculemos la intensidad de la difracción en el ángulo sólido prefijado $d\Omega$.

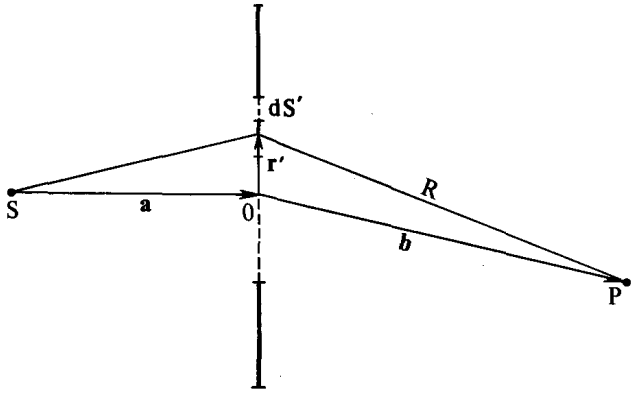

Fig. 33.3

Empleemos la fórmula general (33.13a). Como durante la difracción de Fresnel suponemos que en el orificio el campo es igual al campo no perturbado de la fuente. Elijamos el origen de registro de las coordenadas en cierto punto O en el plano del orificio (fig. 33.3). Debido a la pequeñez de la dimensión l del orificio en comparación con a y b podemos poner en el grado del exponente

$$R_0 \approx a + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}'/a, \qquad R \approx b + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}'/b, \tag{33.27}$$

mientras que en el factor preexponencial $R_0 \approx a$, $R \approx b$.

El vector $\boldsymbol{a}$ muestra la dirección de propagación de la onda incidente, $\boldsymbol{b}$, de la difractada. Como durante la difracción la frecuencia de la onda no varía, $k\boldsymbol{a}/a = \boldsymbol{k}_0$, $k\boldsymbol{b}/b = \boldsymbol{k}$ son los vectores de las ondas incidente y difractada. Con ayuda de (33.13a) y (33.27) obtenemos para la onda difractada:

$$u_P = -\frac{ikA}{2\pi}\frac{e^{ik(a+b)}}{ab}\int\limits_{(S)} e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}'}dS', \tag{33.28}$$

donde $q = k - k_0$ es la variación del vector de onda durante la difracción. La integración se efectúa por el área del orificio.

La intensidad de la luz que incide, a causa de la difracción sobre el ángulo sólido $d\Omega$ es obtenida multiplicando $|u_P|^2$ por el área de la superficie elemental $b^2 d\Omega$ sobre la que se apoya el ángulo sólido:

$$dI = |u_P|^2 b^2 d\Omega = \frac{k^2 A^2}{(2\pi)^2 a^2} \left| \int_{(S)} e^{-iq \cdot r'} dS' \right|^2 d\Omega. \qquad (33.29)$$

Es cómodo introducir la sección eficaz diferencial de la difracción

$$d\sigma = dI/I_0,$$

donde $I_0 = |u_0|^2 = A^2/a^2$ es la intensidad de la luz que incide sobre el orificio. La magnitud dI es proporcional al flujo de la energía electromagnética de la onda difractada en el interior del ángulo sólido $d\Omega$, en tanto que I_0

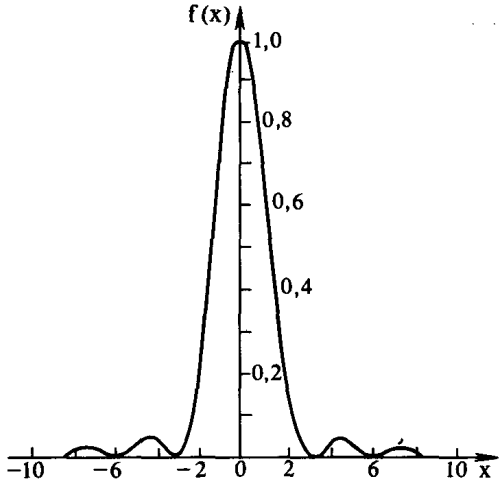

Fig. 33.4

es la densidad del flujo de energía de la onda incidente. Por ello, la sección diferencial $d\sigma$ tiene la dimensión del área:

$$d\sigma = \frac{k^2}{(2\pi)^2} \left| \int_{(S)} e^{-iq \cdot r'} dS' \right|^2 d\Omega. \qquad (33.30)$$

La fórmula (33.30) resuelve el problema de la difracción de un haz de luz plano paralelo en un orifico de forma arbitraria.

Apliquemos (33.30) para la difracción de la luz en un orificio rectangular de área $2l_1 \times 2l_2$ siendo normal la incidencia. Calculemos la integral por el área del orificio:

$$\int_{(S)} e^{-iq \cdot r'} dS' = \int_{-l_1}^{l_1} e^{-iq_x x'} dx' \int_{-l_2}^{l_2} e^{-iq_y y'} dy' = \frac{4 \operatorname{sen}(q_x l_1) \operatorname{sen}(q_y l_2)}{q_x q_y}.$$

Designando los ángulos de desviación de la luz en las direcciones de los ejes x e y por θ_x y θ_y, respectivamente, tendremos $q_x = k\theta_x$, $q_y = k\theta_y$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{4l_1l_2}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} kl_1\theta_x}{kl_1\theta_x}\right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} kl_2\theta_y}{kl_2\theta_y}\right)^2. \tag{33.31}$$

La distribución angular de la luz difractada por cada una de las direcciones perpendiculares entre sí se prefija con la función

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x/x^2,$$

donde $x = kl\theta$. La función es la máxima para $x = 0, f(0) = 1$ y decrece con rapidez al aumentar x sufriendo oscilaciones (fig. 33.4). Desviaciones notorias de la luz sólo transcurren en los márgenes del máximo fundamental en los ángulos

$$\theta \lesssim 2\pi/kl = \lambda/l.$$

Esta condición determina, precisamente, los ángulos característicos de difracción.

§ 34. Campo electromagnético de una carga puntual en movimiento arbitrario

34.1. Potenciales de Lienar y Wiechert. Apliquemos los potenciales retardados hallados en el § 32 para calcular el campo de una partícula cargada de pequeñas dimensiones (carga puntual) en movimiento prefijado. Sea $s(t)$ el radio vector de la partícula, $\mathbf{v}(t) = \dot{s}(t)$, su velocidad, e, su carga. La densidad de la carga ρ y de la corriente j se expresan mediante la función delta de Dirak:

$$\rho(r, t) = e\delta(r - s(t)), \qquad j = e\mathbf{v}(t)\delta(r - s(t)). \tag{34.1}$$

Para calcular los potenciales es cómodo hacer uso de la fórmula general (32.3) con la función retardada de Green (32.17):

$$A(r, t) = \frac{e}{c}\int G_\omega^R(r - r', t - t')\mathbf{v}(t')\delta(r' - s(t))dV'dt' =$$

$$= \frac{e}{c}\int (\mathbf{v}(t')/R(t'))\delta(t' + R(t')/c - t)dt', \tag{34.2}$$

donde $R(t') = r - s(t')$. La integración por el volumen se ha realizado con ayuda de $\delta(r' - s(t))$. La integración posterior por el tiempo se realiza empleando la fórmula (Comp. IV. 10) donde para el caso dado, $g(t') = t' + R(t')/c - t$:

$$dg(t')/dt' = g' = 1 - n\cdot\mathbf{v}/c, \qquad n = R(t')/R(t'). \tag{34.3}$$

De (34.2), (Comp. IV. 10), y (34.3) obtenemos

$$A(r, t) = \frac{ev}{cR(1 - n \cdot v/c)}\Bigg|_{t'} \tag{34.4}$$

De este mismo modo hallamos el potencial escalar:

$$\varphi(r, t) = \frac{e}{R(1 - n \cdot v/c)}\Bigg|_{t'} \tag{34.5}$$

El valor de t', para el que se toman los segundos miembros de (34.4) y (34.5), es determinado de la condición $g(t') = 0$, es decir,

$$c(t - t') = |r - s(t')|, \tag{34.6}$$

donde $s(t')$ son las coordenadas de la partícula, r, las coordenadas del punto de observación. La diferencia $t - t' = |r - s(t')|/c$ es el tiempo de propagación de la perturbación electromagnética desde la partícula hasta el punto de observación del campo.

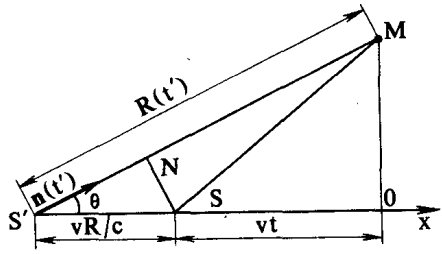

Fig. 34.1

De los potenciales de Lienar — Wiechert obtengamos los potenciales de una partícula cargada en movimiento uniforme. Para ello, el denominador $(R - R \cdot v/c)_{t'}$ debe ser expresado con las coordenadas de la partícula en el momento t. Supongamos que S' es la posición de la carga en el momento de generación de la perturbación electromagnética, S, su posición en el momento de su observación en el punto M (fig. 34.1). La distancia $S'S$ es igual al producto de la velocidad de la carga por el tiempo de retardo, $S'S = vR/c$. El segmento $S'N = vR(t')/c$ y su longitud, $MN = R(t') - vR(t')/c$ es igual al denominador de las expresiones (34.4), (34.5). De los triángulos MNS y SNS', hallamos

$$(MN)^2 = r^2 - (NS)^2 = r^2 - v^2 \frac{R^2}{c^2} \operatorname{sen}^2 \theta,$$

donde $r(t)$ es la distancia desde la carga hasta el punto de observación en el momento t. A continuación, $R \operatorname{sen} \theta = \rho$ es la distancia desde el punto de observación hasta la línea de vuelo de la carga. De tal manera,

$$(R - v \cdot R/c)_{t'} = \sqrt{r^2 - v^2\rho^2/c^2} = \sqrt{(vt)^2 + \rho^2/\gamma^2}.$$

Los potenciales A y φ de una carga en movimiento uniforme son determinados por medio de las fórmulas (34.4), (34.5) después de sustituir en ellas la expresión hallada. El comienzo de registro del tiempo se ha elegido de manera que para $t = 0$ la partícula se halla a la más corta distancia (igual a ρ) del punto de observación de campo.

34.2. Intensidad del campo. Calculamos $H = \nabla \times A$ empleando la representación (34.2). El operador ∇ actúa sobre las coordenadas r que sólo entran en $R = |r - s|$ bajo la integral por dt'. Producimos la diferenciación haciendo uso de la fórmula

$$\nabla f(R) = \frac{\partial f}{\partial R} \nabla R = \frac{\partial f}{\partial R} n. \tag{34.7}$$

Obtenemos

$$H(r, t) = \frac{e}{c} \int (\mathbf{v} \times n) \left\{ \frac{1}{R^2} \delta(t' + R/c - t) - \frac{1}{cR} \delta'(t' + R/c - t) \right\} dt'.$$

Más adelante, pasamos a la integración $dg = \frac{dg}{dt'} dt' = \left(1 - \frac{n \cdot \mathbf{v}}{c}\right) dt'$ y, empleando las reglas de integración de expresiones con funciones delta (Comp. IV. 10) y (Comp. IV. 12), hallamos

$$H(r, t) = \frac{c(\mathbf{v} \times n)}{cR^2(1 - n \cdot \mathbf{v}/c)} + \frac{e}{c(1 - n \cdot \mathbf{v}/c)} \frac{d}{dt'} \frac{\mathbf{v} \times n}{cR(1 - n \cdot \mathbf{v}/c)}, \tag{34.8}$$

donde el segundo miembro se toma para el valor de t' determinado mediante la ecuación (34.6). Al calcular la derivada por t', hallamos

$$\frac{d\mathbf{v}(t')}{dt'} = \dot{\mathbf{v}}(t'), \frac{dR(t')}{dt'} = -n \cdot \mathbf{v}, \tag{34.9}$$

$$\frac{dn(t')}{dt'} = -\frac{\mathbf{v}}{R} + \frac{n(n \cdot \mathbf{v})}{R} = \frac{n \times (n \times \mathbf{v})}{R}.$$

Después de derivar en (34.8) con ayuda de estas fórmulas y habiendo reducido términos semejantes, obtenemos

$$H = \frac{e(1 - v^2/c^2)(\dot{\mathbf{v}} \times n)}{cR^2(1 - n \cdot \mathbf{v}/c)^3} + \frac{e\{c\dot{\mathbf{v}} \times n + n \times [(\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}) \times n]\}}{c^2R(1 - n \cdot \mathbf{v}/c)^3}. \tag{34.10}$$

El cálculo del campo eléctrico $E = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$ se realiza de manera análoga: representemos el potencial escalar de la forma siguiente

$$\varphi(r, t) = \int \frac{e}{R(t')} \delta(t' + R(t')/c - t) dt' \tag{34.11}$$

y diferenciamos las magnitudes (34.2) y (34.11) bajo el signo de integración. Esto proporciona

$$E = e\int\left\{\frac{n}{R^2}\,\delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) + \frac{n - v/c}{cR}\,\delta'\left(t' + \frac{R}{c} - t\right)\right\}dt' =$$

$$= \frac{en}{R^2(1 - n\cdot v/c)} + \frac{e}{c(1 - n\cdot v/c)}\frac{d}{dt'}\frac{n - v/c}{R(1 - n\cdot v/c)}. \qquad (34.12)$$

La posterior diferenciación por t', mediante las fórmulas (34.9), permite obtener

$$E = \frac{e(1 - v^2/c^2)(n - v/c)}{R^2(1 - n\cdot v/c)^3} + \frac{en \times [(n - v/c) \times \dot{v}]}{c^2R(1 - n\cdot v/c)^3}. \qquad (34.13)$$

En las fórmulas para las intensidades del campo (34.10), (34.13) todas las magnitudes en los segundos miembros se toman en el momento de tiempo de retardo t', determinado con la ecuación (34.6). Indiquemos ciertos rasgos característicos de las intensidades del campo. La comparación de (34.13) con (34.10) muestra que ellas están ligadas entre sí mediante la relación

$$H(r, t) = n(t') \times E(r, t), \qquad (34.14)$$

es decir, el vector H es perpendicular a E y a la línea que une la carga con el punto de observación en el momento de tiempo de retardo (el vector E tiene su proyección en dicha línea). Cada una de las intensidades consta de dos sumandos: el primero varía en el espacio como R^{-2} y no contiene la aceleración de la carga, el segundo, es proporcional a la aceleración $\dot{v}$ y decrece como R^{-1}. Los sumandos del primer tipo forman un campo cuasiestacionario, ya que él también es propio de una carga en movimiento uniforme, en tanto que la ley de decrecimiento con la distancia es la misma que para el campo estático. Los sumandos del segundo tipo describen el campo de ondas de radiación, ya que él disminuye con la distancia y crea un flujo finito de energía electromagnética a través de la superficie cerrada de radio cuan se quiere grande que rodea la partícula. El campo de radiación sólo surge durante el movimiento acelerado de la carga ($\dot{v} \neq 0$).

34.3. Descomposición espectral de los potenciales de Lienar — Wiechert. En caso del movimiento aperiódico de la partícula hacemos uso de la representación (32.28), haciendo en ella

$$j(r', \tau) = ev(\tau)\delta(r' - s(\tau)).$$

Integrando primero por dV', hallamos

$$A_\omega(r) = \frac{e}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(\tau)\exp(i\omega\tau + i\omega R(\tau)/c)}{R(\tau)}\,d\tau. \qquad (34.15)$$

La imagen de Fourier del potencial escalar se escribe de la siguiente manera

$$\varphi_\omega(\boldsymbol{r}) = e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega\tau + i\omega R(\tau)/c)}{R(\tau)}\, d\tau. \tag{34.16}$$

Aquí $R(\tau) = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}(\tau)|$.

Si el movimiento de la partícula es periódico con período $T = 2\pi/\omega_0$, el campo puede ser desarrollado en una serie de Fourier. La armónica de frecuencia $n\omega_0$ (n es un entero) se expresa por medio de la integral

$$A_n(\boldsymbol{r}) = \frac{e}{cT} \int_0^T \frac{\mathbf{v}(\tau)}{R(\tau)} \exp[in\omega_0(\tau - R(\tau)/c)]d\tau. \tag{34.17}$$

El potencial escalar $\varphi_n(\boldsymbol{r})$ se distingue de (34.17) por falta del factor $\mathbf{v}(\tau)/c$.

Capítulo VIII. Radiación y dispersión de ondas electromagnéticas

§ 35. Radiación de una partícula relativista cargada

35.1. Distribución angular de la radiación. Como ya hemos indicado, a grandes distancias de la partícula las expresiones para las intensidades del campo se simplifican: sólo queda el campo de ondas:

$$\boldsymbol{E} = \frac{e\boldsymbol{n} \times [(\boldsymbol{n} - \mathbf{v}/c) \times \dot{\mathbf{v}}]}{c^2 R(1 - \boldsymbol{n}\cdot\mathbf{v}/c)^3}\Bigg|_{t'}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}. \tag{35.1}$$

Calculemos el flujo de energía a grandes distancias de la partícula dentro del ángulo sólido $d\Omega$:

$$dI = \bar{\gamma}\cdot n R^2 d\Omega = \frac{c}{4\pi} E^2 R^2 d\Omega, \tag{35.2}$$

o bien, sustituyendo (35.1)

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2[\boldsymbol{n} \times ([\boldsymbol{n} - \mathbf{v}/c) \times \dot{\mathbf{v}})]^2}{4\pi c^3(1 - \boldsymbol{n}\cdot\mathbf{v}/c)^6}, \tag{35.3}$$

donde todas las magnitudes en el segundo miembro se toman en el momento retardado t'.

El flujo de energía por unidad del ángulo sólido $dI/d\Omega$ depende de R sólo por el argumento temporal $t' = t - R(t')/c$. Esto significa que el flujo de energía que pasa por el área $R^2 d\Omega$ dentro del ángulo sólido elegido $d\Omega$, situada a distintas distancias de la partícula, será igual en los correspondientes momentos de tiempo (tomando en consideración la velocidad finita de transporte de la energía), o sea, las perturbaciones electromagnéticas se

propagan al infinito desde la partícula cargada que las generó. Forman un campo de radiación que, después de aparecer, se separa de su propia fuente. Precisamente la magnitud (35.3) proporciona la energía de radiación que se propaga dentro del ángulo sólido unitario.

El campo cuasiestacionario (es decir, los sumandos que en (34.10), (34.13) no contienen $\dot{\mathbf{v}}$ y proporcionales a R^{-2}) no posee semejante propiedad. Con el crecimiento de R el flujo de energía del campo cuasiestacionario dentro del ángulo sólido dado decrece como R^{-2}. Por consiguiente, el campo cuasiestacionario queda constantemente ligado con la partícula y no crea un flujo hacia el infinito.

Efectuemos el análisis de la distribución angular de la radiación (35.3) para algunos casos particulares.

1. Partícula no relativista, $v \ll c$. Despreciando los términos del orden v/c, de (35.3) obtenemos

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3}[\dot{\mathbf{v}}^2 - (\boldsymbol{n} - \dot{\mathbf{v}})^2] = \frac{e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{4\pi c^3}\operatorname{sen}^2\theta, \tag{35.4}$$

donde θ es el ángulo entre la aceleración (en el momento retardado t') y la dirección de observación. La radiación está distribuida de manera simétrica con relación a la dirección de $\dot{\mathbf{v}}$ y es máxima en la dirección perpendicular a $\dot{\mathbf{v}}$.

2. Partícula ultrarrelativista, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \gg 1$, la aceleración está dirigida a lo largo de la velocidad: $\dot{\mathbf{v}} \parallel \mathbf{v}$. Designando por θ el ángulo entre $\boldsymbol{n}$ y $\mathbf{v}$ de (35.3), obtenemos

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2\dot{\mathbf{v}}^2\operatorname{sen}^2\theta}{4\pi c^3[1 - (v/c)\cos\theta]^6}. \tag{35.5}$$

El gran exponente del denominador, muy pequeño para $\cos\theta \approx 1$, conduce a que casi toda la radiación está concentrada en la región de pequeños θ (aunque cuando $\theta = 0$ la intensidad se anula). En la región de mayor interés, o sea, la de los ángulos pequeños, realizamos el desarrollo de $\operatorname{sen}^2\theta = \theta^2$, $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$. Teniendo en cuenta que $v \approx c$, hallamos

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{16e^2\dot{\mathbf{v}}^2\gamma^{10}(\gamma\theta)^2}{\pi c^3(1 + \gamma^2\theta^2)^6}. \tag{35.6}$$

La radiación está concentrada en un cono con ángulo de abertura de un orden de varios $1/\gamma$. Esta propiedad de la radiación de las partículas ultrarrelativistas se explica por la transformación relativista de los ángulos y ya fue considerada en el § 2.

3. Partícula ultrarrelativista, la aceleración es perpendicular a la velocidad: $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v}$. Una sencilla transformación del numerador de (35.3) conduce a la fórmula

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3}\left\{\frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{(1 - \boldsymbol{n}\cdot\mathbf{v}/c)^4} - \frac{(1 - v^2/c^2)(\boldsymbol{n}\cdot\dot{\mathbf{v}})^2}{(1 - \boldsymbol{n}\cdot\mathbf{v}/c)^6}\right\}, \tag{35.7}$$

que después de introducir el ángulo θ entre $\boldsymbol{n}$ y $\mathbf{v}$ se escribe en la forma

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{4\pi c^3}\left\{\frac{1}{[1 - (v/c)\cos\theta]^4} - \frac{(1 - v^2/c^2)\,\mathrm{sen}^2\,\theta\cos^2\varphi}{[1 - (v/c)\cos\theta]^6}\right\}. \tag{35.8}$$

Aquí φ es el ángulo entre los planos $(\mathbf{v}, \boldsymbol{n})$ y $(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})$.

La distribución (35.8), lo mismo que (35.5), está concentrada en la dirección hacia adelante. Con pequeños θ tiene el aspecto

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{4e^2\dot{\mathbf{v}}^2\gamma^8}{\pi c^3(1 + \gamma^2\theta^2)^4}\left[1 - \frac{4\gamma^2\theta^2\cos^2\varphi}{(1 + \gamma^2\theta^2)^2}\right]. \tag{35.9}$$

Como así debe ser, la expresión entre paréntesis no es negativa con ninguno de los valores de los ángulos. El sentido de los vectores del campo en la zona de onda (o sea, la polarización de la onda) se determinan con las fórmulas (35.1) y pueden ser analizados para diversos casos de movimiento de la partícula.

35.2. Pérdida de energía e impulso de la partícula cargada. La magnitud $dI/d\Omega$ calculada en el § 31.1 es el flujo de energía electromagnética en el interior de un ángulo sólido unitario que un observador inmóvil puede medir en el sistema del laboratorio. Ella se distingue de la velocidad de las pérdidas de energía por la partícula, a cuenta de la radiación, en el ángulo sólido unitario en la dirección dada $-d^2\mathscr{E}/dt'\,d\Omega$, donde dt' es el intervalo del tiempo "retardado". Es evidente que la porción dI/dt de energía electromagnética, radiada dentro del ángulo sólido $d\Omega$ y que pasa junto al observador en el intervalo de tiempo desde t hasta $t + dt$, fue emitida por la partícula en el intervalo entre t' y $t' + dt'$. Por esto, la energía irradiada por la partícula $-d^2\mathscr{E}$ debe ser referida, precisamente, al intervalo de tiempo dt' y al ángulo sólido $d\Omega$ que coincide con el ángulo sólido del observador, ya que ambos están determinados en un mismo sistema de referencia (del laboratorio). Los intervalos de tiempo dt y dt' también han sido determinados en el sistema del laboratorio, pero están ligados con la relación

$$dt = \left(1 - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{v}(t')}{c}\right)dt' \tag{35.10}$$

que se desprende de (34.6). Igualando la energía emitida por la partícula en el tiempo dt' y la que ha pasado junto al observador en el tiempo dt, haciendo uso de (35.10), obtendremos

$$-\frac{d^2\mathscr{F}}{dt'\,d\Omega} = \frac{dI}{d\Omega}\frac{dt}{dt'} = \left(1 - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{v}(t')}{c}\right)\frac{dI}{d\Omega}. \tag{35.11}$$

De acuerdo con (35.3), la magnitud $dI/d\Omega$ depende del argumento t'. Esta relación establece la ligazón entre la pérdida de energía por la partícula y la intensidad de la radiación registrada por el observador.

Después de integrar (35.11) por todo el ángulo sólido, obtenemos la pérdida total de energía (o la sumaria por todas las direcciones) por la partícula que irradia:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt'} = -\int \frac{d^2\mathscr{E}}{dt'\,d\Omega}\,d\Omega = \int \left(1 - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{v}(t')}{c}\right)\frac{dI}{d\Omega}\,d\Omega. \qquad (35.12)$$

Como vemos en (35.12), ella no coincide con la intensidad total

$$I = \int \frac{dI}{d\Omega}\,d\Omega.$$

La magnitud $-d\mathscr{E}/dt'$ es una característica más cómoda de la radiación que la intensidad total I, ya que es relativistamente invariante. Para cerciorarnos de esto, comparemos la velocidad de pérdida de energía por la partícula en dos sistemas de referencia: el acompañante instantáneamente S_0, en el que la partícula está en reposo en el momento dado y el del laboratorio S, en el que la partícula tiene una velocidad $\mathbf{v}$. En el sistema S_0 la intensidad de la radiación (que coincide con la velocidad de pérdidas de energía $-d\mathscr{E}_0/dt'_0$) se da mediante la fórmula (35.4). Debido a que ella es una función par del ángulo, en este sistema no habrá pérdidas de impulso de la partícula, $d\boldsymbol{p}_0 = 0$.

Examinemos la energía $-d\mathscr{E}_0$ que radia la partícula en el sistema acompañante en el tiempo $dt'_0 = d\tau$. Con ayuda de las transformaciones de Lorentz, tomando en consideración que $d\boldsymbol{p}_0 = 0$, obtenemos la pérdida de energía en el sistema S:

$$-d\mathscr{E} = -d\mathscr{E}_0/\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}.$$

Transcurre en el tiempo $dt' = d\tau/\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$. De aquí, para la velocidad de pérdidas de energía, hallamos

$$-d\mathscr{E}/dt' = -d\mathscr{E}_0/d\tau, \qquad (35.13)$$

lo que demuestra la invariación relativista de esta magnitud. La intensidad total I no posee semejante propiedad.

La velocidad de pérdidas de energía (35.13) puede expresarse con $\mathbf{v}$ y $\dot{\mathbf{v}}$ haciendo uso de (35.3) y realizando la integración por los ángulos. Pero una vía más sencilla es la generalización relativista de la velocidad de las pérdidas de energía $-d\mathscr{E}_0/d\tau$ en el sistema acompañante instantáneamente, basada en la invariancia de esta magnitud. Con ayuda de (35.13), (35.12), hallamos

$$-d\mathscr{E}/dt' = \int (dI_0/d\Omega)d\Omega.$$

Pero $dI_0/d\Omega$ es la intensidad de radiación (35.4) de una partícula no relativista. Integrando (35.4) por el ángulo sólido, obtenemos

$$-d\mathscr{E}/dt' = 2e^2\dot{\mathbf{v}}^2(t')/3c^3, \tag{35.14}$$

donde $\dot{\mathbf{v}}$ es la aceleración en un sistema tal de referencia donde $v \ll c$. Esta importante relación recibe el nombre de *fórmula de Larmor*.

La generalización relativista de la fórmula de Larmor es evidente: $\dot{\mathbf{v}}^2$ debe ser sustituida por un invariante relativista que con $\mathbf{v} \to 0$ se convierte en $\dot{\mathbf{v}}^2$. Semejante invariante es el cuadrado de la 4-aceleración tomado con el signo contrario $-w^k w_k$. Con $\mathbf{v} \to 0$ el componente temporal $w^k = du^k/d\tau$ se anula, la espacial se transforma en $\dot{\mathbf{v}}$. De este modo

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt'} = -\frac{2e^2}{3c^3} w^k w_k. \tag{35.15}$$

Determinemos ahora la pérdida de impulso de la partícula que radia. Como dijimos antes, en el sistema acompañante $dp_0 = 0$. Por medio de la transformación de Lorentz (5.15) en el sistema del laboratorio, hallamos

$$dp = \frac{\mathbf{v}d\mathscr{E}_0}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{35.16}$$

Refiramos esta pérdida al "tiempo de la partícula" dt' en el sistema del laboratorio:

$$-\frac{dp}{dt'} = \frac{\mathbf{v}}{c^2}\left(-\frac{d\mathscr{E}_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}dt'}\right).$$

Pero $\sqrt{1 - v^2/c^2}dt' = d\tau$ es la diferencial del tiempo propio de la partícula, por lo que tomando en consideración (35.13) obtenemos una simple ligazón entre las pérdidas de energía e impulso por la partícula debido a la radiación:

$$-\frac{dp}{dt'} = \frac{\mathbf{v}}{c^2}\left(-\frac{d\mathscr{E}}{dt'}\right). \tag{35.17}$$

Esta fórmula es válida a cualquier velocidad de la partícula.

Las relaciones (35.15), (35.17) pueden ser escritas en forma única relativísticamente covariante:

$$-\frac{dp^i}{d\tau} = -\frac{2e^2}{3c^5} w^k w_k u^i. \tag{35.18}$$

Expresemos la pérdida de energía a una velocidad arbitraria de la partícula con magnitudes tridimensionales. Calculamos la 4-aceleración

$$w^k = \frac{du^k}{d\tau} = \gamma\frac{d}{dt'}(\gamma c, \gamma\mathbf{v}) = \left(\gamma^4\frac{\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}}{c}, \gamma^2\dot{\mathbf{v}} + \gamma^4\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})}{c^2}\right)$$

y hallamos su cuadrado

$$w^k w_k = -\gamma^6[\dot{\mathbf{v}}^2 - (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})/c^2].$$

Esto nos ofrece la posibilidad de escribir la generalización relativista de la fórmula de Larmor mediante magnitudes tridimensionales:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt'} = \frac{2e^2\gamma^6}{3c^3}\left[\dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{(\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}^2)^2}{c^2}\right]. \tag{35.19}$$

Si la aceleración de la partícula se crea por el campo electromagnético exterior, ella puede expresarse por las intensidades E, H. De la ecuación de movimiento de la partícula escrita en forma tridimensional, tendremos

$$\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\dot{\mathbf{v}}^2 + \frac{(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})^2}{c^2}\right] + \gamma^2\frac{(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}^2)}{c^2} = \left(\frac{e}{m\gamma^2}\right)^2\left(E + \frac{1}{c}\,\mathbf{v} \times H\right)^2$$

y

$$\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m\gamma^3}\,E\cdot\mathbf{v}.$$

Combinando las dos últimas igualdades hallamos la magnitud $\dot{\mathbf{v}}^2 - (\mathbf{v} \times \times \dot{\mathbf{v}})^2/c^2$ y obtenemos la pérdida de energía con el aspecto

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt'} = \frac{2e^4\gamma^2}{3m^2c^3}\left[\left(E + \frac{1}{c}\,\mathbf{v} \times H\right)^2 - \frac{1}{c^2}\,(E\cdot\mathbf{v})^2\right]. \tag{35.20}$$

La partícula ultrarrelativista ($\gamma \gg 1$) pierde su energía para la radiación a una velocidad proporcional al cuadrado de la intensidad del campo exterior. Constituye una exclusión el caso cuando la partícula se mueve rigurosamente a lo largo del campo eléctrico con $H = 0$. Con esto, la aceleración está dirigida a lo largo de la velocidad de la partícula y la velocidad de la pérdida de energía

$$-\left(\frac{d\mathscr{E}}{dt'}\right)_{\parallel} = \frac{2e^4E^2}{3m^2c^3} \tag{35.21}$$

no depende de la propia energía. Al contrario, si $E = 0$ y $H \neq 0$, la aceleración es perpendicular a la velocidad, mientras que

$$-\left(\frac{d\mathscr{E}}{dt'}\right)_{\perp} = \frac{2e^4\gamma^2H^2v_{\perp}^2}{3m^2c^5}. \tag{35.22}$$

Para iguales intensidades del campo ($E = H$) la razón

$$\frac{(d\mathscr{E}/dt')_{\perp}}{(d\mathscr{E}/dt')_{\parallel}} = \gamma^2\frac{v_{\perp}^2}{c^2} \tag{35.23}$$

para la partícula ultrarrelativista es grande sólo si la componente de la velocidad $v_{\perp}$, perpendicular al campo magnético, no es demasiado pequeña.

Este resultado muestra que para el movimiento ultrarrelativista arbitrario de la partícula, el papel principal es desempeñado por su radiación a cuenta de la componente transversal de la fuerza.

35.3. Distribución espectral de la radiación. Examinemos las distancias grandes en comparación con la dimensión de la región de movimiento de la partícula y con la longitud de onda de su radiación:

$$r \gg s(t), \qquad r \gg \lambda. \tag{35.24}$$

En esta región, llamada *zona de onda*, el potencial vectorial (34.15) puede simplificarse. Representemos $R(\tau)$ en la forma

$$R(\tau) = |r - s(\tau)| \approx r - n \cdot s(\tau), \tag{35.25}$$

donde $n = r/r$ es el vector unitario, $s(\tau)$, el radio vector de la partícula. En el denominador bajo la integral (34.15) podemos limitarnos a la aproximación nula de $R(\tau) \approx r$ con una precisión salvo los términos $s/r \ll 1$. Pero en el grado del exponente debe tenerse también en cuenta el sumando $n \cdot s(\tau)$, ya que el producto $\omega s(\tau)/c = 2\pi s(\tau)/\lambda$ no tiene que ser obligatoriamente pequeño. Los siguientes términos del desarrollo (35.25), de un orden de s^2/r y menor, son de pequeñez despreciable a grandes distancias.

Introduciendo la designación $k = \omega n/c$ para el vector de onda de la onda radiada, de (34.15) obtenemos

$$A_\omega(r) = \frac{e}{c} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau) \exp(i\omega\tau - ik \cdot s(\tau)) d\tau. \tag{35.26}$$

Esto es una onda esférica divergente, cuya amplitud decrece como r^{-1} lejos de la fuente.

Al calcular la intensidad del campo magnético $H_\omega = \operatorname{rot} A_\omega$ a grandes distancias de la partícula, es suficiente diferenciar sólo el factor exponencial, ya que la diferenciación del denominador conducirá a los términos del orden relativo $(kr)^{-1} = \lambda/2\pi r \ll 1$. Como resultado obtendremos

$$H_\omega = ik \times A_\omega. \tag{35.27}$$

A continuación, calculando de forma análoga la intensidad del campo eléctrico de la ecuación de Maxwell para la amplitud de Fourier $-\frac{i\omega}{c} E_\omega = \operatorname{rot} H_\omega$, tendremos

$$E_\omega = H_\omega \times n. \tag{35.28}$$

De (35.27), (35.28) se desprende que los vectores E_ω, H_ω son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación n de la onda. Con anterioridad, en los §§ 27, 28, estas propiedades del campo de radiación ya fueron indicadas para las ondas planas. A grandes distancias de la fuente, en pequeñas regiones del espacio, la onda esférica es próxima a la plana, con lo que se explican las indicadas propiedades.

Habiendo calculado H_ω y E_ω con ayuda de (35.27), (35.28), obtenemos

$$E_\omega = -\frac{ie\omega}{c^2}\frac{\exp(ikr)}{r}\int_{-\infty}^{\infty} n \times (n \times \mathbf{v}(\tau))\exp(i\omega\tau - ik\cdot s(\tau))d\tau,$$
$$H_\omega = \frac{ie\omega}{c^2}\frac{\exp(ikr)}{r}\int_{-\infty}^{\infty} n \times \mathbf{v}(\tau)\exp(i\omega\tau - ik\cdot s(\tau))d\tau. \tag{35.29}$$

Los componentes de Fourier del campo de radiación (35.29), a diferencia de (35.1), no contienen la aceleración. Aquí no hay contradicción, ya que las expresiones subintegrales de (35.29) pueden ser transformadas integrando por partes y empleando las identidades del tipo

$$\frac{d}{dt}\frac{n \times (n \times \mathbf{v})}{c(1 - n\cdot\mathbf{v}/c)} = \frac{n \times [(n - \dot{\mathbf{v}}/c) \times \dot{\mathbf{v}}]}{c^2(1 - n\cdot\mathbf{v}/c)^2}$$

de forma que en cada una de ellas entre la aceleración de la partícula. Con semejante transformación, igual que al escribir las integrales (35.29), suponemos que la radiación (es decir, el movimiento acelerado de la partícula) dura un tiempo finito, desapareciendo en $\pm\infty$.

La intensidad de la radiación con la frecuencia prefijada ω en la dirección dada n, es igual al producto del vector de Poynting $\bar{\gamma} = \frac{c}{8\pi}|H_\omega|^2 n$ por el elemento de superficie de la esfera de radio grande que rodea la partícula:

$$\frac{d^2J}{d\omega d\Omega} = \frac{c}{8\pi}|H_\omega|^2 r^2. \tag{35.30}$$

Esta magnitud es promediada respecto al período de variación del campo. La intensidad total de radiación I se obtiene como resultado de la integración de (35.30) por todo el ángulo sólido y por todas las frecuencias desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Como $H_{-\omega} = H_\omega^*$, para calcular la intensidad total podemos duplicar la integral e integrar sólo por las frecuencias positivas:

$$J = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\int\frac{c}{4\pi}|H_\omega|^2 r^2 d\Omega \tag{35.31}$$

(compárese con (29.15)).

La magnitud bajo la integral (35.31) tiene el sentido de la intensidad diferencial de radiación con la frecuencia y la dirección prefijadas, referida al ángulo sólido y al intervalo de frecuencias unitarios. Designando la intensidad diferencial por $I_{n\omega}$, con ayuda de (35.29), tendremos

$$J_{n\omega} = \frac{e^2\omega^2}{8\pi^2c^3}\left|\int_{-\infty}^{\infty} n \times \mathbf{v}(\tau)\exp(i\omega\tau - ik\cdot s(\tau))\right|^2 d\tau. \tag{35.32}$$

Esta fórmula resuelve el problema del espectro y de la distribución angular de la radiación de una partícula cargada para su movimiento prefijado.

En el § 36 estudiaremos detalladamente la radiación durante el movimiento no relativista de las partículas. Aquí, aclararemos las singularidades cualitativas del espectro de radiación de las partículas ultrarrelativistas. Más arriba, hemos mostrado que la partícula ultrarrelativista radia, fundamentalmente, hacia adelante, a lo largo de la velocidad $\mathbf{v}$ por un estrecho cono con ángulo de abertura $\theta_0 \approx 1/\gamma \ll 1$. Pero resulta, que en dependencia de las propiedades del campo exterior, por el que la partícula se mueve, es posible destacar dos casos característicos de formación del espectro de radiación.

1. El ángulo total de desviación de la partícula en el campo exterior es grande en comparación con el ángulo de radiación $1/\gamma$. P. ej., con semejante caso tropezamos cuando la partícula radia en el campo magnético. En la dirección dada $\boldsymbol{n}$ la partícula radia desde un pequeño sector de la trayectoria, en el cual la dirección de la velocidad varía en un ángulo de un orden de $1/\gamma$. La longitud de este sector $l_{\text{coh}} \approx \rho/\gamma$, donde ρ es el radio momentáneo de curvatura y desempeña el papel de longitud de coherencia (o bien longitud de formación de la radiación).

Sea que por la longitud l_{coh} el campo exterior F varía débilmente:

$$\rho |\nabla F| / \gamma \ll F.$$

Entonces, en semejante longitud, la velocidad y la aceleración de la partícula pueden considerarse constantes. Seguidamente, de acuerdo con (35.23), el papel principal es desempeñado por la componente de la fuerza perpendicular a la velocidad. Debido a esto, en las condiciones que examinamos, la radiación es próxima a la que emite la partícula en movimiento por una circunferencia de radio ρ.

Conociendo la longitud de formación de la radiación podemos hallar el intervalo de frecuencias que determina la composición espectral de la radiación. Según (35.29), en el transcurso de la radiación $\tau \approx l_{\text{coh}}/v \approx \rho/\gamma v$ la fase de una onda de frecuencia ω variará en

$$\Delta\varphi = \omega\tau - \boldsymbol{n} \cdot \Delta \boldsymbol{s}(\tau)\omega/c.$$

Aquí, $\Delta \boldsymbol{s}(\tau)$ es la desviación de la partícula en el tiempo τ. Como el orden de la magnitud del ángulo entre $\boldsymbol{n}$ y $\mathbf{v}$ no supera $1/\gamma$

$$\frac{\boldsymbol{n} \cdot \Delta \boldsymbol{s}(\tau)}{c} \approx \frac{v\tau}{c} \approx \frac{\rho}{\gamma c}$$

con una precisión salvo los miembros del orden $1/\gamma^3$. Apreciando el incremento de la fase obtenemos el orden de la magnitud:

$$\Delta\varphi \approx \frac{\omega\rho}{\gamma v}\left(1 - \frac{v}{c}\right) \approx \frac{\omega\rho}{2\gamma^3 c}.$$

Sólo pueden ser radiadas ondas de tales frecuencias para las que $\Delta\varphi \lesssim 1$; siendo $\Delta\varphi > 1$ dentro del cono de radiación las ondas tienen mayores desfasajes y se extinguen mutuamente. El intervalo de las frecuencias que se radian determínase por la condición

$$\Delta\omega \lesssim \omega_c = \frac{c}{\rho}\gamma^3. \tag{35.33}$$

Para $\omega \gg \omega_c$ la intensidad de la radiación disminuye en alto grado (en muchos casos en forma exponencial).

Si la partícula se mueve en un campo magnético homogéneo en dirección perpendicular a su intensidad, de acuerdo con los resultados del § 11, $\rho = cp/eH \approx mc^2\gamma/eH$. Según ello,

$$\omega_c = \frac{eH}{mc}\gamma^2. \tag{35.34}$$

La frecuencia crítica ω_c es proporcional al cuadrado de la energía de la partícula y a la primera potencia de la intensidad del campo magnético. El movimiento en el campo magnético es rigurosamente periódico, por lo que el espectro consta de rayas discretas entre las que la distancia es igual a la frecuencia de rotación de la partícula relativista $\Omega = ecH/\mathscr{E} = eH/mc\gamma$. Para $\gamma \gg 1$ el espectro se convierte en cuasicontinuo. El máximo de la intensidad de radiación corresponde a la frecuencia de un orden de ω_c.

2. El ángulo total de desviación en todo el tiempo durante el que la partícula pasa el campo exterior es pequeño o bien del orden del ángulo de radiación $1/\gamma$. Toda la radiación transcurre en un estrecho cono y es determinada por toda la trayectoria de la partícula (con mayor precisión, por aquel de sus sectores en el que la partícula sufre aceleración). Como ejemplo podemos indicar la radiación de una partícula ultrarrelativista para la dispersión por un pequeño ángulo ($\vartheta \lesssim 1/\gamma$) en el campo coulombiano del núcleo.

Sea que el campo exterior existe en una región de dimensión a (ésta puede ser, p. ej., el radio de apantallamiento del campo coulombiano). En el transcurso del tiempo $\Delta t' \approx a/v \approx a/c$ la partícula sufrirá aceleración. Para el observador inmóvil en el sistema del laboratorio, este proceso transcurrirá en el tiempo

$$\Delta t \approx \frac{\Delta t}{\Delta t'}\Delta t' \approx \left(1 - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)\frac{a}{c} = \frac{a}{\gamma^2 c^2}.$$

Apreciemos el intervalo espectral con ayuda de la relación (29.24): $\Delta\omega \approx 1/\Delta t \approx c\gamma^2/a$. En el caso dado, el espectro se extiende hasta las frecuencias

$$\omega_c \approx \frac{c}{a}\gamma^2. \tag{35.35}$$

La frecuencia característica, como en (35.34), es proporcional al cuadrado de la energía de la partícula.

§ 36. Radiación de un sistema no relativista de partículas cargadas

36.1. Radiación eléctrica de dipolo. La investigación de las radiaciones se simplifica si el tiempo de propagación de las perturbaciones electromagnéticas, en los límites del sistema radiante, es pequeño en comparación con el tiempo característico de movimiento de las partículas cargadas en el sistema:

$$l/c \ll T, \tag{36.1}$$

donde l es la dimensión del sistema, T, el tiempo en el transcurso del cual la distribución de las cargas varía de modo notorio. Para movimiento periódico T es el período, por lo que a la desigualdad (36.1) puede dársele la forma

$$l \ll \lambda, \tag{36.2}$$

aquí λ es la longitud de la onda de radiación. Por fin, $l/T \approx v$, es decir, la velocidad característica de las partículas y la condición (36.1) se reduce al requerimiento de que la velocidad indicada no sea relativista:

$$v \ll c. \tag{36.3}$$

Analicemos el campo de radiación de un sistema de cargas que satisface las condiciones (36.1) — (36.3). Como ya hemos visto en el parágrafo anterior, para ellos es suficiente calcular el potencial vectorial en la zona de ondas ($r \gg \lambda$) y tomar en consideración sólo aquellos términos que son de razón inversa a la distancia r hasta el sistema, ya que únicamente ellos proporcionan aportación en la energía radiada por el sistema.

Partiremos de potencial retardado (32.22) y desarrollaremos $|r - r'|$ en una serie respecto de la razón entre las dimensiones del sistema y la distancia r: $|r - r'| \approx r - n \cdot r'$. Representemos la densidad de corriente bajo la integral en forma del desarrollo

$$j\left(r', t - \frac{r}{c} + \frac{n \cdot r'}{c}\right) = j\left(r', t - \frac{r}{c}\right) + j\left(r', t - \frac{r}{c}\right)\frac{n \cdot r'}{c} + \ldots, \tag{36.4}$$

donde con puntos están designadas las derivadas según el tiempo. En el denominador del integrando dejamos el miembro de la aproximación nula, sustituyendo $|r - r'|$ por r.

Tomando en el desarrollo (36.4) el primer término que no se elimina, tendremos

$$A(r, t) = \frac{1}{cr}\int j\left(r', t - \frac{r}{c}\right)dV'.$$

Más adelante hacemos uso de la identidad

$$a \cdot j = j \cdot \square'(a \cdot r') = \square'[j(a \cdot r')] - a \cdot r'(\square' \cdot j),$$

donde $\boldsymbol{a}$ es un vector constante y obtenemos

$$\boldsymbol{a}\cdot\int \boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}', t-\frac{r}{c}\right)dV' = -\boldsymbol{a}\cdot\int \boldsymbol{r}'\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}\,dV = \boldsymbol{a}\frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{r}'\rho\left(\boldsymbol{r}', t-\frac{r}{c}\right)dV'.$$

Aquí hemos hecho uso de la ecuación de continuidad $\mathrm{div}\,\boldsymbol{j} + \partial\rho/\partial t = 0$. Recordando la determinación del momento dipolar (21.5) podemos escribir

$$\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', t - r/c)dV' = \dot{\boldsymbol{p}}(t - r/c)$$

y

$$\boldsymbol{A}(r, t) = \frac{\dot{\boldsymbol{p}}(t - r/c)}{cr}. \tag{36.5}$$

Al calcular las intensidades del campo sólo hay que retener los términos del orden r^{-1} que se obtienen diferenciando el argumento $\dot{\boldsymbol{p}}$ (pero no el denominador):

$$\boldsymbol{H} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \frac{\ddot{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{n}}{c^2 r}, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}. \tag{36.6}$$

El vector eléctrico $\boldsymbol{E}$ puede expresarse, con ayuda de la fórmula (27.13), por el vector magnético $\boldsymbol{H}$ para la onda plana, ya que las ondas esféricas son en la zona de onda localmente próximas a las planas:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n} = \frac{(\ddot{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{n}}{c^2 r}. \tag{36.7}$$

Las armónicas de Fourier de las intensidades del campo se expresan, de acuerdo con (36.6), (36.7), mediante las armónicas de Fourier de la derivada del momento dipolar $\ddot{\boldsymbol{p}}_\omega = -\omega^2 \boldsymbol{p}_\omega$:

$$\boldsymbol{E}_\omega(r) = -\frac{\omega^2}{c^2}\frac{(\boldsymbol{p}_\omega \times \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{n}}{r}, \qquad \boldsymbol{H}_\omega(r) = -\frac{\omega_2}{c^2}\frac{\boldsymbol{p}_\omega \times \boldsymbol{n}}{r}. \tag{36.8}$$

Con (36.6) — (36.8) pueden calcularse fácilmente las intensidades de radiación con la frecuencia prefijada ω en la dirección dada $\boldsymbol{n}$

$$I_{n\omega} = \frac{c}{8\pi^2}\,\mathrm{Re}[r^2\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{E}_\omega \times \boldsymbol{H}_\omega)] = \frac{\omega^4}{8\pi^2 c^3}\,|\boldsymbol{p}_\omega \times \boldsymbol{n}|^2, \tag{36.9}$$

así como la intensidad de radiación por unidad de ángulo sólido

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}\,\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})r^2 = \frac{\ddot{p}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{4\pi c^3}, \tag{36.10}$$

$$I = \int \frac{dI}{d\Omega}\,d\Omega = \frac{2\ddot{p}^2}{3c^3}. \tag{36.11}$$

Para una partícula radiante ($p = er$) la última magnitud se convierte en la fórmula de Larmor (35.14).

La radiación estudiada recibe la denominación de *radiación eléctrica de dipolo*, ya que todas las magnitudes se expresan con las derivadas del momento eléctrico dipolar. La radiación eléctrica de dipolo no existe cuando el momento dipolar es nulo y al ser éste constante y para el cálculo del campo de radiación hay que tener en cuenta los siguientes términos del desarrollo (36.4). P. ej., semejante situación surge en un sistema de partículas cargadas con igual razón $e_a/m_a = \eta$:

$$p = \sum_a e_a r_a = \eta \sum_a m_a r_a = \eta R \sum_a m_a.$$

Aquí R es el radio vector del centro de masa; en él no hay fuerzas exteriores $\dot{R} = \dot{V} = \text{const}$, $\ddot{R} = 0$, por lo que la radiación dipolar se anula.

36.2. Radiación cuadripolar y magnético-dipolar. El segundo término en el desarrollo del segundo miembro de (36.4), en comparación con el primero, contiene el pequeño factor $r'/cT \leq l/\lambda \ll 1$. Transformémoslo por medio de la identidad

$$\frac{1}{c}(n\cdot r')\dot{j} = \frac{1}{2c}[(n\cdot r')\dot{j} + (n\cdot \dot{j})r'] + \frac{1}{2c}(r' \times \dot{j}) \times n.$$

La sustitución de esta expresión en (32.22) proporciona el potencial vectorial de la forma

$$A = \frac{\dot{m} \times n}{cr} + \frac{1}{2c^2 r}\frac{\partial}{\partial t}\int [(n\cdot r')j + (n\cdot j)r']dV'. \qquad (36.12)$$

Aquí $\dot{m} = \frac{1}{2c}\int [r' \times j]dV'$ es la derivada del momento magnético del sistema según el tiempo. La segunda integral en (36.12) será transformada mediante identidad

$$\int B\,dV = -\int r \operatorname{div} B\,dV \qquad (36.13)$$

que se comprueba fácilmente integrando por partes, con la particularidad de que B es un vector distinto de cero en una región finita del espacio, mientras que la integración se realiza por todo el espacio.

Con ayuda de la indicada identidad, hallamos

$$\int (n\cdot r')j\,dV' = -\int r'(n\cdot r')\operatorname{div} j\,dV' - \int r'(n\cdot j)dV'.$$

Haciendo uso de la ecuación de continuidad $\operatorname{div} j = -\partial\rho/\partial t$, escribamos el potencial vectorial (36.12) en la forma

$$A = \frac{\dot{m} \times n}{cr} + \frac{1}{2c^2 r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int r'(n\cdot r')\rho\,dV'. \qquad (36.14)$$

La integral en (36.14) puede escribirse mediante el momento eléctrico cuadripolar. Introduciendo designaciones tensoriales, tendremos

$$\int x'_\alpha (n \cdot r') \rho \, dV' = \frac{1}{3} n_\beta \int (3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho \, dV' +$$
$$+ \frac{1}{3} n_\alpha \int \rho r'^2 dV' = \frac{1}{3} Q_{\alpha\beta} n_\beta + \frac{1}{3} n_\alpha \int \rho r'^2 dV'. \qquad (36.15)$$

Como resultado hallamos el potencial vectorial en la zona de onda:

$$A = \frac{\dot{m} \times n}{cr} + \frac{\ddot{Q}}{6c^2 r} + \frac{n}{6c^2 r} \int \ddot{\rho} \left(r', t - \frac{r}{c} \right) r'^2 dV'. \qquad (36.16)$$

Aquí

$$Q_\alpha = Q_{\alpha\beta} n_\beta \qquad (36.17)$$

y $Q_{\alpha\beta}$ es el tensor del momento cuadripolar.

Cuando se calculan las intensidades del campo el último sumando en (36.16) no proporciona aportación, el campo de radiación sólo se expresa por dos momentos dipolar magnético y eléctrico cuadripolar:

$$H = \frac{1}{c^2 r} \left\{ (\ddot{m} \times n) \times n + \frac{1}{6c} \dddot{Q} \times n \right\},$$
$$E = \frac{1}{c^2 r} \left\{ n \times \ddot{m} + \frac{1}{6c} (\dddot{Q} \times n) \times n \right\}. \qquad (36.18)$$

Prestemos atención a la simetría del campo de radiación de los dipolos eléctrico y magnético: el campo del dipolo magnético se obtiene del campo de dipolo eléctrico sustituyendo $\ddot{p} \to \ddot{m}$, $E \to H$, $H \to -E$. Siendo armónico el movimiento de las cargas $\ddot{p} = -\omega^2 p$, $\ddot{m} = -\omega^2 m$, $\dddot{Q} = i\omega^3 Q$, por lo que la intensidad de las radiaciones de dipolo eléctrica y magnética son proporcionales a ω^4, en tanto que la radiación de cuadripolo eléctrica es proporcional a ω^6.

Calculemos para finalizar la intensidad total de la radiación de un sistema que posee un momento cuadripolar eléctrico $Q_{\alpha\beta}$ y un momento dipolar magnético m. Empleando (36.18), hallamos:

$$I = \frac{1}{4\pi c^3} \int \left\{ (\ddot{m} \times n)^2 + \frac{1}{36c^2} (\dddot{Q} \times n)^2 - \frac{1}{3c} \ddot{m} \cdot (\dddot{Q} \times n) \right\} d\Omega. \qquad (36.19)$$

Aquí realizamos la integración por todos los sentidos posibles del vector n. Escribiendo

$$(\ddot{m} \times n)^2 = \ddot{m}^2 - (\ddot{m} \cdot n)^2,$$
$$\ddot{m} \cdot (\dddot{Q} \times n) = e_{\alpha\beta\gamma} \ddot{m}_\alpha \dddot{Q}_{\beta\mu} n_\mu n_\gamma, \qquad (36.20)$$
$$(\dddot{Q} \times n)^2 = \dddot{Q}_{\alpha\beta} \dddot{Q}_{\alpha\gamma} n_\beta n_\gamma - \dddot{Q}_{\alpha\beta} \dddot{Q}_{\mu\nu} n_\alpha n_\beta n_\mu n_\nu$$

nos cercioramos de que hay que integrar los productos de los componentes del vector unitario.

Al calcular las correspondientes integrales es cómodo utilizar sus propiedades tensoriales. P. ej., la integral $\int n_\alpha n_\beta d\Omega/4\pi$ es un tensor tridimensional de II rango que no depende de la orientación de los ejes de coordenadas (debido a que por los ángulos ya se integró). Hay un solo tensor independiente con tales propiedades: el tensor unitario $\delta_{\alpha\beta}$, por esto

$$\frac{1}{4\pi}\int n_\alpha n_\beta d\Omega = \lambda\delta_{\alpha\beta}. \tag{36.21}$$

Contrayendo los miembros primero y segundo por el par de índices hallamos que $\lambda = 1/3$. De manera análoga determinamos

$$\frac{1}{4\pi}\int n_\alpha n_\beta n_\mu n_\nu d\Omega = \frac{1}{15}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}), \tag{36.22}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int n_\alpha n_\beta n_\gamma d\Omega = 0.$$

Sustituyendo (36.20) — (36.22) en (36.19), obtenemos

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{m}^2 + \frac{1}{180c^5}\dddot{Q}^2_{\alpha\beta}. \tag{36.23}$$

En comparación con la intensidad (36.11) los sumandos de (36.23) contienen el pequeño factor $(l/\lambda)^2$. Por ello, sólo desempeñarán notorio papel al no haber radiación de dipolo eléctrica*).

36.3. El campo a próximas distancias. Si la distancia hasta el sistema de cargas en movimiento satisface la condición

$$l \ll r \ll \lambda, \tag{36.24}$$

el cálculo del campo, como en la zona de onda, se simplifica, pero a semejantes distancias él tiene un carácter notablemente diferente y es llamado *cuasiestacionario*. La condición (36.24) significa que el tiempo de propagación de la perturbación electromagnética hasta el punto de observación r/c es pequeño en comparación con el período característico de movimiento de las cargas $\lambda/c = T$, debido a lo cual cuando se calculan los potenciales el

---

*) Parece como si para $\ddot{p} \neq 0$ y con la necesidad de tener en cuenta los términos del orden $(l/\lambda)^2$, hay que tomar la suma de las expresiones (36.11) y (36.23). Pero, hace poco, fue aclarado que esto no es así [104]: junto con los términos indicados, en la intensidad de radiación entrará un sumando adicional $\frac{2}{15c^5}(\ddot{p}\cdot\dddot{L})$ que también tiene el orden de $(l/\lambda)^2$. En él

$$L_\alpha = \frac{d}{dt}\int \rho r^2 x_\alpha dV - \int (3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})j_\beta dV.$$

retardo puede ser despeciado:

$$\varphi(r, t) = \int \frac{\rho(r', t)}{|r - r'|} dV', \qquad (36.25)$$

$$A(r, t) = \frac{1}{c} \int \frac{j(r', t)}{|r - r'|} dV'.$$

El campo se determina por la distribución instantánea de cargas y corrientes en el sistema.

El desarrollo del potencial escalar en una serie con relación a l/r ha de realizarse del mismo modo que en el caso estático (véase el § 21). Limitándonos a la aproximación dipolar, tendremos

$$\varphi(r, t) = \frac{q}{r} + \frac{p(t) \cdot r}{r^3}, \qquad (36.26)$$

donde q es la carga total del sistema,

$$p(t) = \int r' \rho(r', t) dV' \qquad (36.27)$$

su momento dipolar eléctrico.

Durante el desarrollo del potencial vectorial surgen ciertas diferencias del caso estático. Realizando el desarrollo como en el § 25, con una precisión salvo el término magnético-dipolar, obtenemos

$$A(r, t) = \frac{1}{cr} \int j(r', t) dV' + \frac{1}{cr^3} \int (r \cdot r') j(r', t) dV'.$$

El segundo término se transforma hacia el potencial de dipolo magnético (25.9). Para un sistema no estacionario, el primer término no se anula:

$$\int j(r', t) dV' = - \int r' \operatorname{div}' j(r', t) dV' = \frac{\partial}{\partial t} \int r' \rho(r', t) dV' = \dot{p}(t).$$

De este modo, el potencial vectorial toma el aspecto

$$A(r, t) = \frac{\dot{p}(t)}{cr} + \frac{m(t) \times n}{r^3}. \qquad (36.28)$$

A él corresponde el campo magnético

$$H = \operatorname{rot} A = \frac{\dot{p} \times r}{cr^3} + \frac{3r(m \cdot r)}{r^5} - \frac{m}{r^3}. \qquad (36.29)$$

Los dos últimos términos describen el campo del dipolo magnético. Por su parte, el primer término es el campo creado por la corriente elemental. Sea, p. ej., que $p(t) = q(t)l$, donde l es la distancia entre las dos cargas del dipolo, iguales por su valor absoluto, y $q(t)$, el valor de la carga positiva. En-

tonces, la corriente a lo largo del segmento l que une las cargas $J(t) = \dot{q}(t)$. El campo magnético a cuenta del primer término en (36.29)

$$H_{BS} = \frac{J(t)}{cr^3}[l \times r]$$

es el campo de la corriente elemental que fluye en el segmento l, calculado según la ley de Biot — Savart.

Combinando las aproximaciones utilizadas en los pp. 36.1 — 36.3 es fácil calcular el campo por toda la región $r \gg l$, incluida la zona de transición $r \approx \lambda$. Pero aquí no vamos a aducir las correspondientes fórmulas que son bastante voluminosas.

36.4. Ejemplos de radiación de los sistemas más sencillos.

Dipolo eléctrico elemental. Un semejante sistema se encuentra con frecuencia en física y en la técnica y puede ser realizado por medio de múltiples procedimientos, p. ej., en forma de un corto segmento ($l \ll \lambda$) de conductor excitado por corriente alterna $J(t) = J_0 \operatorname{sen} \omega t$. Para mayor evidencia supongamos que el dipolo elemental está formado por dos esferas conductoras iguales, unidas mediante un conductor de longitud l. En el sistema se han excitado oscilaciones eléctricas, como resultado de las cuales las cargas en las esferas $+q$ y $-q$ varían periódicamente: $q(t) = q_0 \cos \omega t$. Esto provoca las oscilaciones del momento dipolar: $p = q_0 l \cos \omega t$ y la corriente en el conductor $J(t) = q_0 \omega \operatorname{sen} \omega t$. La energía disipada en el conductor y consumida para la radiación se compensa a cuenta de la fuente exterior (generador de oscilaciones electromagnéticas).

Orientando el dipolo a lo largo del eje z, con ayuda de (36.6), (36.7), obtenemos los componentes del campo en la zona de onda, distintos de cero:

$$H_\varphi = E_\theta = -\frac{\omega^2 p(t - r/c)}{c^2 r} \operatorname{sen} \theta. \tag{36.30}$$

Como sigue de (36.30) el campo es una onda esférica divergente de polaridad lineal. La radiación es máxima en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$), y su intensidad sumaria por todas las direcciones se expresa por la fórmula (36.11):

$$I = 2\omega^4 p^2 / 3c^3. \tag{36.31}$$

La intensidad media respecto del tiempo, al ser expresada mediante el momento dipolar, es proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia: $\bar{I} = \omega^4 p_0^2 / 3c^3$, donde $p_0 = q_0 l$ es la amplitud del momento dipolar. Pero si expresamos la intensidad con la intensidad de corriente, la primera resulta ser proporcional al cuadrado de la frecuencia: $\bar{I} = \omega^2 J_0^2 l^2 / 3c^3$.

Rotator magnético. Supongamos que un cuerpo con un momento magnético $\boldsymbol{m}$ está en rotación uniforme con una frecuencia ω en torno de un eje que con el vector $\boldsymbol{m}$ forma un ángulo α. Hallemos la distribución angular y la intensidad total de la radiación, promediadas según la rotación del cuerpo.

Las intensidades del campo en la zona de onda será calculada con las fórmulas (36.18), donde hacemos $Q = 0$ debido a la carencia de momento cuadripolar. La distribución angular de la radiación

$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} r^2 \overline{E^2(t)} = \frac{1}{4\pi c^3} \overline{|\boldsymbol{n} \times \ddot{\boldsymbol{m}}|^2}.$$

Para calcular el segundo miembro empleamos la ecuación de movimiento del momento magnético $\dot{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{m}$. De éste obtenemos

$$\ddot{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{m}) = -\omega^2 \boldsymbol{m}_\perp,$$

donde $m_\perp$ es el componente perpendicular al eje de rotación. Así

$$(n \times \ddot{m})^2 = \omega^4[m_\perp^2 - (n \cdot m_\perp)^2]$$

o bien

$$(n \times \ddot{m})^2 = \omega^4 m_\perp^2 (1 - \operatorname{sen}^2\theta \cos^2(\omega t - \varphi)),$$

donde θ es el ángulo polar contado desde el sentido de $\vec{\omega}$; ωt y φ, los acimutes de los vectores $m_\perp$ y n en el plano perpendicular a ω.

Efectuando el promedio respecto al tiempo, en definitiva hallamos:

$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{\omega^4 m^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{8\pi c^3}(1 + \cos^2\theta). \tag{36.32}$$

La integración por el ángulo sólido proporciona

$$I = 2\omega^4 m^2 \operatorname{sen}^2\alpha / 3c^3.$$

El modelo de rotator magnético se emplea con frecuencia para explicar la radiación electromagnética de las estrellas de neutrones, o sea, los pulsares. Pero los mecanismos de radiación de los pulsares son mucho más complicados que el examinado más arriba, ya que la estrella gira en el plasma y tiene una cubierta de plasma llamada magnetosfera.

§ 37. Radiación de los cuerpos macroscópicos. Antenas

37.1. Vector de Hertz. Si el cuerpo radiador es macroscópico de dimensiones $l \gtrsim \lambda$, la descomposición del campo de radiación por multicampos no es aplicable y ha de hacerse uso de las expresiones de precisión (32.22), (32.23) para los potenciales retardados. La cantidad de funciones desconocidas puede ser reducida si en lugar de los potenciales $A(r, t)$ y $\varphi(r, t)$ ligados mediante la condición de Lorentz (18.3), introducimos la función vectorial $Z(r, t)$ por medio de que se expresan los potenciales electromagnéticos:

$$\varphi = -\operatorname{div} Z, \qquad A = \frac{1}{c}\frac{\partial Z}{\partial t}. \tag{37.1}$$

La magnitud Z recibe el nombre de *vector de Hertz* o bien *potencial de polarización.*

Con ello, es conveniente describir la distribución de cargas y corrientes en el sistema electroneutral con una sola función vectorial $P(r, t)$ mediante las relaciones

$$\rho = -\operatorname{div} P, \qquad j = \frac{\partial P}{\partial t}. \tag{37.2}$$

La magnitud $P(r, t)$ se denomina *vector de polarización* (comp. con el vector de polarización de la sustancia introducido en el § 2, II parte del libro). La relación de las cargas y las corrientes (37.2) con el vector de polarización asegura el cumplimiento de la ecuación de continuidad: $\operatorname{div} j + \partial\rho/\partial t = 0$.

La carga total de un sistema acotado debe ser, en tal caso, igual a cero

$$q = \int\limits_{V\to\infty} \rho\, dV = -\int\limits_{V\to\infty} \operatorname{div} \boldsymbol{P}\, dV = \oint\limits_{S\to\infty} \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S} = 0,$$

mientras que el momento dipolar eléctrico total $\boldsymbol{p}$ se expresa con la integral $\int \boldsymbol{P}\, dV$ por el volumen del sistema. En efecto, por definición $\boldsymbol{p} = \int r\rho\, dV$ o bien, mediante (37.2)

$$\boldsymbol{p} = -\int r \operatorname{div} \boldsymbol{P}\, dV = \int \boldsymbol{P}\, dV. \tag{37.3}$$

La última igualdad es una identidad a condición de que fuera del sistema $\boldsymbol{P} = 0$ y atestigua que el vector $\boldsymbol{P}$ puede considerarse como un momento dipolar por la unidad de volumen del sistema de cargas en movimiento que examinamos.

Supeditemos el vector de Hertz a la ecuación no homogénea de d'Alembert:

$$\Delta \boldsymbol{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{Z}}{\partial t^2} = -4\pi \boldsymbol{P}. \tag{37.4}$$

Aplicando alternativamente a los dos miembros de (37.4) los operadores $-\operatorname{div}$ y $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$, obtendremos las ecuaciones para los potenciales (18.5), lo que demuestra que la elección de la ecuación (37.4) para el vector de Hertz fue correcta. Por analogía con los potenciales retardados (32.22), (32.23) podemos escribir la solución de la ecuación (37.4) para un sistema acotado en el espacio libre:

$$\boldsymbol{Z}(r, t) = \int \frac{\boldsymbol{P}(r', t - |r - r'|/c)}{|r - r'|}\, dV'. \tag{37.5}$$

En conclusión aducimos las expresiones para las intensidades del campo escritas por medio del vector de Hertz

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{Z} - 4\pi \boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} \boldsymbol{Z}. \tag{37.6}$$

Ellas se obtienen haciendo uso de (37.1) y (37.4).

37.2. Radiación de la antena. Diagrama direccional (de radiación). Estudiemos la radiación de un conductor de longitud l, en el que se ha generado una onda fija de corriente (37.1):

$$J(z, t) = J_0 \operatorname{sen}[k(z + l/2)]e^{-i\omega t}. \tag{37.7}$$

La intensidad de la corriente en los extremos del conductor es igual a cero, por consiguiente

$$k = \omega/c = m\pi/l, \tag{37.8}$$

aquí m es el número de semiondas que pueden disponerse por la longitud del conductor. Semejante conductor es la más sencilla antena (lineal). En su ejemplo calculamos la radiación de un cuerpo macroscópico.

Considerando el hilo infinitamente fino, escribimos la densidad volumétrica de la corriente en la forma $j = e_z J(z, t)\delta(x)\delta(y)$ y, con la fórmula (37.2), hallamos el vector de polarización:

$$P(r, t) = \frac{i}{\omega} j(r, t). \tag{37.9}$$

Ahora, el vector de Hertz puede ser hallado de acuerdo con (37.5). Examinamos las distancias mayores que l. En el denominador de (37.5) hacemos

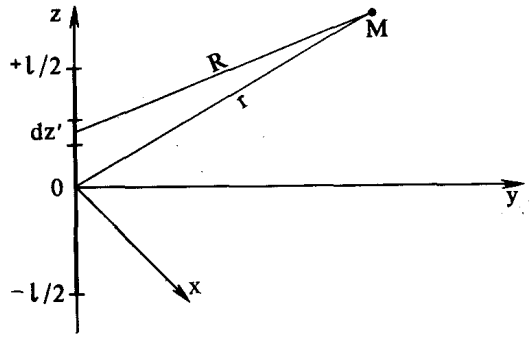

Fig. 37.1

$|r - r'| = r$, mientras que en el argumento temporal $|r - r'| \approx r - z' \cos\theta$. Para esta aproximación el vector de Hertz se expresará por la integral

$$Z(r, t) = \mathbf{e}_z \frac{iJ_0}{\omega r} \exp(ikr - i\omega t) \int_{-l/2}^{l/2} \operatorname{sen}\left[k\left(z' + \frac{l}{2}\right)\right] \times \exp(-ikz' \cos\theta) dz',$$

cuyo cálculo es elemental y proporciona

$$Z(r, t) = \mathbf{e}_z \frac{2J_0 c}{\omega^2 r} \frac{\exp(ikr - i\omega t)}{\operatorname{sen}^2\theta} \begin{cases} \left[-\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\cos\theta\right)\right] - m \text{ es par}, \\ \left[i\cos\left(\frac{m\pi}{2}\cos\theta\right)\right] - m \text{ es impar}. \end{cases} \tag{37.10}$$

El vector H se determina con la fórmula (37.6). En coordenadas esféricas

$$H = \mathbf{e}_\varphi \frac{2J_0}{cr} \frac{\exp(ikr - i\omega t)}{\operatorname{sen}\theta} \begin{cases} \left[-\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\cos\theta\right)\right] - m \text{ es par}, \\ \left[i\cos\left(\frac{m\pi}{2}\cos\theta\right)\right] - m \text{ es impar}. \end{cases} \tag{37.11}$$

Más adelante hallamos la distribución angular de la radiación promediada según el tiempo:

$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{cr^2}{8\pi}|H|^2 = \frac{J_0^2}{2\pi c} \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{m\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}^2\theta} - m \text{ es par}, \\ \dfrac{\cos^2\left(\dfrac{m\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}^2\theta} - m \text{ es impar}. \end{cases} \tag{37.12}$$

El carácter de la distribución angular de la radiación puede verse en los diagramas polares representados en la fig. 37.2. Con la línea de trazos se muestra la distribución de la corriente por la longitud de la antena, y con la llena, la distribución angular de la radiación. La división del diagrama direccional de radiación en lóbulos aislados está relacionada con la interferencia de los campos creados por distintos sectores de la antena. La intensidad máxima de la radiación se observa en las direcciones determinadas por los ejes de los lóbulos exteriores.

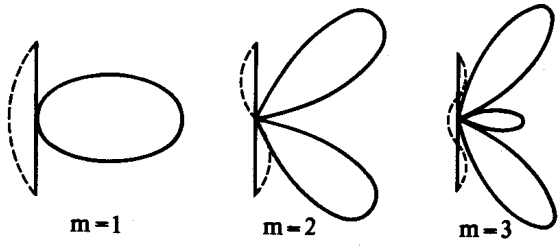

Fig. 37.2

La energía radiada por la antena en forma de ondas electromagnéticas, se toma de la energía de la corriente excitada en la antena por un generador de oscilaciones electromagnéticas. Debido a esto, con la radiación podemos ligar cierta resistencia adicional que llamamos *resistencia de radiación* y que caracteriza la pérdida de energía electromagnética para la radiación. Determinemos la resistencia de radiación con la relación

$$R_r = 2\overline{I}/J_0^2,$$

donde $\overline{I}$ es la intensidad de radiación sumaria por todas las direcciones, promediada según el tiempo; J_0^2, la amplitud de la intensidad de corriente en la antena. La integración de la intensidad (37.12) por el ángulo sólido conduce a

$$R_r = \frac{1}{c}\left[\ln(2\pi m) + C + \operatorname{Ci}(2\pi m)\right.$$

donde

$$\mathrm{Ci}(x) = C + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t}\, dt$$

es el coseno integral, $C \approx 0{,}577$, la constante de Euler.

La resistencia de radiación expresa la influencia inversa de la radiación sobre las oscilaciones de corriente en la antena.

37.3. Principio de reciprocidad. Examinaremos dos fuentes que se caracterizan por las distribuciones de corriente j_1 y j_2 y que crean campos monocromáticos de igual frecuencia ω. Debido al principio de superposición dichos campos satisfacen por separado los sistemas de ecuaciones

$$\operatorname{rot} H_1 = \frac{4\pi}{c} j_1 - \frac{i\omega}{c} E_1, \operatorname{rot} H_2 = \frac{4\pi}{c} j_2 - \frac{i\omega}{c} E_2, \qquad (37.13)$$

$$\operatorname{rot} E_1 = i\frac{\omega}{c} H_1, \qquad \operatorname{rot} E_2 = i\frac{\omega}{c} H_2.$$

Multiplicando estas ecuaciones, respectivamente, por E_2, H_2, E_1, H_1 y sustituyéndolas a pares, obtenemos

$$\operatorname{div}(H_1 \times E_2) = \frac{4\pi}{c} j_1 \cdot E_2 - \frac{i\omega}{c}(E_1 \cdot E_2 + H_1 \cdot H_2),$$

$$\operatorname{div}(H_2 \times E_1) = \frac{4\pi}{c} j_2 \cdot E_1 - \frac{i\omega}{c}(E_1 \cdot E_2 + H_1 \cdot H_2).$$

Por fin, restando término por término las igualdades obtenidas, hallamos

$$\operatorname{div}(H_1 \times E_2 - H_2 \times E_1) = \frac{4\pi}{c}(j_1 \cdot E_2 - j_2 \cdot E_1). \qquad (37.14)$$

Integremos los dos miembros de la ecuación (37.14) por todo el espacio. Esto conduce a

$$\int j_1 \cdot E_2\, dV = \int j_2 \cdot E_1 dV + \frac{c}{4\pi} \oint_{S\to\infty} (H_1 \times E_2 - H_2 \times H_1) \cdot dS,$$

donde la integral de volumen se ha transformado en la de superficie haciendo uso del teorema de Ostrogradski — Gauss. En el vacío la integral, tomada por una superficie alejada al infinito y habiendo campo de radiación, es distinta de cero. Pero los radiadores reales siempre están en un medio que provoca cierto amortiguamiento de las ondas electromagnéticas. Debido a esto, la integral de superficie puede considerarse igual a cero, aunque a distancias finitas la influencia de la absorción puede ser despreciablemente

pequeña. Como resultado llegamos a la siguiente enunciación del teorema de reciprocidad:

$$\int j_1 \cdot E_2 \, dV = \int j_2 \cdot E_1 dV. \tag{37.15}$$

Para el caso de los fuentes del campo, cuyas dimensiones son pequeñas en comparación con la longitud de onda y la distancia entre ellas es grande respecto de sus dimensiones, la igualdad (37.15) admite simplificaciones. Con las condiciones indicadas, cada uno de los vectores E_1 y E_2 puede considerarse constante en los márgenes de la otra fuente y sacarse del integrando:

$$E_2 \cdot \int j_1 \, dV = E_1 \cdot \int j_2 \, dV.$$

Seguidamente, aplicamos la identidad de la que ya hemos hecho uso más de una vez

$$\int j \, dV = -\int r \operatorname{div} j \, dV$$

y con ayuda de la ecuación de continuidad, hallamos

$$\int j \, dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int r\rho \, dV = i\omega p,$$

donde p es el momento dipolar. Para los radiadores eléctricos de dipolo el teorema de reciprocidad toma la forma

$$p_1 \cdot E_2 = p_2 \cdot E_1. \tag{37.16}$$

Si los radiadores dipolares son conductores cuasilineales de longitudes pequeñas en comparación con la longitud de la onda de la radiación, a (37.15) puede aducírsele otra forma. Sustituyendo $j\,dV \to J dl$ y designando por

$$\int E_2 \cdot dl_1 = U_2(1), \qquad \int E_1 \cdot dl_2 = U_1(2)$$

la diferencia de potencial creada con la fuente 2 en los extremos del conductor 1 y con la fuente 1 en los extremos del conductor 2, tendremos

$$J_1 U_2(1) = J_2 U_1(2). \tag{37.17}$$

Sea que varía la orientación de la primera antena. De acuerdo con su diagrama de radiación también variará $U_2(2)$. Pero

$$U_2(1) = (J_2/J_1) U_1(2),$$

es decir, la diferencia de potencial inducida a la primera antena es proporcional a $U_1(2)$. Por consiguiente, el diagrama de radiación de la antena es el mismo en los regímenes de recepción y transmisión.

Resulta que esta propiedad asimismo se conserva para los sistemas de antena arbitrarios. Los diagramas de radiación de cualquier antena coinciden cuando ésta transmite o recibe.

§ 38. Respuesta de la radiación

38.1. Interacción de la partícula cargada con su propio campo electromagnético. En el § 22 ya hemos chocado con dificultades de determinar la energía propia electrostática de una partícula cargada. Para una partícula puntual esta energía resulta ser infinita. La introducción del radio finito de la partícula

$$r_0 \approx e^2/mc^2 \tag{38.1}$$

y la suposición relacionada con esto de que ella tiene estructura interior, permite hacer finita la energía propia. Pero un objeto de dimensión r_0 no se describe con la teoría clásica: los efectos cuánticos ya se hacen notorios a distancias considerablemente grandes

$$\Lambda = \hbar/mc \approx 137 r_0. \tag{38.2}$$

El parámetro Λ recibe el nombre de *longitud de onda de Compton.*

Por desgracia, la teoría cuántica no resuelve las dificultades relacionadas con el cálculo de la energía propia. En dicha teoría, además de la energía propia infinita, aparece otra magnitud infinita: la adición a la carga de la partícula*).

Para el movimiento acelerado de la partícula cargada surge su interacción adicional con su propio campo. El movimiento acelerado engendra la radiación de ondas electromagnéticas, lo que, como vimos en el § 35, conduce a la pérdida por la partícula de energía e impulso. Por lo tanto, el propio movimiento de la partícula dependerá de las ondas electromagnéticas emitidas por ella y el planteamiento correcto del problema del movimiento de la partícula cargada requiere la introducción en la ecuación de movimiento de términos que tomen en consideración la influencia de la radiación sobre el movimiento.

No obstante, en muchos casos esta influencia resulta ser pequeña, lo que permite considerar prefijado el movimiento de la partícula radiante. El criterio cuantitativo con relación a la pequeñez de la respuesta de la radiación puede obtenerse comparando la pérdida de energía para la radiación en cierto tiempo Δt con la variación de la energía cinética de la partícula bajo la acción de las fuerzas exteriores durante ese mismo tiempo. Apreciemos las dos energías en un sistema de referencia en el que la velocidad de la partícula es no relativista:

$$\Delta \mathscr{E}_{\text{rad}} \approx 2e^2\dot{\mathbf{v}}^2\Delta t/3c^3 \approx 2e^2\dot{\mathbf{v}}\Delta\mathbf{v}/3c^3,$$

donde Δv es variación de la velocidad en el tiempo Δt; $\Delta \mathscr{E}_{\text{cin}} = m\Delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$.

---

*) El segundo de estos problemas sale tras los límites de la electrodinámica clásica. Ellos pueden examinarse en los libros [8, 18].

La desigualdad $\Delta \mathscr{E}_{\text{rad}} \ll \Delta \mathscr{E}_{\text{cin}}$ proporciona

$$\Delta t \approx v/\dot{v} \gg 2e^2/3mc^3 = 2r_0/3c = \tau, \tag{38.3}$$

donde τ es el tiempo de propagación de las perturbaciones electromagnéticas a una distancia del orden del radio clásico de la partícula (el factor 2/3 se escribe para simplificar las fórmulas posteriores). El tiempo τ adquiere los valores máximos para la partícula elemental más ligera, es decir, el electrón: $\tau_e = 0{,}63 \cdot 10^{-23}$ s.

Para el movimiento cuasiperiódico de la partícula, su velocidad y aceleración medias retornan a los valores iniciales después de cada período $T_0 = 2\pi/\omega_0$, en tanto que la pérdida de energía para la radiación en el transcurso de un período es comparable con la energía cinética media:

$$\Delta \mathscr{E}_{\text{rad}} \approx (2e^2 l^2 \omega_0^4/3c^3) T_0, \Delta \mathscr{E}_{\text{cin}} \approx m\omega_0^2 l^2,$$

donde l es la dimensión de la región de movimiento de la partícula. La comparación nos da

$$T_0 \gg \tau \qquad \text{o bien} \qquad \omega_0 \tau \ll 1. \tag{38.4}$$

Así, pues, la respuesta de la radiación puede considerarse como un pequeño efecto si el movimiento de la partícula es suficientemente suave: su estado variará débilmente durante el tiempo τ o bien a distancias $c\tau \approx r_0$.

38.2. Cálculo de la fuerza de frenado de radiación partiendo de la ley de conservación de la energía. Examinemos el movimiento de una partícula cargada no relativista por el efecto de la fuerza exterior $\boldsymbol{F}_0$. Siendo acelerado el movimiento la partícula radia ondas electromagnéticas. Con el fin de tener en cuenta la respuesta de la radiación añadamos al segundo miembro de la ecuación de movimiento la fuerza de respuesta de la radiación $\boldsymbol{F}_{\text{rad}}$:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_{\text{rad}}. \tag{38.5}$$

Confeccionemos la fuerza $\boldsymbol{F}_{\text{rad}}$ de modo que su trabajo en un intervalo de tiempo finito sea igual a la energía radiada por la partícula en ese mismo tiempo. Con auyda de (35.14) hallamos

$$\Delta \mathscr{E}_{\text{rad}} = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}}^2(t')\, dt' = -\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v}\, dt'. \tag{38.6}$$

Integrando por partes, tendremos

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v}\, dt' = -\frac{2e^2}{3c^3} \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}\, dt'. \tag{38.7}$$

En muchos casos el sumando $\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}|_{t_1}^{t_2}$ se anula. Esto sucede para el movimiento periódico si $t_2 - t_1$ es igual al período o con el movimiento en el

campo magnético, cuando $\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = 0$, o bien para tiempo finito de aceleración, cuando $\dot{\mathbf{v}}(t_1) = \dot{\mathbf{v}}(t_2) = 0$. Como sigue de (38.7), en todos los casos indicados el balance integral de energía será observado si

$$F_{\text{rad}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}. \tag{38.8}$$

Como resultado, la ecuación de movimiento (38.5) toma la forma

$$m\mathbf{v} = F_0 + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}. \tag{38.9}$$

Hemos establecido el tipo de la fuerza de frenado de radiación partiendo de razonamientos no rigurosos semicualitativos. La aplicación de enfoques más consecuentes*) conduce a esa misma fórmula (38.8) o bien requiere el estudio de la estructura interior de la partícula elemental, cosa que desconocemos, y que no se describe en electrodinámica clásica.

La fuerza de Lorentz de rozamiento radiante (38.8) describe la respuesta de la radiación de un modo que no es del todo satisfactorio. Ante todo, ella aumenta el orden de la ecuación de movimiento, ya que contiene la tercera derivada del radio vector. Semejante estructura de dicha ecuación contradice las tesis fundamentales de mecánica clásica, en la que todo el esquema prevé que las ecuaciones de movimiento deben ser de segundo orden según el tiempo. Por ello, algunas soluciones de la ecuación (38.9) no tienen sentido físico. P. ej., para $F_0 = 0$ la ecuación

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\mathbf{v}}$$

tiene la solución

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 e^{t/\tau}, \tag{38.10}$$

que describe la autoaceleración ilimitada de la partícula al no haber fuerzas exteriores.

Pero en aquellos casos cuando la fuerza del rozamiento radiante (38.8) entra en la ecuación de movimiento como una pequeña adición de las fuerzas exteriores, tomada en consideración por el método de las aproximaciones sucesivas, ella proporciona resultados con sentido físico (véase el § 39). Debido a la carencia de otra descripción más satisfactoria de la respuesta de la radiación nos vemos obligados a hacer uso de dicha fuerza.

Es fácil enunciar las condiciones de pequeñez de la fuerza de radiación en comparación con la fuerza electromagnética exterior. Escribiendo

$$F_0 = eE_0 + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times H_0 \tag{38.11}$$

*) Pueden encontrarse en los libros [44, 58, 11].

de (38.9) hallamos en la aproximación nula según la fuerza de radiación

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\dot{E}_0 + \frac{e}{mc}\dot{\mathbf{v}} \times H_0 + \frac{e}{mc}\mathbf{v} \times \dot{H}_0. \tag{38.12}$$

En el sistema instantáneamente acompañante $\mathbf{v} = 0$ y la aceleración en la aproximación nula tiene el valor $\dot{\mathbf{v}} = eE_0/m$. Teniendo esto en cuenta, de (38.8) y (38.12), obtenemos la siguiente expresión aproximada para la fuerza de radiación en el indicado sistema de referencia:

$$F_{\text{rad}} = \frac{2e^3}{3mc^3}\dot{E}_0 + \frac{2e^4}{3m^2c^4}E_0 \times H_0. \tag{38.13}$$

En el campo periódico exterior $\dot{E}_0 \approx -i\omega_0 E_0$, por lo que la comparación de (38.13) con (38.11) en el sistema acompañante nos da las dos desigualdades:

$$\omega_0 \tau \ll 1 \qquad \text{o bien} \qquad \lambda_0 \gg r_0 \tag{38.14}$$

y

$$H_0 \ll e/r_0^2 = m^2c^4/e^3. \tag{38.15}$$

La primera de estas desigualdades ya fue obtenida antes (véase (38.4)) como resultado de otros razonamientos. La segunda desigualdad requiere que el campo exterior sea pequeño en comparación con el campo máximo de la partícula "clásica", o sea, de un objeto extendido con radio r_0. Las correcciones cuánticas limitan la región de aplicación de la electrodinámica clásica a campos considerablemente menores:

$$H_0 \ll m^2c^3/\hbar e = e/137\, r_0^2.$$

La fuerza del frenado de radiación (38.8) admite la generalización relativista. Como información aducimos la correspondiente expresión cuatridimensional:

$$R^i = \frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{d^2u^i}{d\tau^2} - \frac{u^i u^k}{c^2}\frac{d^2u_k}{d\tau^2}\right). \tag{38.16}$$

La parte espacial de R^i para $v \to 0$ se convierte en (38.8). La deducción (38.16) puede ser hallada en los libros [44, 58, 11].

§ 39. Radiación y dispersión de las ondas electromagnéticas por un oscilador

La radiación, absorción y dispersión de las ondas por sistemas atómicos son procesos cuánticos, cuya descripción consecutiva sólo es posible basándose en la mecánica y electrodinámica cuánticas. Pero muchas de las características cualitativas de estos fenómenos son bien transmitidas por el modelo de interacciones de las ondas electromagnéticas con un oscilador

armónico. Por oscilador vamos a entender una partícula cargada ligada con cierto centro de fuerza elástica. Esta simula los enlaces del electrón en el átomo.

39.1. Radiación del oscilador. Anchura natural de las rayas espectrales. Supongamos que un electrón ligado con el origen de coordenadas mediante una fuerza elástica isótropa $F_e = -m\omega_0^2 r$, efectúa oscilaciones libres. Al no haber radiación la ecuación no relativista de movimiento tendría el aspecto

$$m\ddot{r} + m\omega_0^2 r = 0 \tag{39.1}$$

y describiría oscilaciones armónicas no amortiguadas de una frecuencia ω_0. Pero, como vimos en el § 38, la respuesta de la radiación conduce a la aparición de la fuerza de rozamiento de la radiación

$$F_r = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{r}$$

que debe ser adicionada al segundo miembro de la ecuación (39.1):

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = \frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{r}. \tag{39.2}$$

Buscaremos la solución según el método de las aproximaciones sucesivas, considerando que la fuerza del rozamiento de la radiación es pequeña. En la aproximación nula $\ddot{r} = -\omega_0^2 \dot{r}$, por lo que $\dddot{r} = -\omega_0^2 \dot{r}$. Introduciendo la designación

$$\gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3} = \frac{2\omega_0^2}{3c} r_0, \tag{39.3}$$

donde $r_0 = e^2/mc^2$, obtenemos la ecuación de movimiento del oscilador con rozamiento:

$$\ddot{r} + \gamma\dot{r} + \omega_0^2 r = 0. \tag{39.4}$$

Aquí, si $\omega_0 \ll c/r_0$ o bien $\lambda_0 \gg r_0$, $\gamma \ll \omega_0$. Para el electrón $\omega_0 \ll 10^{23}\ \mathrm{s}^{-1}$ lo que corresponde a la energía de los cuantos $\gamma\mathscr{E}_\gamma = \hbar\omega_0 \ll 100$ MeV.

Resolviendo (39.4) teniendo en cuenta la pequeñez de γ, despreciando los términos $(\gamma/\omega_0)^2$, hallamos:

$$r(t) = a\exp(-\gamma t/2 - i\omega_0 t), \tag{39.5}$$

donde a es la amplitud inicial del oscilador. Como el campo de radiación de la partícula cargada es proporcional a $\ddot{r} = -\omega_0^2 r$, en la zona de onda

$$E = E_0\exp(-\gamma t/2 - i\omega_0 t), \tag{39.6}$$

donde E_0 depende de las coordenadas de la amplitud del campo. Con semejante señal ya tropezamos al final del § 29. Esto conduce a la distribución de la intensidad de la radiación por las frecuencias del tipo (29.28):

$$I_\omega = I_0 \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4}. \tag{39.7}$$

La constante I_0 es la intensidad total:

$$I_0 = \int_0^\infty I_\omega d\omega.$$

A la carencia de rozamiento radiante corresponde $\gamma \to 0$. Con ello, de acuerdo con (Comp. IV. 17)

$$\frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4} \underset{\to 0}{\gamma \to} \delta(\omega - \omega_0),$$

y la distribución espectral se hace infinitamente estrecha:

$$I_\omega = I_0 \delta(\omega - \omega_0). \tag{39.8}$$

Así, pues, el hecho de tomar en consideración el rozamiento de la radiación conduce a un efecto cualitativamente nuevo, es decir, a la anchura finita del espectro de radiación.

El cálculo cuantomecánico de los espectros atómicos proporciona esa misma forma de la raya (39.6) que el modelo clásico del oscilador, pero con otro valor de la constante γ. Semejante forma de la raya se denomina *circuito de Lorentz* y la constante γ, *anchura natural de la raya*. La magnitud inversa $\tau = \gamma^{-1}$ caracteriza el período de vida del estado de excitación del oscilador: en el transcurso del tiempo de un orden de varias τ el oscilador se desexcita y cesan sus oscilaciones.

En condiciones reales, la forma y anchura de las rayas espectrales de los átomos se determinan no sólo por la respuesta de la radiación, sino que por otros factores entre los que desempeñan el fundamental papel los choques de los átomos y su movimiento térmico.

39.2. Dispersión de las ondas electromagnéticas por el oscilador. Estudiemos la interacción de una onda plana monocromática con el oscilador. Al segundo miembro de la ecuación (39.2) hay que adicionar la fuerza de interacción de la partícula cargada con el campo de la onda $\frac{e}{m}\left(E + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \right.$ $\left. \times H \right)$. Pero la componente magnética de la fuerza de Lorentz para la partícula no relativista tiene un orden relativo $v/c \ll 1$. Despreciando esta fuerza, escribamos la ecuación de movimiento:

$$\ddot{r} + \omega_0 r = eE_0 \exp(ik \cdot r - \omega t) + \frac{2e^2}{3mc^3} \dddot{r}. \tag{39.9}$$

Pero en semejante forma esta ecuación es demasiado complicada. Por ello, introducimos las siguientes simplificaciones: a) vamos a considerar que la amplitud de las oscilaciones del electrón a es pequeña en comparación con la longitud de onda del campo exterior, $a \ll \lambda_0$, para que podamos suponer $\exp(ik \cdot r) \approx 1$; b) tengamos en cuenta la fuerza de radiación según el método de las aproximaciones sucesivas, es decir, ponemos en ella $\dddot{r} =$

$= -\omega_0^2 r + eE_0 \exp(-i\omega t)$. Esto permite obtener la ecuación definitiva de movimiento:

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r + \gamma \dot{r} = \frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t}, \tag{39.10}$$

donde en el segundo miembro hemos despreciado el término del orden $r_0/\lambda \ll 1$.

En el problema de dispersión es suficiente hallar la solución particular de la ecuación (39.10) que oscila con una frecuencia de la fuerza excitatriz (o impulsante), ya que las oscilaciones propias del oscilador se amortiguan en el tiempo γ^{-1}. Obtenemos

$$r = \frac{(eE_0/m)\exp(-i\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \tag{39.11}$$

y hallamos el momento dipolar de la partícula en oscilación: $\boldsymbol{p} = e\boldsymbol{r}$. Después, con la fórmula (36.10), encontramos la intensidad promediada según el tiempo de la radiación de las ondas secundarias por el oscilador:

$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{1}{8\pi c^3} |\ddot{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{n}|^2. \tag{39.12}$$

Por regla, el proceso de dispersión se caracteriza por la sección eficaz diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\overline{\gamma}_0} \frac{\overline{dI}}{d\Omega}, \tag{39.13}$$

donde $\overline{\gamma}_0 = c|E_0|^2/8\pi$ es la densidad media según el tiempo del flujo de energía en la onda incidente. La distribución angular de la radiación dispersa depende del carácter de la polarización de la onda incidente.

1. *Dispersion de una onda polarizada rectilíneamente.* Con esto, $E_0 = E_0 \boldsymbol{e}$, donde $\boldsymbol{e}$ es el vector real unitario de polarización. Con ayuda de (39.11) — (39.13), hallamos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{\omega^4 \operatorname{sen}^2\theta}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\gamma^2}, \tag{39.14}$$

donde θ es el ángulo entre $\boldsymbol{e}$ y la dirección de propagación de la onda dispersa.

2. *Onda polarizada circularmente.* Eligiendo el eje z a lo largo de la dirección de su propagación, hacemos $E_0 = E_0(\boldsymbol{e}_x \pm i\boldsymbol{e}_y)/\sqrt{2}$, con lo que obtenemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \frac{\omega^4(1 + \cos^2\vartheta)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\gamma^2}, \tag{39.15}$$

donde ϑ es el ángulo entre la dirección de propagación de la onda incidente y la de la dispersión. La sección no depende de la dirección de rotación del

vector E en la onda. Como la onda no polarizada puede considerarse como la mezcla coherente de dos ondas polarizadas circularmente de iguales intensidades y direcciones opuestas de rotación (véase el p. 30.3), la sección de dispersión de la onda no polarizada también se describe con la fórmula (39.15).

Integrando (39.14) y (39.15) por el ángulo sólido, obtenemos para estos casos iguales valores de la sección eficaz total de dispersión:

$$\sigma = \frac{8\pi r_0^2}{3} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\gamma^2}. \tag{39.16}$$

Con frecuencias próximas a ω_0, o sea, para $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$, la fórmula general (39.16) puede simplificarse. Haciendo $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$ y dejando los términos con la diferencia $\omega - \omega_0$ sólo en el denominador, tendremos

$$\sigma = \frac{2\pi r_0^2}{3} \frac{\omega_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4}. \tag{39.17}$$

La dependencia de la frecuencia es la misma que para el espectro de radiación del oscilador (39.6). Si $\omega = \omega_0$ se observa un máximo brusco:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{8\pi r_0^2}{3}\left(\frac{\omega_0}{\gamma}\right)^2.$$

Si la dispersión se produce lejos de la resonancia, $\omega \gg \omega_0$,

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = \text{const} \tag{39.18}$$

y desaparece la dependencia de la frecuencia. No obstante, de hecho la aplicación de la fórmula (39.18) está limitada por arriba con la condición $\hbar\omega \ll mc^2$, es decir, la energía de un cuanto aislado del campo electromagnético debe ser pequeña en comparación con la energía en reposo de la partícula. En caso contrario hay que tomar en consideración los efectos cuánticos.

En la región de pequeñas frecuencias, $\omega \ll \omega_0$,

$$\sigma = \frac{8\pi r_0^2}{3}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \tag{39.19}$$

y la sección total es proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia.

Los resultados que más arriba hemos obtenido permiten construir un sencillo modelo de la polarización del medio en el campo alternativo. Supongamos que en el medio hay osciladores de diferente género con distintas frecuencias propias ω_j y amortiguamientos γ_j. El número total de osciladores por unidad de volumen es n, con la particularidad de que la parte relativa de osciladores del género j e igual a f_j. Bajo la acción del campo exterior cada oscilador oscila según la ley (39.11). El momento dipolar por unidad

de volumen del medio P será obtenido multiplicando cada r_j por la carga del electrón y realizando la adición por todos los osciladores:

$$P = en \sum_j f_j r_j = \frac{e^2 n}{m} \sum_j \frac{f_j E_0 \exp(-i\omega t)}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j}. \tag{39.20}$$

El coeficiente de proporcionalidad entre la polarización P y el campo eléctrico $E = E_0 \exp(-i\omega t)$ recibe el nombre de *susceptibilidad dieléctrica del medio*:

$$\chi = \frac{e^2 n}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j}. \tag{39.21}$$

El cálculo cuantomecánico para un medio gaseoso proporciona para χ una expresión que coincide por su forma con (39.21). Las frecuencias de las transiciones $\omega_{mn} = (\mathscr{E}_m - \mathscr{E}_n)/\hbar$ entre diversos niveles de energía de los átomos desempeñan el papel de frecuencias propias ω_j de los osciladores.

§ 40. Dispersión de las ondas electromagnéticas por las partículas libres

40.1. Fórmula de Thomson. Las secciones diferencial y total de dispersión de las ondas electromagnéticas por una partícula cargada libre se obtienen con facilidad de los anteriores resultados para un oscilador, si hacemos $\omega_0 = 0$ y despreciamos la fuerza de radiación (que da una aportación de un orden de $r_0/\lambda \ll 1$). Como resultado obtenemos:

para una onda polarizada rectilíneamente de (39.14)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \operatorname{sen}^2\theta, \tag{40.1}$$

para una onda polarizada circularmente o no polarizada de (39.15)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2\vartheta). \tag{40.2}$$

La integración por los ángulos conduce a la fórmula (39.18) para la sección total (*a la fórmula de Thomson*):

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2. \tag{40.3}$$

La sección total es una constante universal que no depende de la frecuencia de las ondas en tanto sea posible aplicar el cálculo clásico $\hbar\omega \ll mc^2$.

La dispersión de la onda por una partícula es acompañada por la acción sobre la última de cierta fuerza F por parte del campo que se dispersa. En el primer orden, según la amplitud del campo, $F = eE_0 e^{-i\omega t}$. Esta fuerza se anula al promediar según el período del campo.

Para la siguiente aproximación, la fuerza media por el tiempo es distinta de cero y se determina por el impulso del campo absorbido por la partícula en la unidad de tiempo. En lo que atañe a la radiación de las ondas secundarias de una partícula no relativista, ella está relacionada con la variación de su impulso, lo que fue mostrado en el p. 35.2. De acuerdo con (16.29), (28.13) en la onda plana la densidad del impulso

$$\bar{g} = \frac{1}{4\pi c}[\overline{E \times H}] = \frac{1}{4\pi c}\bar{E}^2 n. \tag{40.4}$$

El impulso que absorbe la partícula por unidad de tiempo es igual a $c\bar{g}\sigma$. Así, que

$$F = 1/3 r_0^2 |E_0|^2 n, \tag{40.5}$$

donde E_0 es la amplitud de la onda. La fuerza va dirigida en dirección de la propagación de la onda incidente.

40.2. Dispersión coherente y no coherente. Examinemos ahora la interacción de una onda plana monocromática polarizada rectilíneamente con un sistema de iguales partículas que efectúan oscilaciones, cada una de ellas en torno de su posición de equilibrio r_j. Como antes, vamos a despreciar la no homogeneidad de la onda incidente en los límites de la región de las oscilaciones de una partícula aislada, pero la distancia entre las partículas puede ser arbitraria en comparación con la longitud de onda. Por ello, sobre la partícula con el número j actuará el campo $E = E_0 \exp(ik_0 \cdot r_j - i\omega t)$ y su radio vector

$$r_j = a \exp(ik_0 \cdot r_j - i\omega t), \tag{40.6}$$

donde a es la amplitud de las oscilaciones, igual para todas las partículas, k_0, el vector de la onda incidente. En el caso de una partícula ligada elásticamente, de acuerdo con (39.11)

$$a = \frac{eE_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}, \tag{40.7}$$

mientras que para la partícula libre debemos hacer $\omega_0 = \gamma = 0$.

El campo de radiación de la zona de onda puede escribirse según el principio de superposición haciendo uso de (36.6) y de la condición $v/c \ll 1$:

$$H = \sum_j \frac{1}{c^2 R_j}[e\ddot{r}_j(t_j') \times n] =$$

$$= -\sum_j \frac{\omega^2}{c^2 R_j}[p \times n] \exp\{ik_0 \cdot r_j - i\omega(t - R_j/c)\}. \tag{40.8}$$

Aquí $p = ea$, $R_j = |r - r_j|$, donde r se registra desde cierto origen de coordenadas dentro del volumen ocupado por las partículas. Aproximando en el exponente $R_j = |r - n \cdot r_j$, en tanto que en el denominador $R_j = r$, hallamos

$$H = \frac{\omega^2 (n \times p)}{c^2 r} \exp[i(k \cdot r - \omega t)] \sum_j \exp(-iq \cdot r_j), \tag{40.9}$$

donde $q = k - k_0$ es la variación del vector de onda durante la dispersión, y $k = \omega n/c$, el vector de la onda dispersa.

Designando la sección eficaz diferencial de la dispersión de las ondas con un sistema de cargas por $dS/d\Omega$ y calculándola con la fórmula (39.13), obtenemos

$$\frac{dS}{d\Omega} = \left| \sum_{j=1}^{N} \exp(-iq \cdot r_j) \right|^2 \frac{d\sigma}{d\Omega}. \tag{40.10}$$

Aquí

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\omega^4 (n \times p)^2}{c^4 |E_0|^2}$$

es la sección de dispersión de una partícula solitaria que fue calculada con anterioridad y se da con las fórmulas (39.14), (39.15) o bien (40.1), (40.2).

El multiplicador

$$F(\omega, n_0, n) = |\sum_{j=1}^{N} \exp(-iq \cdot r_j)|^2 \tag{40.11}$$

es el factor de coherencia que muestra hasta qué medida las dispersiones por un sistema de cargas se distinguen de la dispersión por una partícula aislada. El depende fuertemente de la correlación entre el impulso inverso transmitido q^{-1} y las dimensiones de la región por la que se mueven las partículas. Examinemos dos casos límites.

1. El impulso transmitido es pequeño, por lo que para todo j $|q \times r_j| \ll 1$. Sustituyendo en (40.11) los exponentes por la unidad, tendremos

$$F = N^2, \tag{40.12}$$

donde N es el número total de difusores. Este es el caso de dispersión completamente coherente cuando los campos de partículas aisladas se suman en una misma fase. La sección es proporcional al cuadrado del número de difusores:

$$dS/d\Omega = N^2 d\sigma/d\Omega. \tag{40.13}$$

Si las que se dispersan son ondas largas, $\lambda \gg r_j$, la fórmula (40.13) es válida para todos los ángulos de dispersión. Pero si $\lambda \leq r_j$, (40.13) sólo es válida durante la dispersión a pequeños ángulos, para los que $qr_j \ll 1$, a pesar de que $kr_j \geq 1$. Como $q = 2k \operatorname{sen} \theta/2$, donde θ es el ángulo de dispersión, la región de los ángulos en la que es justa la fórmula (40.13) se prefija con la desigualdad

$$\theta \ll \theta_c \approx 1/kl, \tag{40.14}$$

donde l es la dimensión de la región ocupada por las cargas, θ_c, el valor característico del ángulo de dispersión.

2. El impulso transmitido es grande $|\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_j| \gg 1$. Escribamos (40.11) en la forma

$$F = \sum_{j=1}^{N} \exp[i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_j)] + \sum_{j\neq s} \exp[i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r}_s - \boldsymbol{r}_j)].$$

Es evidente, que la primera suma es igual a N. Hablando en general, los valores de la segunda suma dependen de la disposición de los campos y si ésta es casual, con N suficientemente grande se producirá la extinción mutua de los sumandos oscilantes $\exp[i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r}_s - \boldsymbol{r}_j)]$. Por ello, tendremos $F = N$,

$$dS/d\Omega = Nd\sigma/d\Omega. \tag{40.15}$$

Aquí se suman no las amplitudes, sino las intensidades de las ondas dispersas por partículas aisladas, el efecto es proporcional al número de difusores y no a su cuadrado.

Los efectos de interferencia examinados más arriba se observan, p. ej., durante la dispersión de los rayos X por los átomos y cristales.

Parte II

Electrodinámica de medios polarizables y magnetizables

Capítulo 1. Ecuaciones del campo electromagnético en medios polarizables y magnetizables

§ 1. Enfoques macroscópico y microscópico a la descripción de los fenómenos electromagnéticos en medios

Las ecuaciones de Maxwell, enunciadas y estudiadas en la Parte I, son también válidas cuando, además del campo electromagnético y las cargas que lo formaron, hay asimismo sustancias en interacción con dicho campo. Las cargas de las que consta la sustancia pueden moverse por el efecto del campo electromagnético, debido a lo que en el medio surgen corrientes; la densidad de las corrientes inducidas será designada con la letra j.

El reagrupamiento de las cargas conduce a la aparación de regiones del espacio con densidad de la carga ρ que no es igual a cero. Por otro lado, estas cargas y corrientes inducidas también deben ser fuente de un campo electromagnético. Se crea una situación en la que el campo electromagnético determina el movimiento de las cargas y las corrientes en la sustancia y, al mismo tiempo, el propio campo está condicionado por las cargas y corrientes inducidas por él. Si la variación de las intensidades de los campos eléctrico y magnético, condicionada por la interacción del campo con la sustancia es del orden de las intensidades del campo inicial, el problema se reduce, por así decirlo, al hallazgo del *campo electromagnético autocongruente* (o bien autocoherente). La solución de semejante género de problemas constituye el objeto de electrodinámica de los medios.

De esta definición de electrodinámica de los medios también se desprende qué cantidad de sustancia debe considerarse medio. En tanto que la cantidad de sustancia es tan pequeña que la variación del campo electromagnético condicionada por las cargas y corrientes inducidas en la sustancia es relativamente pequeña, el correspondiente problema puede resolverse por los métodos desarrollados en la Parte I del presente libro. Con otras palabras, en tal caso tropezamos con el movimiento de las cargas en el campo prefijado. Con ello, no sólo las cargas y las corrientes, sino también el campo electromagnético inducido por ellas puede ser hallado por el movimiento de las cargas, conocido ya después de resolver la primera etapa de dicho

problema. En lo que se refiere a la influencia del campo creado sobre el movimiento de las cargas, es posible despreciarla. Si no hay la posibilidad de hacer esto, la sustancia en interacción con el campo ha de considerarse medio.

Otra causa por la que el movimiento de las partículas de que está constituida la sustancia, no puede considerarse como el movimiento en el campo prefijado, es el movimiento térmico de las partículas del medio y su interacción que no se reduce a la interacción por medio del campo electromagnético autocongruente.

1.1. Ecuaciones microscópicas del campo. Cargas y corrientes extrañas e inducidas. La base de electrodinámica de los medios está constituida por las ecuaciones microscópicas de Maxwell que siempre son justas cuando es válida la propia teoría clásica del campo electromagnético:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_{\text{ext}}) + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{E} &= 4\pi(\rho + \rho_{\text{ext}}). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Hablando en general, las corrientes y cargas en (1.1) constan de dos partes. Las variables $\boldsymbol{j}$ y ρ en estas ecuaciones deben considerarse funciones (mejor dicho, funcionales) de las intensidades $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ de aquellos campos que dichas cargas y corrientes determinan en considerable grado. Parte de ellas puede condicionarse por causas exteriores respecto del problema dado. Tales cargas y corrientes, independientes de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$, son algunas veces llamadas *extrañas* y se designan con ρ_{ext} y $\boldsymbol{j}_{\text{ext}}$.

El carácter de la resolución de los problemas de electrodinámica se determina en alto grado por la forma de dependencia entre las variables $\boldsymbol{j}$ y ρ y las intensidades $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$. A su vez, esta dependencia determínase por el carácter del movimiento de las cargas en los campos y, en principio, es posible hallarla en la solución de las ecuaciones de mecánica clásica o cuántica.

Las ecuaciones de mecánica para cada partícula pueden ser escritas de modo simbólico en forma de las ecuaciones de Newton*):

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \boldsymbol{H}\right) + \boldsymbol{F}_{\text{ext}}. \tag{1.2}$$

En el segundo miembro de la ecuación de Newton, además de la fuerza de Lorentz, también entra la fuerza $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ de origen no electromagnético (tales

*) En realidad, puede ser más cómodo resolver las ecuaciones de movimiento en la forma lagrangiana o hamiltoniana o bien sus análogos cuánticos.

fuerzas pueden estar ligadas, p. ej., con el choque de las partículas, así como con las interacciones gravitacionales o nucleares).

La solución conjunta del sistema de ecuaciones del campo (1.1) con las ecuaciones de mecánica (1.2), en principio, determina totalmente el campo electromagnético. Semejante enfoque a la descripción de este campo en los medios se denomina *microscópico* y los propios *campos E* y *H*, *microscópicos*.

No obstante, una descripción tan detallada del campo en los medios es, por regla, imposible debido al número inconcebiblemente grande de ecuaciones del tipo (1.2), ya que semejante ecuación ha de ser escrita para cada partícula de la sustancia. Es más, en la mayoría de los casos una descripción tan detallada no es necesaria. Esto significa, que las propiedades de la sustancia, que se manifiestan en forma de las funciones j y ρ (que describen la respuesta de la sustancia al efecto del campo electromagnético), deben describirse de modo estático. Con otras palabras, las ecuaciones de Maxwell deben mediarse por la asociación estadística. (La noción de asociación estadística fue estudiada en el § 30 en relación con los campos no coherentes de radiación.) Las ecuaciones de Maxwell mediadas según la asociación y los corolarios que de ellas se desprenden son, precisamente, el objeto del estudio de los medios electrodinámicos.

En ciertas ocasiones (con tal caso tropezamos en el cap. V), esta mediación es la única que debe realizarse. Pero, con mayor frecuencia, efectúan una mediación más: por volúmenes físicamente pequeños. La cuestión radica en que el campo electromagnético microscópico sufre en toda sustancia una variación fuerte y no regular en el espacio y el tiempo.

P. ej., supongamos que el medio consta de átomos neutrales aislados. Si medimos o calculamos los valores microscópicos del campo, o sea, sus valores en puntos por separado en momentos fijados de tiempo, resultará que el campo eléctrico más fuerte (de un orden de 10^{16} en el sistema gaussiano) será observado en regiones con dimensiones cerca de $3 \cdot 10^{-13}$ cm ocupadas por los núcleos de los átomos. Al alejarse del núcleo, el campo se debilitará y se hará muy pequeño a distancias que superen la dimensión característica de la corteza o capa electrónica. Al penetrar en la región del espacio ocupada por el siguiente átomo, una vez más se producirá el reforzamiento brusco del campo, etc.

El movimiento de los átomos conducirá a fluctuaciones temporales complementarias del campo. Tales rápidas fluctuaciones del campo microscópico surgen en el plasma, los cristales y en otros medios y se producen entre las partículas vecinas de la sustancia a distancias de un orden de la distancia entre ellas (átomos, moléculas, iones).

1.2. Mediación de las ecuaciones de Maxwell. En la mayoría de los casos no es preciso el conocimiento detallado de los microcampos en la sustancia. Con la mayor frecuencia (pero hay exclusiones) son de interés aquellos valores del campo electromagnético que están mediados según

ciertas regiones finitas del espacio y en los correspondientes intervalos de tiempo*). Como resultado de tal mediación las microfluctuaciones, relacionadas con la estructura discreta de la materia, se atenúan. Un campo electromagnético mediado de este modo recibe el nombre de *macroscópico*.

Tiene sentido efectuar la mediación de campo por la región del espacio dentro de la que se halla la mayor cantidad de partículas del medio, pero que puede considerarse pequeña en comparación con otras dimensiones que son características para un sistema físico. P. ej., la región de mediación debe ser pequeña en parangón con la longitud de la onda electromagnética, claro está, si en el sistema hay semejantes ondas. El volumen ΔV que introducimos de este modo será llamado *físicamente pequeño* (o bien *macroscópicamente pequeño*). Los intervalos de tiempo Δt, por los cuales tiene sentido realizar la mediación, deben superar el "período" característico del movimiento de las cargas en el volumen físicamente pequeño.

Para pasar a la descripción macroscópica, ante todo, hay que mediar las ecuaciones de Maxwell (1.1) en el espacio y el tiempo. Determinemos del modo habitual el valor medio de cierto componente $h(r, t)$ del campo electromagnético:

$$\bar{h}(r, t) = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int\limits_{(\Delta V)} d^3\rho \int\limits_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} d\tau h(r + \vec{\rho}, t + \tau). \tag{1.3}$$

Aquí Δt es el correspondiente intervalo macroscópicamente pequeño de tiempo $d^3\rho$, un elemento del volumen ΔV el centro del cual puede elejirse en el punto con el radio vector r.

El campo medio (macroscópico) determinado de este modo es función de las coordenadas y el tiempo. Diferenciando los dos miembros de (1.3) por cualquier coordenada o por el tiempo t (la correspondiente variación será designada con la letra x), tendremos:

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int\limits_{(\Delta V)} d^3\rho \int\limits_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} d\tau \frac{\partial h(r + \vec{\rho}, t + \tau)}{\partial x},$$

o bien

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = \frac{\overline{\partial h}}{\partial x}. \tag{1.4}$$

---

*) De acuerdo con las representaciones de la mecánica estadística, lo último corresponde a la mediación fundamental según la asociación. La mediación por objetos físicamente pequeños e intervalos de tiempo es equivalente al procedimiento de medición de los campos con un instrumento macroscópico, ya que éste realiza la indicada mediación durante la medición (debido a las dimensiones finitas de los captadores y la inestancia).

Esas mismas medias también serán obtenidas al mediar según la asociación. Con el fin de cerciorarnos de esto, de acuerdo con la igualdad (30.7) de la Parte I del libro, escribamos

$$\bar{h}(r, t) = \lim_{N \to \infty} \frac{h'(r, t) + h''(r, t) + \ldots}{N},$$

donde $h'(r, t)$, $h''(r, t)$, etc. son los valores microscópicos del campo correspondientes a diversos sistemas de la asociación.

Diferenciando los dos miembros de la última igualdad, obtenemos de nuevo (1.4) (suponiendo que la diferenciación y el paso al límite son conmutables). Así, pues, la derivada de la media es igual al valor medio de la derivada. Por ello, podemos escribir:

$$\overline{\operatorname{rot} E} = \operatorname{rot} \bar{E}, \qquad \overline{\operatorname{div} H} = \operatorname{div} \bar{H}, \qquad \overline{\frac{\partial H}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}, \text{ etc.}$$

Por consiguiente, después de la mediación por volúmenes y tiempo físicamente pequeños, las ecuaciones de Maxwell toman el aspecto:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \bar{H} &= \frac{4\pi}{c} (\bar{j} + \bar{j}_{\text{ext}}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \bar{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \bar{E} &= 4\pi(\bar{\rho} + \bar{\rho}_{\text{ext}}). \end{aligned} \tag{1.5}$$

En electrodinámica macroscópica la intensidad media $\bar{E}$ del campo eléctrico macroscópico suele designarse por E omitiendo el signo de mediación. En lo que atañe a la intensidad media del campo magnético $\bar{H}$, se ha aceptado designar por B y darle el nombre de *vector de inducción magnética*. Además, ha sido asimismo adoptada la omisión del signo de mediación en las variables $\bar{j}, \bar{j}_{\text{ext}}, \bar{\rho}$ entendiendo en adelante por j, j_{ext}, ρ los valores mediados (macroscópicos) de dichas variables. Con tales designaciones el sistema de ecuaciones de Maxwell (1.5) toma el aspecto:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} B &= \frac{4\pi}{c} (j + j_{\text{ext}}) + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \\ \operatorname{div} B &= 0, \\ \operatorname{div} E &= 4\pi(\rho + \rho_{\text{ext}}). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Las ecuaciones (1.6) conservan su forma independientemente del valor de la región de mediación que puede ser elegida en correspondencia con el carácter del problema y la metodología experimental de mediación de los campos y otras magnitudes macroscópicas.

El sistema de ecuaciones (1.6) no es completo mientras no sea establecida la dependencia entre los valores mediados de la densidad de las cargas y corrientes inducidas en la sustancia ρ y j y las intensidades macroscópicas E y H de los campos o bien entre ρ y j, por un lado, y ρ_{ext} y j_{ext}, por otro. Por regla, con el fin de establecer semejante ligazón son aplicadas las representaciones estadísticas sobre el movimiento de las partículas de la sustancia: en la consideración se introduce la función de distribución $f(r, p, t)$ de las partículas en el campo electromagnético que se investiga (con la descripción cuántica de la sustancia, la matriz de la densidad). La función de distribución es la densidad media del número de partículas en el espacio de fase que ya fue estudiada en los §§ 6, 13, 16 de la Parte I. El producto $f(r, p, t)d^3rd^3p$ proporciona el número medio de partículas, cuyas coordenadas yacen en el volumen físicamente pequeño $dV = d^3r$, mientras que los componentes del impulso, en el volumen d^3p del espacio de impulso. El conocimiento de la función de distribución permite hallar las corrientes $j(r, t)$ y las cargas $\rho(r, t)$ inducidas por el campo*). La función de distribución puede hallarse haciendo uso de la solución de la ecuación llamada *cinética*.

La descripción de las propiedades del medio mediante la función de distribución es el procedimiento más detallado de dicha descripción. El enfoque cinético da la posibilidad de aclarar finos detalles de los fenómenos físicos y llevar la solución del problema "hasta el número", expresar éste mediante los parámetros microscópicos que caracterizan la estructura y las propiedades del medio. No obstante, semejante procedimiento de descripción es muy complicado y requiere información suficientemente plena de la estructura del medio. La insuficiencia de tal información obliga a introducir diversos modelos fenomenológicos o bien utilizar dependencias experimentales entre j, ρ y E, B.

P. ej., con frecuencia consideran (lo que se confirma en experimentos con campos débiles en comparación con los atómicos) que las variables j y E están ligadas con la relación

$$j = \sigma E, \tag{1.7a}$$

conocida como ley de Ohm (en forma diferencial). En esta forma, la fórmula (1.7a) sólo es válida para medios isótropos. En los anisótropos la ley

---

*) Las magnitudes j y ρ halladas con ayuda de la función de distribución son medias según la asociación. Estas variables se expresan mediante la función de distribución con las fórmulas:

$$\rho(r, t) = e\int f(r, p, t)d^3p, \qquad j(r, t) = e\int vf(r, p, t)d^3p.$$

Cuando en la sustancia hay partículas de distinto género, hay que conocer la función de distribución de cada género y sumar los segundos miembros de las ecuaciones escritas para todos los géneros de partículas. Para finalizar, es necesario añadir que durante la mediación según la asociación en caso de cuerpos macroscópicos, las medias correspondientes predicen también con certeza los resultados de cada experimento unitario.

de Ohm toma la forma

$$j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta. \tag{1.7b}$$

Con ello, σ es la característica de la sustancia y no depende de $\boldsymbol{E}$.

Sin embargo, es de importancia señalar que las fórmulas (1.7), como otras relaciones fenomenológicas, son justas con poca frecuencia. Describiendo correctamente el conjunto de experimentos en unas condiciones, pueden resultar ser inadecuadas en las condiciones nuevas. Como ejemplo indiquemos que en los campos fuertes y medios anisótropos, en lugar de (1.7) hay que emplear la relación

$$j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta + \gamma_{\alpha\beta\gamma} E_\beta E_\gamma + \zeta_{\alpha\beta\gamma\delta} E_\beta E_\gamma E_\delta. \tag{1.8}$$

en donde se efectúa la suma de 1 a 3 por los índices que se repiten.

La densidad de la corriente inducida no sólo puede determinarse con la intensidad del campo eléctrico, sino también teniendo en cuenta como varía éste de un punto a otro. En tal caso, la ligazón entre la corriente y la intensidad del campo eléctrico toma el aspecto

$$j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta + \xi_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\gamma}. \tag{1.9}$$

Como veremos más abajo, en los superconductores la ligazón entre la densidad de corriente y el campo magnético tendrá la forma

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{j} = -\Lambda \boldsymbol{B}. \tag{1.10}$$

A pesar de que con el enfoque fenomenológico aparece una considerable cantidad de parámetros determinados en experimentos, este enfoque es muy atrayente debido a su sencillez y carencia de modelos. Pero con el fin de establecer los límites de aplicación de una u otra dependencia, así como calcular las correspondientes constantes macroscópicas del medio, por regla, es necesaria la descripción estadística del movimiento de las partículas en la sustancia que examinamos en presencia del campo electromagnético. En muchos casos, dicha descripción deberá ser, además, cuántica.

Las soluciones de las ecuaciones de electrodinámica en los medios se distinguen por su exclusiva variedad, lo que está ligado con la diversidad de las propiedades de los mismos medios. Como medio puede intervenir el plasma de laboratorio y cósmico. Los metales, semimetales, así como los semiconductores, tienen propiedades que, desde ciertos puntos de vista, son semejantes. De otro modo se comportan las cargas en los medios no conductores, en particular en los dieléctricos sólidos y líquidos. Propiedades diferentes en absoluto poseen las cargas en los superconductores. También son muy variadas las propiedades de las sustancias (materiales) magnéticas, medios que entran en interacción fuerte con el componente magnético del campo electromagnético.

El desarrollo de las ciencias conduce a que tropecemos constantemente con medios nuevos o antiguos, pero que se hallan en condiciones extraordinarias. Por ello, la electrodinámica de medios es una ciencia moderna en desarrollo.

§ 2. Ecuaciones del campo electromagnético en medios

2.1. Ligazón entre las cargas y corrientes inducidas con los momentos dipolares específicos. Ecuaciones de Maxwell en medios. En las ecuaciones (1.6) las magnitudes ρ_{ext} y j_{ext} son prefijadas con las condiciones exteriores y pueden considerarse como términos no homogéneos de las ecuaciones. En lo que atañe a los valores de las cargas y corrientes inducidas ρ y j, éstos de antemano son desconocidos y deben ser expresados mediante ciertas variables macroscópicas que caracterizan las propiedades de la sustancia y dependientes de los valores de las intensidades del campo electromagnético. Las respectivas relaciones es posible escribirlas por analogía con (1.7), pero es lo más cómodo expresar ρ y j con las densidades P y M de los momentos macroscópicos dipolares eléctrico y magnético del medio determinados del modo siguiente:

$$P = \frac{1}{\Delta V} \sum_{(\Delta V)} P_i, \qquad M = \frac{1}{\Delta V} \sum_{(\Delta V)} m_i. \tag{2.1}$$

Aquí, P_i y m_i son los momentos dipolares de las micropartículas aisladas que constituyen la sustancia. La suma se realiza por todas las partículas en el volumen macroscópicamente pequeño ΔV.

La densidad de las cargas inducidas ρ puede expresarse con ayuda del vector de polarización eléctrica P. Para ello, consideremos un cuerpo electroneutral, tomado al azar, de dimensiones finitas y exijamos que su momento dipolar total $\int P dV$ esté expresado de manera conocida mediante la densidad de la carga inducida ρ:

$$\int P dV = \int \rho r dV \tag{2.2}$$

(en este caso, la integración se lleva a cabo por todo el volumen del cuerpo). La integral en el segundo miembro de (2.2) no depende de la elección de origen del sistema de coordenadas cuando

$$\int \rho dV = 0. \tag{2.3}$$

Multipliquemos los dos miembros de (2.2) por un vector constante a arbitrario y hagamos uso de la identidad $a \cdot P = (P \cdot \nabla)(a \cdot r)$. Con ello,

$$\int \rho (a \cdot r) dV = \int (P \cdot \nabla)(a \cdot r) dV = \int \nabla [P(a \cdot r)] dV - \int (a \cdot r) \operatorname{div} P dV. \tag{2.4}$$

De acuerdo con el teorema de Ostrogradski — Gauss la primera integral en el segundo miembro de (2.4) puede ser transformada en una integral de su-

perficie que abarque el cuerpo que examinamos. Esta integral es igual a cero, ya que el vector $\boldsymbol{P}$ es nulo fuera del cuerpo. En la igualdad restante es posible omitir el vector $\boldsymbol{a}$ debido a su arbitrariedad, así, que

$$\int \rho \boldsymbol{r}\, dV = -\int \boldsymbol{r} \operatorname{div} \boldsymbol{P}\, dV. \tag{2.5}$$

Esta igualdad se convierte en identidad si hacemos

$$\rho = -\operatorname{div} \boldsymbol{P}. \tag{2.6}$$

Como es fácil de ver, con esto también se cumple la igualdad (2.3).

En la frontera del cuerpo el vector $\boldsymbol{P}$ se anula a salto. En tal caso, en la superficie surge una carga superficial. Para calcularla, en (2.6) hay que efectuar un paso límite del mismo carácter que al deducir la condición de frontera partiendo de la ecuación de Maxwell $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho_{\text{ext}}$ (véase el § 15, P.I). Como resultado, obtenemos

$$\sigma = P_n. \tag{2.7}$$

Ahora, expresemos la densidad de corriente $\boldsymbol{j}$ con ayuda de los vectores de la polarización eléctrica y magnética. Para ello, es cómodo utilizar la ecuación de continuidad para las cargas y corrientes inducidas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0, \tag{2.8}$$

que poniendo en ella (2.6) nos proporciona

$$\operatorname{div} \left(\boldsymbol{j} - \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \right) = 0. \tag{2.9}$$

De (2.9) sigue, que

$$\boldsymbol{j} - \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} = \operatorname{rot} \boldsymbol{M}', \tag{2.10}$$

donde $\boldsymbol{M}'$ es cierto vector que posee la propiedad de que, como el vector $\boldsymbol{P}$, se distingue de cero sólo en el volumen ocupado por el cuerpo. De (2.10) se deduce que la densidad de corriente inducida puede representarse como la suma de dos sumandos. El primero de la forma $\partial \boldsymbol{P}/\partial t$ recibe el nombre de *corriente de polarización*, ya que ella está ligada con el flujo de las cargas que constituyen el momento eléctrico dipolar de la sustancia. El segundo sumando, $\operatorname{rot} \boldsymbol{M}'$, está condicionado por la presencia de microcorrientes cerradas no relacionadas con el campo eléctrico macroscópico.

Con el fin de comprender mejor el sentido del segundo sumando consideremos, primero, la correspondiente corriente al no haber campo eléctrico, cuando $\partial \boldsymbol{P}/\partial t = 0$. Es este caso, es evidente que la corriente $\boldsymbol{j} = \operatorname{rot} \boldsymbol{M}'$ debe poseer las propiedades siguientes:

a) la corriente total por cualquier sección del medio ha de ser nula:

$$\int \boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{S} = 0; \tag{2.11}$$

b) la integral

$$\frac{1}{2c}\int r \times j\,dV$$

por todo el volumen del medio tiene que ser igual al momento magnético total del cuerpo:

$$\frac{1}{2c}\int r \times j\,dV = \int M\,dV. \tag{2.12}$$

Ahora, hagamos uso del mismo procedimiento que al transformar ρ. Multipliquemos (2.12) por el vector constante arbitrario a y transformemos el integrando en el segundo miembro de (2.12) de la siguiente manera:

$$a\cdot(r \times \operatorname{rot} M') = (a \times r)\cdot \operatorname{rot} M' = \operatorname{div}[M' \times (a \times r)] +$$

$$+ M'\cdot \operatorname{rot}(a \times r),$$

con la particularidad de que

$$M'\cdot \operatorname{rot}(a \times r) = 2a\cdot M'.$$

Como resultado, después de la integración empleando el teorema de Gauss, tendremos

$$\frac{1}{c}\int M'\,dV = \int M\,dV.$$

Por consiguiente, $M' = cM$, donde M es la densidad del momento magnético del medio. Así, pues, al no haber campo eléctrico

$$j = c\operatorname{rot} M; \tag{2.13}$$

con esto, se cumple también la igualdad (2.11), de lo que es posible cerciorarse mediante el teorema de Stokes. La *corriente* en (2.13) se ha adoptado denominar *magnetizante*. La expresión obtenida para esta corriente asimismo se conserva en presencia de un campo eléctrico estático.

Habiendo campo eléctrico alternativo, cuando $\partial P/\partial t \neq 0$, la magnitud $\frac{1}{c}M'$ puede no coincidir con el vector de magnetización. Pero, a pesar de todo, la fórmula (2.10),

$$j = \frac{\partial P}{\partial t} + c\operatorname{rot} M, \tag{2.14}$$

conserva su validez si no consideramos que M es la densidad del momento magnético.

Retornando al sistema de ecuaciones (1.6) y poniendo en él las correlaciones (2.6) y (2.14) para las densidades de las cargas y corrientes, obtene-

mos el sistema:

$$\begin{gathered}\operatorname{rot} \boldsymbol{E}=-\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}(\boldsymbol{B}-4 \pi \boldsymbol{M})=\frac{4 \pi}{c} \boldsymbol{j}_{\text{ext}}+\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}+4 \pi \boldsymbol{P}), \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B}=0, \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{E}+4 \pi \boldsymbol{P})=4 \pi \rho_{\text{ext}}.\end{gathered} \tag{2.15}$$

El sistema (2.15) adquiere el mayor parecido con el sistema de ecuaciones de Maxwell en el vacío si introducimos dos nuevos vectores del campo:

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}+4 \pi \boldsymbol{P} \tag{2.16}$$

y

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}-4 \pi \boldsymbol{M}. \tag{2.17}$$

El vector $\boldsymbol{D}$ recibe el nombre de *inducción eléctrica* y $\boldsymbol{H}$, *intensidad del campo magnético*. El sentido de estos vectores consiste en que tienen en cuenta las cargas y corrientes inducidas en la sustancia. Ahora, el sistema de ecuaciones (2.15) toma la forma

$$\begin{gathered}\operatorname{rot} \boldsymbol{E}=-\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H}=\frac{4 \pi}{c} \boldsymbol{j}_{\text{ext}}+\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B}=0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{D}=4 \pi \rho_{\text{ext}}.\end{gathered} \tag{2.18}$$

A diferencia del sistema de ecuaciones de Maxwell en el vacío en el sistema de ecuaciones en un medio entran cuatro vectores: $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$. Por esta razón, el sistema (2.18) no es cerrado y debe ser completado con ecuaciones que establezcan ligazones adicionales entre los cuatro vectores del campo.

A distinción del sistema (2.18) las ecuaciones de enlace no tienen carácter universal y, por regla, se determinan por las propiedades concretas del medio que examinamos. En el presente libro hemos obtenido las ecuaciones de enlace para algunos medios, los más sencillos por sus propiedades. Por ahora, sólo haremos una suposición: las indicadas ecuaciones son lineales y vamos a escribirlas en forma simbólica:

$$\boldsymbol{D}=\hat{\varepsilon} \boldsymbol{E}$$

y

$$\boldsymbol{B}=\hat{\mu} \boldsymbol{H}. \tag{2.19}$$

Por $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\mu}$ vamos a entender ciertos operadores lineales que, en particular, pueden ser tensores de segundo rango, operadores diferenciales o integrales. Cuando los campos varían en el espacio y el tiempo con lentitud, los operadores $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\mu}$ pueden reducirse a la multiplicación de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ por cierta variable algebraica (puede ser tensorial). $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\mu}$ son llamados operadores de la constante dieléctrica y de la permeabilidad magnética, respectivamente.

Mediante una dependencia lineal hemos ligado a pares los vectores $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$. ¿Es necesario generalizar dicha dependencia escribiendo, p. ej., $\boldsymbol{D} = \hat{\varepsilon}\boldsymbol{E} + \hat{\zeta}\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H} = \hat{\mu}^{-1}\boldsymbol{B} + \hat{\xi}\boldsymbol{E}$?
Después de escribir la ecuación

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

en la forma

$$\boldsymbol{B} = -c\int \operatorname{rot} \boldsymbol{E}\, dt$$

vemos que en la correlación $\boldsymbol{D} = \hat{\varepsilon}\boldsymbol{E} + \hat{\xi}\boldsymbol{B}$ es posible excluir el vector $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{D} = \hat{\varepsilon}\boldsymbol{E} - c\hat{\zeta}\int \operatorname{rot} \boldsymbol{E}\, dt. \tag{2.20}$$

Bien es verdad que, con ello, en (2.20) han enrado las derivadas espaciales de $\boldsymbol{E}$. Pero como por $\hat{\varepsilon}$ entendemos un operador lineal de tipo arbitrario que puede contener derivación por las coordenadas, (2.20) no es más general que la primera de las ecuaciones (2.19). En lo que se refiere a la segunda ecuación (2.19) el carácter general de esta ligazón es difícil de establecer mediante las ecuaciones de Maxwell. De esto deducimos que, por lo menos, la primera ecuación (2.19) posee carácter suficientemente general y la necesidad de su posterior generalización sólo surge al estudiar fenómenos no lineales.

Para finalizar, indiquemos que por sus propiedades lo más cerca de las intensidades microscópicas $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ se hallan los vectores macroscópicos de intensidades del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ y de inducción magnética $\boldsymbol{B}$. En particular, precisamente dichos vectores determinan la fuerza que actúa sobre la carga extraña introducida en el medio:

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \boldsymbol{B}\right). \tag{2.21}$$

En la superficie del medio, donde las propiedades de éste cambian a salto, las ecuaciones diferenciales (2.18) dejan de ser válidas y han de ser sustituidas por las respectivas condiciones de frontera. El parecido formal entre las ecuaciones (2.18) y las de Maxwell en el vacío, partiendo de los resultados del § 15, P. I, permite escribir las condiciones de frontera para los vectores del campo:

$$\begin{aligned} B_{2n} &= B_{1n}, \qquad D_{2n} - D_{1n}, = 4\pi\sigma_{\text{ext}}, \\ E_{2\tau} &= E_{1\tau}, \qquad H_{1\tau} - H_{2\tau} = \frac{4\pi}{c} j_{\nu}^{\text{ext}}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Con los índices τ y n hemos designado aquí las componentes tangenciales y normales de los vectores, con el índice $\vec{\nu}$, el versor tangencial a la superficie de discontinuidad y perpendicular al vector $\vec{\tau}$, las cifras 1 y 2 muestran por qué lado de la superficie del medio se toman los vectores. La normal n está dirigida del primer medio al segundo. Las variables j_{ext} y σ_{ext} son las densidades de corriente superficial extraña y de la carga superficial extraña, respectivamente.

2.2. Otra forma de ecuaciones del campo en medios. Vector de la inducción eléctrica generalizada. El sistema de ecuaciones (2.18) es muy cómodo al describir los campos estacionarios o lentamente variables. En los campos rápidamente variables la división de la corriente inducida en la sustancia en corriente de polarización y magnetizante, lo que condiciona la forma de la segunda ecuación en el sistema (2.18), ya no es unívoca. En efecto, la corriente magnetizante se separa con facilidad cuando ella es cerrada. Precisamente en ese caso puede cumplirse la condición (2.11).

Pero, sin embargo, es de esperar que las corrientes magnetizantes sean aproximadamente cerradas sólo en caso si el recorrido l_T, que cubren las partículas cargadas en el período T de variación del campo, es mucho mayor que el radio de su trayectoria. Al no cumplirse esta condición es imposible distinguir la corriente magnetizante de la de polarización.

En semejante situación es cómodo introducir un nuevo vector de inducción eléctrica $\vec{\mathscr{D}}$, distinto de (2.16), ligándolo directamente con la densidad de la corriente inducida total:

$$\vec{\mathscr{D}}(r, t) = E(r, t) + 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} j(r, t')dt'. \tag{2.23}$$

Le daremos el nombre de *vector generalizado de inducción eléctrica.*

Por analogía con (2.16) en (2.23) la integral por el tiempo puede designarse con $\vec{\mathscr{P}}$:

$$\vec{\mathscr{P}}(r, t) = \int_{-\infty}^{t} j(r, t')dt', \tag{2.24}$$

aunque el vector $\vec{\mathscr{P}}$introducido de este modo no tiene evidente sentido del momento eléctrico dipolar por unidad de volumen. De (2.24) sigue, que

$$j(r, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathscr{P}}(r, t), \tag{2.25}$$

mientras que de la ecuación de continuidad se desprende que la densidad de la carga inducida

$$\rho(r, t) = -\int_{-\infty}^{t} \operatorname{div} j(r, t')dt' = -\operatorname{div} \vec{\mathscr{P}}. \tag{2.26}$$

Al escribir las expresiones (2.23) — (2.26) se supone que con $t \to -\infty$ no había campo electromagnético y, por lo tanto, corriente inducida y que és-

tos aparecieron sólo con tiempos finitos, así, pues, la integral por t' converge.

Como resultado, para la descripción de los fenómenos electromagnéticos en la sustancia ha sido suficiente introducir tres vectores: $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ y $\vec{\mathscr{D}}$. Ahora, el sistema de ecuaciones de Maxwell en un medio tomará la forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{B} &= \frac{4\pi}{c} j_{\text{ext}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathscr{D}}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{\mathscr{D}} &= 4\pi \rho_{\text{ext}}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Al igual que el sistema de ecuaciones (2.18), el (2.27) no es completo. Para determinar tres vectores sólo tenemos dos ecuaciones vectoriales (las dos primeras ecuaciones del sistema (2.27)). En lo que atañe a las ecuaciones que contienen $\operatorname{div} \boldsymbol{B}$ y $\operatorname{div} \vec{\mathscr{D}}$ han de ser consideradas, como ya dijimos en el § 14, P. I, como ciertas condiciones de frontera universales. Por esto, las ecuaciones (2.27) deben completarse con ecuaciones que liguen los vectores del campo. Por analogía con (2.19) y haciendo uso de los mismos argumentos, escribimos la ecuación material requerida en la forma

$$\vec{\mathscr{D}} = \hat{\varepsilon} \boldsymbol{E}. \tag{2.28}$$

Ahora, todas las propiedades del medio, incluidas las magnéticas, son descritas sólo con un operador $\hat{\varepsilon}$. Hemos de señalar que aunque este operador está designado con la misma letra que uno de los operadores de la fórmula (2.19), no coincide con él. En el sistema (2.27) no hay vector $\boldsymbol{H}$. Correspondientemente, no hay necesidad de introducir la segunda ecuación material. En lo que se refiere a la posible influencia del vector $\boldsymbol{B}$ sobre la inducción $\vec{\mathscr{D}}$, ella ya se ha tenido en cuenta en (2.28). Esto se desprende de razonamientos equivalentes a los que condujeron a la fórmula (2.20).

Por fin, la descripción de los fenómenos electromagnéticos en un medio basándose en las ecuaciones (2.27) proporciona, además, la ventaja de que con ella no surge el problema de si la segunda de las correlaciones materiales (2.19), que contienen el operador $\hat{\mu}$, es suficientemente generalizada. Puesto que ahora, el operador $\hat{\varepsilon}$ describe todas las propiedades electromagnéticas del medio, el conocimiento de $\hat{\varepsilon}$ en (2.28) deberá ser equivalente al conocimiento en (2.19) de los dos operadores $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\mu}$. Más adelante, estableceremos la ligazón entre estos tres operadores.

Como conclusión obtendremos las condiciones de frontera para los vectores del campo que entran en el sistema (2.27). Por medio del mismo método que en el § 15, P. I. de las ecuaciones primera, tercera y cuarta del

mencionado sistema, obtenemos las condiciones de frontera:

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}, \qquad B_{2n} = B_{1n}, \qquad \mathscr{D}_{2n} - \mathscr{D}_{1n} = 4\pi\sigma_{\text{ext}}, \tag{2.29}$$

que coinciden con las condiciones (2.22) para los correspondientes vectores. Sin embargo, la diferencia de las anteriores condiciones de frontera surge a causa de la ecuación que contiene rot $\boldsymbol{B}$. Es cómodo reescribir dicha ecuación en la forma

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_{\text{ext}}) + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{2.30}$$

haciendo uso de la fórmula (2.23). Si escribimos (2.30) en forma integral y realizando el paso límite como en el § 15, P. I, obtenemos

$$B_{2\tau} - B_{1\tau} = \frac{4\pi}{c}(j_\nu + j_\nu^{\text{ext}}), \tag{2.31}$$

donde j_ν es la corriente superficial inducida en la sustancia. Al deducir (2.31) se hizo uso de la acotación de la derivada según el tiempo de la magnitud física a medir, es decir, de la intensidad $\boldsymbol{E}$ del campo eléctrico.

§ 3. Tensor de la constante dieléctrica compleja. Dispersión temporal

3.1. Función de respuesta y constante dieléctrica. La forma más general de la ecuación material lineal que liga el vector $\vec{\mathscr{D}}$ o $\boldsymbol{D}$ con el vector $\boldsymbol{E}$ (lo mismo que $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$) es la correlación integral*) de la forma

$$\mathscr{D}_\alpha(r, t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int dV' \varepsilon_{\alpha\beta}(t, r; t', r') E_\beta(r', t'). \tag{3.1}$$

Aquí, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ es cierta función tensorial real (el núcleo del operador integral) que, en ocasiones, recibe el nombre de *función de respuesta.*

El sentido físico de la correlación (3.1) es sencillo: la respuesta del medio (es decir, su polarización o magnetización), en el caso general, se determina en el punto preestablecido del espacio r en el momento de tiempo t que precede o bien coincide con el momento t que consideramos. Así, pues los límites de integración por el tiempo en (3.1) reflejan el principio de causalidad: la polarización y magnetización del medio en el momento dado no pueden depender de los futuros valores de las intensidades del campo.

---

*) Aquí, con dV se designa el elemento de volumen por el que es realizada la integración. En adelante, esta misma magnitud será, a veces, más cómodo designar d^3r. Posteriormente, además de las integrales por volumen corriente, tropezaremos con integrales por el volumen en el espacio de impulso o velocidad. Por regla, los elementos del correspondiente volumen serán designados por d^3p o d^3v. El elemento del volumen de fase 6-dimensional, será, por lo tanto, $d^3p\,d^3r$.

La dependencia entre la respuesta del medio y los valores del campo, que preceden al momento dado, puede ser explicada por el carácter finito del tiempo de reestructuración del sistema de cargas, o sea, durante la variación del campo el sistema de cargas en la sustancia se reestructura, pero esto no se produce instantáneamente, sino en el transcurso de un tiempo finito, "recordando" en el momento dado los valores anteriores del campo. En realidad, semejante "memoria" sólo se conserva durante un tiempo finito del orden del tiempo de relajación τ de las cargas del medio. Por ello, la función de respuesta $\varepsilon_{\alpha\beta}$ decrece con rapidez cuando $t - t' \gg \tau$.

La causa física de la dependencia entre la polarización o la corriente inducida en el punto r y los valores del campo en los puntos vecinos de espacio r', está relacionada con que, debido al movimiento térmico, al punto dado pueden llegar partículas del medio de las regiones vecinas del espacio con otros valores de los campos y, por ello, la ligazón entre la respuesta del sistema y la intensidad del campo no es local. Los efectos de no localidad son tanto mayores cuanto más fuertemente varíe el campo en el espacio. Por regla, al crecer la diferencia $|r - r'|$ la función $\varepsilon_{\alpha\beta}$ decrece con suficiente rapidez.

El carácter tensorial de la función de respuesta $\varepsilon_{\alpha\beta}$ refleja la anisotropía de las propiedades del medio: en los medios anisótropos el sentido de los vectores $\mathscr{D}$ y E pueden no coincidir y, con ello, la ligazón lineal entre los vectores transcurre por intermedio de un tensor de segundo rango. En los medios isótropos los vectores $\mathscr{D}$ y E son colineales, en tanto que el tensor $\varepsilon_{\alpha\beta}$ es proporcional a un tensor unitario: $\varepsilon_{\alpha\beta} \sim \delta_{\alpha\beta}$.

Si el medio que consideramos es homogéneo, la dependencia entre la función de respuesta $\varepsilon_{\alpha\beta}$ y las variables r y r' se simplifica. La función indicada describe la influencia del campo en el punto r' sobre la respuesta del medio en el punto r. En un medio homogéneo dicha influencia sólo puede depender de la disposición relativa de los puntos r y r', pero no de su posición absoluta. Por consiguiente, la magnitud $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ha de ser función de la diferencia $r - r'$. Argumentos análogos permiten llegar a la conclusión de que si las propiedades del medio no dependen del tiempo t, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ sólo dependerá de la diferencia $t - t'$. Más adelante, en este parágrafo, vamos a tratar, precisamente, semejante caso con medio homogéneo y propiedades constantes.

Señalemos que la dependencia de la forma (3.1) también abarca el caso mencionado en el parágrafo anterior, cuando $\mathscr{D}$ se expresaba con las derivadas espaciales de E. Para cerciorarnos de esto, es suficiente desarrollar $E(r', t')$ en una serie exponencial por la diferencia $r' - r$ en el entorno de los puntos $r' = r$. Dejando en este desarrollo los términos nulo y primero de éste, obtenemos

$$\mathscr{D}_\alpha(r, t) = \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} E_\beta(r, t) + \xi_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial E_\beta(r, t)}{\partial x_\gamma}, \qquad (3.2)$$

donde

$$\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \int \varepsilon_{\alpha\beta}(r - r', t - t')d^3r',$$
$$\xi_{\alpha\beta\gamma} = \int \varepsilon_{\alpha\beta}(r - r', t - t')\cdot(r' - r)_\gamma d^3r'.$$

Aquí, las magnitudes $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ y $\xi_{\alpha\beta\gamma}$ son ya operadores sólo en relación con el tiempo. Estas magnitudes en un medio espacial-homogéneo, por general, no dependen de las coordenadas.

Más adelante, en este parágrafo, estudiaremos aquellos aspectos de la correlación (3.1) relacionados con la dependencia entre la respuesta del sistema y el tiempo. Debido a esto, no vamos a escribir las variables espaciales en (3.1) y omitiremos las integrales por el volumen V'.

Introduzcamos una nueva magnitud $f_{\alpha\beta}(t - t')$ ligada con el núcleo de la ecuación (3.1) mediante la correlación

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(t - t') = \delta_{\alpha\beta}\delta(t - t') + f_{\alpha\beta}(t - t').$$

de forma que (3.1) tomará la forma

$$\mathscr{D}_\alpha(t) = E_\alpha(t) + \int_0^\infty f_{\alpha\beta}(\tau)E_\beta(t - \tau)d\tau. \tag{3.3}$$

Multiplicando esta ecuación por $e^{+i\omega t}$ e integrando por t desde $-\infty$ hasta $+\infty$, obtenemos la imagen de Fourier de la ecuación (3.3):

$$\mathscr{D}_\alpha(\omega) = E_\alpha(\omega) + \int_0^\infty f_{\alpha\beta}(\tau)e^{i\omega\tau}E_\beta(\omega)d\tau.$$

Esta fórmula se diferencia de modo notorio de (3.3) debido a que la intensidad del campo eléctrico en su segundo miembro ya no depende de la variable de integración, de manera que la ligazón entre las imágenes de Fourier de los vectores de la inducción eléctrica y la intensidad del campo en vez de integral se ha convertido en algebraica,

$$\mathscr{D}_\alpha(\omega) = \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega)E_\beta(\omega), \tag{3.4a}$$

donde el coeficiente de proporcionalidad

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega) = \delta_{\alpha\beta} + \int_0^\infty f_{\alpha\beta}(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau. \tag{3.4b}$$

Ésta es la función dependiente de la frecuencia de la *constante dieléctrica compleja.*

3.2. Propiedades de la constante dieléctrica con frecuencias reales. La constante dieléctrica compleja posee una serie de propiedades matemáticas que reflejan las propiedades físicas de esta magnitud tan importante en electrodinámica.

En (3.4b) vemos directamente que con valores de la frecuencia ω podemos escribir:

$$\varepsilon^*_{\alpha\beta}(\omega) = \delta_{\alpha\beta} + \int_0^\infty f_{\alpha\beta}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = \varepsilon_{\alpha\beta}(-\omega). \tag{3.5}$$

Por lo tanto

$$\varepsilon'_{\alpha\beta}(\omega) = \varepsilon'_{\alpha\beta}(-\omega) \qquad \text{y} \qquad \varepsilon''_{\alpha\beta}(\omega) = -\varepsilon''_{\alpha\beta}(-\omega). \tag{3.6}$$

Así, pues, la expresión para la constante dieléctrica compleja

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega) = \varepsilon'_{\alpha\beta}(\omega) + j\varepsilon''_{\alpha\beta}(\omega)$$

contiene partes real e imaginaria que son, respectivamente, funciones par e impar de la frecuencia real.

La función $\varepsilon(\omega)$ es real en el eje imaginario del plano complejo ω. En efecto, de (3.4b) se desprende, que

$$\varepsilon^*_{\alpha\beta}(\omega) = \varepsilon_{\alpha\beta}(-\omega^*),$$

por lo que

$$\varepsilon^*_{\alpha\beta}(j\omega'') = \varepsilon_{\alpha\beta}(j\omega'') \tag{3.7}$$

con lo que se demuestra la afirmación que hicimos.

De las correlaciones (3.6) también vemos que si con las frecuencias reales la magnitud $\varepsilon''_{\alpha\beta}(\omega)$ tiene un signo con todas las $\omega > 0$, con $\omega < 0$ la función $\varepsilon''_{\alpha\beta}(\omega)$ tendrá en todo lugar en el semieje real negativo el signo contrario.

Como veremos más adelante, en el § 7, en un medio isótropo, sin propiedades magnéticas, que se halla en equilibrio termodinámico, la magnitud $\varepsilon''(\omega)$ posee la propiedad: $\varepsilon''(\omega > 0) > 0$. De este modo, entonces

$$\varepsilon''(\omega > 0) > 0 \qquad \text{y} \qquad \varepsilon''(\omega < 0) < 0. \tag{3.8}$$

Establezcamos ahora la asintótica de baja frecuencia de la función $\varepsilon(\omega)$. Con pequeñas frecuencias, en los dieléctricos, $\varepsilon(\omega)$ tiende al valor estático $\varepsilon(\omega = 0) = \varepsilon_0$. En los medios conductores, la asintótica de baja frecuencia tiene otro aspecto; puede establecerse partiendo de los siguientes razonamientos.

En un medio conductor, a bajas frecuencias, la corriente inducida y la óhmica es una misma corriente. Por ello, en correspondencia con la fórmula (2.23), la imagen de Fourier del vector de la inducción eléctrica tiene la forma

$$\vec{\mathscr{D}}(\omega) = \boldsymbol{E}(\omega) + 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{+i\omega t} \int_{-\infty}^{t} dt' \sigma \boldsymbol{E}(t'). \tag{3.9}$$

Aquí, ha sido utilizada la fórmula habitual para la densidad de corriente $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$ en la que la conductividad σ a bajas frecuencias coincide con la con-

ductividad estática. Poniendo en el sumando integral de la fórmula (3.9) el desarrollo de $E(t')$ en la integral de Fourier

$$E(t') = -\frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 E(\omega_1) e^{-i\omega_1 t'}$$

y cambiando el orden de integración en la integral triple obtenida, tendremos:

$$\vec{\mathscr{D}}(\omega) = E(\omega) - 4\pi \frac{\sigma}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega_1}{\omega_1} E(\omega_1)\delta(\omega_1 - \omega) = \left(1 + \frac{4\pi i\sigma}{\omega}\right) E(\omega). \quad (3.10)$$

Al deducir esta fórmula hicimos uso de la representación integral de la función delta (Comp. IV. 21):

$$\delta(\omega - \omega_1) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i(\omega - \omega_1)t}.$$

Con $\omega \to 0$, cuando $4\pi\sigma/\omega \gg 1$, la constante dieléctrica

$$\varepsilon(\omega) \to 4\pi j\sigma/\omega. \quad (3.11)$$

Así, pues, de (3.6) y (3.11) sigue que con pequeñas ω el desarrollo de $\varepsilon'_{\alpha\beta}(\omega)$ en la serie de Taylor por los exponentes de ω comienza por la constante $\varepsilon'_{\alpha\beta}(0)$ y sólo contiene los exponentes pares de ω. El desarrollo de $\varepsilon''_{\alpha\beta}(\omega)$ en los medios conductores comienza por término lineal por ω y sólo contiene los exponentes impares de ω. En tales medios $\varepsilon'' \to 0$ con $\omega \to 0$. En los medios conductores el desarrollo de $\varepsilon''(\omega)$ recuerda el desarrollo en la serie de Laurent y comienza por el término $4\pi\sigma/\omega$.

A diferencia de la asintótica de la función $\varepsilon(\omega)$ con pequeñas ω, que es distinta en diversos medios, la asintótica de alta frecuencia de ε es igual para todos los medios. Esto se debe a que con frecuencias muy altas el recorrido l_T, cubierto por las partículas en el período de variación del campo, es pequeño en comparación con las dimensiones características de las partículas en el campo propio de la sustancia. Por esto, el indicado campo (que puede ser, p. ej., el de los núcleos atómicos junto a los que se mueven los electrones) no ejerce notoria influencia sobre las partículas en los sectores de sus trayectorias de un orden de la longitud l_T y el movimiento de semejantes partículas en un campo de alta frecuencia puede considerarse como el de partículas libres. Debido a esto, la ecuación de movimiento de la partícula en un campo monocromático de alta frecuencia tiene la forma

$$m\ddot{r} = eE_0 e^{-i\omega t}, \quad (3.12)$$

aquí E_0 es la amplitud del campo de alta frecuencia. Al integrar esta ecuación, obtenemos:

para la velocidad

$$\mathbf{v} = j\frac{eE_0}{m\omega}\,e^{-i\omega t},$$

para la densidad de corriente

$$j = en\mathbf{v} = j\frac{e^2nE_0e^{-i\omega t}}{m\omega}, \tag{3.13}$$

donde n es la concentración de las partículas cargadas. Para simplificar todas ellas se consideran iguales.

Como en el denominador del segundo miembro de (3.13) entra la masa, es suficiente tener en cuenta sólo las partículas más ligeras. Casi siempre, éstas son los electrones. De las fórmulas (2.24) y (3.13) se desprende, que

$$\vec{\mathscr{P}} = \int^t j\,dt,$$

por lo que

$$\vec{\mathscr{P}} = -\frac{e^2n}{m\omega^2}E,$$

$$\vec{\mathscr{D}} = E + 4\pi\vec{\mathscr{P}} = \left(1 - \frac{4\pi ne^2}{m\omega^2}\right)E.$$

De aquí hallamos

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2, \tag{3.14}$$

donde $\omega_p = \sqrt{4\pi ne^2/m}$ es una importante característica de la sustancia llamada *frecuencia de plasma*.

Para la concentración de electrones, $n \sim 10^{22} \ldots 10^{23}$ cm^{-3}, característica para los sólidos, la frecuencia de plasma alcanza un orden de 10^{16} s^{-1} lo que corresponde a la región ultravioleta del espectro. En otros medios ella puede ser algo menor. P. ej., con las concentraciones de portadores de la carga, características para los semiconductores, en la banda de conducción la frecuencia de plasma puede encontrarse en la región infrarroja. En el caso del plasma de laboratorio la frecuencia ω_p es posible que se halle en la gama de frecuencias superelevadas.

Al deducir la fórmula (3.14) no hemos tenido en cuenta la disipación de la energía de las partículas en movimiento. Cuando se toman en consideración los choques de las partículas, esto conduce a la aparición en la ecuación de movimiento de la "fuerza de rozamiento" para cada partícula, por lo que la ecuación toma la forma

$$m\ddot{\mathbf{r}} = eE_0e^{-i\omega t} - 2\nu\dot{\mathbf{r}}.$$

La solución de esta ecuación nos lleva a la expresión para la corriente de electrones de una densidad

$$j = \frac{ie^2\omega nE}{m(\omega^2 + 2i\nu\omega)}.$$

Así, pues, con $\omega \gg \nu$ la constante dieléctrica compleja adquiere el aspecto

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega + i\nu)^2}. \tag{3.15}$$

La frecuencia ν recibe la denominación de frecuencia eficaz de los choques de electrones en vibración. El aspecto de la función $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ se aduce en la fig. 3.1. Con $\omega = \omega_p$ la función $\varepsilon(\omega)$ pasa por el cero.

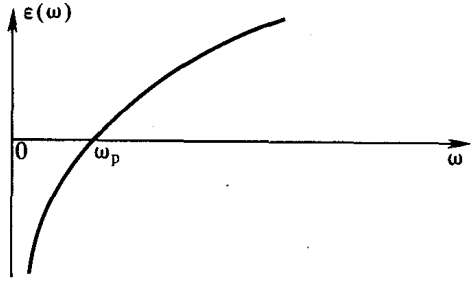

Fig. 3.1

3.3. Propiedades de la constante dieléctrica con valores complejos de la frecuencia. Son de gran importancia aquellas propiedades de la función $\varepsilon(\omega)$ que se manifiestan cuando a la frecuencia ω son atribuidos valores complejos. La cuestión radica en que la variación rigurosamente armónica del campo en el tiempo es más bien una abstracción que una realidad. De hecho, todo campo es la superposición de una serie de armónicas; con frecuencia el campo es la superposición de campos armónicos de un extenso espectro. Pero sólo en el caso de un campo rigurosamente monocromático la constante dieléctrica compleja $\varepsilon(\omega)$ liga directamente la inducción eléctrica y la intensidad del campo. Con mucha mayor frecuencia las magnitudes físicas se expresan mediante las integrales por la frecuencia, en cuyos integrandos estará la constante dieléctrica compleja y cuyas propiedades analíticas determinan tanto importantes singularidades físicas de la resolución del problema, como también las posibilidades reales de calcular las correspondientes integrales.

Lo más importante de las propiedades análiticas de la función $\varepsilon(\omega)$ consiste en que ella no tiene singularidades en el semiplano superior de la variable compleja ω. En efecto, con la frecuencia compleja $\omega = \omega' + i\omega''$ el exponente del integrando de la fórmula (3.4) toma la forma $\exp[(i\omega' - \omega'')\tau]$. Como $\tau > 0$, con $\omega'' > 0$, el factor $\exp(-\omega''\tau)$ asegura la rápida convergencia de la integral. Y a la inversa, en el semiplano inferior de la variable compleja ω, el indicado exponente puede crecer de manera limitada, lo que corresponde a la aparición de singularidades de la función $\varepsilon(\omega)$. La analiticidad de la integral en (3.4) está ligada en el semiplano superior de ω con la condición $\tau \geqslant 0$. Esta última condición es una consecuencia de que

la respuesta del sistema, en el momento de tiempo t, se determina por el efecto sobre él de los campos $E(t')$, tales que $t' \leqslant t$. Por esta razón, podemos decir que la analiticidad de la constante dieléctrica compleja $\varepsilon(\omega)$ en el semiplano superior de la variable ω es un corolario directo del principio de causalidad.

La función $\varepsilon(\omega)$ en el semiplano superior de la variable ω tampoco tiene ceros. Para cerciorarnos de esto examinemos la integral

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F'(\omega)}{F(\omega)}\, d\omega \tag{3.16}$$

en cuyo integrando se encuentra

$$F(\omega) = \varepsilon(\omega) - A, \tag{3.17}$$

donde A es cierto número real. La integración en (3.16) llévase a cabo por el contorno representado en la fig. 3.2.

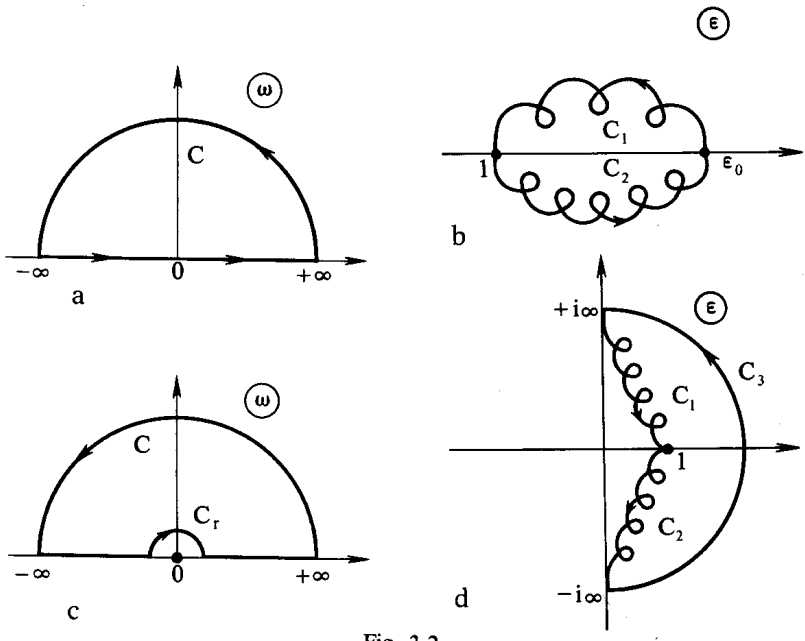

Fig. 3.2

Como sabemos de la teoría de la función de una variable compleja, la integral de J es igual a la diferencia entre el número de ceros y números de "+" de la función $F(\omega)$. Esta última, determinada con la fórmula (3.16), siendo $\omega'' > 0$, no tiene "+", por lo que la integral de J sólo es igual al número de ceros. En la integral de (3.16) pasemos a la nueva variable ε. Entonces

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\varepsilon/d\omega}{\varepsilon(\omega) - A}\, d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon - A}. \tag{3.18}$$

El contorno C' en el plano ε es la transformación del contorno C en el plano ε. El arco del gran círculo del contorno C, con semejante transformación, se concentra en el punto $\varepsilon = 1$. Esto corresponde a la fórmula asintótica (3.14) y es corolario del sencillo hecho de que con $\omega \to \infty$ un sistema de partículas de masa finita no puede experimentar ninguna clase de movimiento, por lo que el momento dipolar inducido tenderá a cero. Durante la transformación, el punto $\omega = 0$ pasará al punto $\varepsilon(\omega = 0) = \varepsilon_0$. Esto es válido para los medios no conductores (los rasgos específicos de los medios conductores serán tomados en consideración más abajo). Las partes del contorno C, que van a lo largo del eje real, se transforman en curvas continuas (representadas en la fig. 3.2, *b* de forma simbólica en forma de las curvas C_1 y C_2). La curva C_1 corresponde al semeieje derecho en el plano ω. De acuerdo con (3.8) ella sobrepasa el eje real por arriba; la curva C_2 corresponde al semieje izquierdo y, en concordancia con (3.8), sobrepasa el eje real por abajo.

De acuerdo con la teoría de los residuos, la integral de (3.18) es igual a uno si $1 < A < \varepsilon_0$ y nula, con otros valores de A. De aquí sigue si con $\omega'' > 0$ existieran ceros de la función $\varepsilon(\omega)$, en correspondencia con la integral en el miembro medio de (3.18), la integral de J tampoco sería igual a cero, incluso con $A = 0$. Como $J \neq 0$ sólo si $A > 1$, la función $\varepsilon(\omega)$ no tiene ceros con $\omega'' > 0$. De la condición $J = 1$ también se desprende que en el eje imaginario en el semiplano superior, la variable $\varepsilon(\omega)$ es una función monótona de ω''. En realidad, a cada número A sólo corresponde un cero de la diferencia $\varepsilon(\omega) - A$. Si $\varepsilon(\omega'')$ no fuese una función monótona de ω'', la ecuación $\varepsilon(\omega'') - A = 0$ tendría más de una raíz con A arbitrario.

La afirmación sobre la carencia de cero de la función $\varepsilon(\omega)$ con $\omega'' > 0$ es también válida para los medios conductores, pero con el fin de cerciorarnos de esto, hay que tener en cuenta las singularidades de la función $\varepsilon(\omega)$ con $\omega \to 0$. De acuerdo con (3.11), siendo $\omega = 0$, la función $\varepsilon(\omega)$ tiene "+" que en la integral de (3.16) debe circular como se muestra en la fig. 3.2, *c*. Durante la transformación del contorno C en el plano ε, el arco de pequeño radio pasa al arco C_3 de gran radio, representado en la fig. 3.2, *d*. Los contornos C_1 y C_2 en la fig. 3.2, *d*, que con $\varepsilon = 1$ tienen un punto común, ya no tienen ahora el segundo punto común y empiezan y terminan, respectivamente, en los puntos $+i\infty$ y $-i\infty$. De la segunda integral en (3.17) ahora se desprende que $J = 1$ con $A > 1$ y $J = 0$ con $A < 1$. Ya que $J = 0$ al ser $A = 0$, la función $\varepsilon(\omega)$ no tiene ceros en el semiplano superior.

Además de las indicadas, la función $\varepsilon(\omega)$ posee, asimismo, otras propiedades analíticas. En particular, en el entorno del eje real puede tener puntos de ramificación. No obstante, el establecimiento de estas propiedades requiere el conocimiento del género de la función $f(\tau)$ que sólo puede ser hallado si se ha adoptado un modelo determinado del medio.

La existencia de la dispersión temporal de la constante dieléctrica está, en esencia, condicionada porque la respuesta del medio se retarda y deter-

mina por el campo no sólo en el momento de tiempo dado, sino también en todos los momentos precedentes de tiempo. El parámetro que permite apreciar el grado de existencia de la dispersión temporal es ω/ω_0, es decir, la razón entre la frecuencia del campo y las frecuencias propias características de movimiento de las cargas en el medio.

El medio puede tener varias frecuencias ω_0. Por lo visto, la más importante de ellas es la frecuencia de movimiento de los electrones en longitudes de la escala atómica, con ello la frecuencia $\omega_0 \approx 10^{15} \ldots 10^{16}\ s^{-1}$. La dispersión es de importancia si $\omega/\omega_0 \gtrsim 1$, lo que corresponde a las frecuencias ópticas y a la radiación ultravioleta. Sin embargo, por regla, el medio puede tener frecuencias ω_0 mucho menores que la frecuencia de la escala atómica. En particular, a causa de la masa comparativamente grande de los núcleos atómicos, las frecuencias características de movimiento de éstos en la red cristalina tienen un orden de $10^{13}\ s^{-1}$, lo que corresponde a la región infrarroja del espectro. Como frecuencias características pueden también actuar las frecuencias de los movimientos colectivos de los electrones. El orden del valor de las correspondientes frecuencias ω_0 depende de la concentración de las partículas en la sustancia (p. ej., en el plasma) y puede variar en amplios límites. Serán muy bajas las frecuencias propias que describen los movimientos característicos en buenos materiales magnéticos.

§ 4. Tensor de la constante dieléctrica compleja. Dispersión espacial.

La ligazón entre el efecto del campo y la respuesta del medio no sólo es integral en el tiempo. Ya hemos señalado que dicha ligazón puede no ser local, es decir, la respuesta del sistema en cierto punto puede determinarse no sólo por la intensidad de los campos en el punto indicado, sino también con los campos en el entorno del punto dado. A esto corresponde la integral por el volumen en la correlación (3.1). Semejante ligazón no local suele ser llamada *dispersión espacial*. Si nos limitamos al más importante caso de medios espaciales homogéneos, el núcleo de la correlación integral (3.1) sólo dependerá de la diferencia de las coordenadas $r - r'$, así que la ligazón integral

$$\mathscr{D}_\alpha(r, \omega) = \int \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, r - r')E_\beta(r', \omega)dV' \tag{4.1}$$

después de la transformación de Fourier, como en el caso de la dispersión temporal, se convertirá en la ligazón algebraica de la forma

$$\mathscr{D}_\alpha(k, \omega) = \varepsilon_{\alpha\beta}(k, \omega)E_\beta(k, \omega). \tag{4.2}$$

La transición de (4.1) a (4.2) se ha realizado con ayuda de la transformación de Fourier:

$$A(r) = \int A(k)e^{+ikr}d^3k,$$

$$A(k) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int A(r)e^{-ikr}dV. \tag{4.3}$$

Si la ligazón entre la respuesta y el campo fuera local, el núcleo de la correlación integral (4.1) se reduciría a la función delta:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, r - r') \to a_{\alpha\beta}(\omega)\delta(r - r').$$

En este caso, la función $\varepsilon_{\alpha\beta}(k, \omega)$, como sigue de (4.3), no dependería de k y podríamos escribirla en forma de la función de una sola frecuencia, haciendo k en ella igual a cero. Así, pues, el paso al límite $\varepsilon(k, \omega) \to \varepsilon(0, \omega)$ corresponde al caso cuando la dispersión espacial se desprecia, mientras que cuando se toma en consideración la dependencia entre ε y k, al carácter no local de la ligazón entre el campo y la respuesta del medio.

Hasta qué punto la dispersión espacial es sustancial, se determina con el parámetro kl, en el que k es el vector de onda del campo que figuraba en (4.2), l, la escala espacial característica del movimiento de las partículas del medio. P. ej., como l podemos tomar la longitud del recorrido libre de las partículas en un sólido o bien en el plasma. El valor de l puede alcanzar el orden de las dimensiones de los elementos estructurales del medio o del recorrido que cubren las partículas de éste en transcurso del período de variación del campo. Es preciso tener en cuenta la dispersión espacial si $kl \gtrsim \gtrsim 1$. Esto significa que las partículas están en movimiento en un campo sustancialmente no homogéneo.

Hay pocos problemas físicos en los que se cumple la condición $kl > 1$. En este sentido, tenemos la posibilidad de indicar que los efectos de la dispersión espacial son de menor importancia que los de la dispersión temporal, ya que la condición $\omega/\omega_0 \gtrsim 1$ se alcanza con mayor facilidad. Pero, a pesar de todo, los efectos de la dispersión espacial existen. Incluso, alguno de ellos, tiene significado de principio (p. ej., el efecto de pantalla que será estudiado en el § 6). En el presente parágrafo vamos a aclarar qué variaciones de principio en la descripción de los fenómenos electromagnéticos en un medio isótropo provoca el registro de la dispersión espacial, así como qué significa no sólo la descripción de las propiedades eléctricas de la sustancia, sino también de las magnéticas, mediante la sola ecuación material (2.28).

En un medio isótropo con dispersión espacial la constante dieléctrica, determinada con la correlación (2.28) no será, obligatoriamente, una magnitud escalar. En un medio isótropo sin dispersión espacial en la ecuación material (2.28) sólo es posible que figuren los vectores del campo. Como en electrodinámica lineal la constante dieléctrica $\hat{\varepsilon}$ no puede depender de los vectores del campo, la magnitud $\hat{\varepsilon}$, en la que no se toma en consideración la dispersión espacial, solamente puede ser, en este caso, escalar.

La cuestión varía cuando aparece la dependencia entre ε y k. La existencia de tal dependencia no sólo quiere decir que $\hat{\varepsilon}$ se ha convertido en función del vector k, sino que también da la posibilidad de formar un tensor de las componentes del vector k. Ya que el tensor es una magnitud cuyos com-

ponentes se transforman como el producto de vectores, podemos formar un tensor del género*) $k_\alpha k_\beta/k^2$.

La dependencia entre $\hat{\varepsilon}$ y $k_\alpha k_\beta/k^2$ no contradice la linealidad de la teoría. Ahora, despreciando los tensores de los rangos más altos que el segundo, la magnitud $\hat{\varepsilon}$ se puede escribir en la forma

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(k, \omega) = A_1(k, \omega)\delta_{\alpha\beta} + A_2(k, \omega)k_\alpha k_\beta/k^2,$$

donde A_1 y A_2 son ciertos coeficientes que dependen de $|k|$ y de la frecuencia ω. Semejante forma de la constante dieléctrica significa, que

$$\vec{\mathscr{D}} = A_1 E + A_2 k(k \cdot E)/k^2. \tag{4.4}$$

Aclaremos el sentido de las magnitudes escalares A_1 y A_2. Supongamos que $E \perp k$, o sea, $k \cdot E = 0$. Entonces, la ecuación (4.4) tomará la forma $\mathscr{D} = A_1 E$, describiendo el coeficiente A_1 la respuesta del medio al campo transversal y, por ello, es natural designarlo con $\varepsilon^{tr}(k, \omega)$. Cuando el campo es longitudinal, la ligazón (4.4) proporciona: $\mathscr{D} = (A_1 + A_2)E$. Con esto, la magnitud $A_1 + A_2$ debe considerarse como constante dieléctrica longitudinal $\varepsilon^l(k, \omega)$.

De este modo, la correlación (4.4) resulta ser equivalente a la fórmula

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(k, \omega) = \varepsilon^{tr}(k, \omega)\delta_{\alpha\beta} + [\varepsilon^l(k, \omega) - \varepsilon^{tr}(k, \omega)]k_\alpha k_\beta/k^2.$$

Después de la reordenación de los términos que entran en la anterior correlación, damos a ella la forma

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(k, \omega) = \varepsilon^{tr}(k, \omega)[\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta/k^2] + \varepsilon^l(k, \omega)k_\alpha k_\beta/k^2. \tag{4.5}$$

Como vemos en la fórmula (4.5) la presencia de la dispersión espacial conduce a que la respuesta del medio al campo longitudinal y transversal se determina, respectivamente, con las permitividades longitudinal y transversal.

Ahora, aclaremos el sentido físico de la diferencia entre las variables $\varepsilon^l(k, \omega)$ y $\varepsilon^{tr}(k, \omega)$. Para ello, comparemos dos sistemas equivalentes de ecuaciones del campo en un medio isótropo: los sistemas (2.18) y (2.27). Realicemos la transformación de Fourier para cada una de las ecuaciones de los dos sistemas pasando, de esta manera, del par de variables r y t al par de nuevas variables k y ω.

Después de la transformación de Fourier (con ello, hay que tomar también en consideración las ecuaciones materiales que completan este sistema

*) El único tensor de II rango que consta de los componentes del vector k.

de ecuaciones del campo), el sistema (2.18) tomará el aspecto:

$$\begin{aligned} k \times E &= \frac{\omega}{c} B, \\ \frac{i}{\mu} k \times B &= -\frac{i\omega}{c} \varepsilon E + \frac{4\pi}{c} j_{\text{ext}}, \\ k \cdot B &= 0, \\ ik \cdot E\varepsilon &= 4\pi \rho_{\text{ext}}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Todas las variables que entran en este sistema, incluidas ε, μ, j_{ext} y ρ_{ext}, son funciones de k y ω, con la particularidad de que en un medio isótropo las variables ε y μ son escalares.

Después de las transformaciones de Fourier, el sistema (2.27) adquiere la forma:

$$\begin{aligned} k \times E &= \frac{\omega}{c} B, \\ ik \times B &= -i \frac{\omega}{c} \left\{ \left[E - \frac{k(k \cdot E)}{k^2} \right] \varepsilon^{\text{tr}} + \right. \\ &\left. + \frac{k(k \cdot E)}{k^2} \varepsilon^{l} \right\} + \frac{4\pi}{c} j_{\text{ext}}, \\ k \cdot B &= 0, \\ ik \cdot E\varepsilon^{l} &= 4\pi \rho_{\text{ext}}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Comparando las últimas ecuaciones de estos dos sistemas, vemos que

$$\varepsilon^{l}(k, \omega) = \varepsilon(k, \omega). \tag{4.8}$$

Ahora, sustrayamos de la segunda ecuación de (4.7) la correspondiente ecuación del sistema (4.6); entonces, el componente alfa de la expresión de diferencias, tomará el aspecto

$$i\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)(k \times B)_{\alpha} = -\frac{i\omega}{c} E_{\beta} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2} \right) (\varepsilon^{\text{tr}} - \varepsilon^{l}).$$

El vector B, contenido en el primer miembro de esta ecuación, con ayuda de la correlación $k \times E = (\omega/c)B$, puede expresarse mediante el vector E. Abriendo el producto vectorial, que con ello hemos obtenido, y simplificando por E los dos miembros, obtenemos la correlación entre los componentes de Fourier de la constante dieléctrica y la permeabilidad magnética:

$$\mu(k, \omega) = \{1 - (\omega/ck)^2 [\varepsilon^{\text{tr}}(k, \omega) - \varepsilon^{l}(k, \omega)]\}^{-1}. \tag{4.9}$$

Por primera vez, la fórmula (4.9) fue confeccionada por Lindhard. De esta fórmula sigue que la diferencia entre ε^{tr} y ε^{l} está condicionada por las propiedades magnéticas del medio. Así, pues, para todas las $\omega \neq 0$, en tanto que el vector B puede expresarse mediante el vector E con la fórmula $B = -c \int \text{rot} E \, dt$, para la descripción total tanto de las propiedades magnéti-

cas, como de las eléctricas, es suficiente conocer 2 variables: las constantes dieléctricas ε^l y ε^{tr} dependientes de k y ω. Para $\omega = 0$ no es posible expresar el vector B mediante E, por lo que en tal caso, para describir las propiedades electromagnéticas de medios homogéneos es preciso conocer $\varepsilon^l(k, 0)$ y la permeabilidad magnética $\mu(k)$, que sólo depende del vector de onda. Por lo tanto, con todos los procedimientos de descripción de las propiedades electromagnéticas de los medios, hay que conocer dos características del medio.

Aduzcamos una fórmula más, útil en el futuro, que proporcionará la expresión del tensor $\varepsilon_{\alpha\beta}(k, \omega)$ en un medio isótropo mediante la permeabilidad eléctrica y la permeabilidad magnética corrientes (será obtenida con ayuda de (4.5), (4.8) y (4.9)):

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon\delta_{\alpha\beta} + \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right). \tag{4.10}$$

El tensor $\varepsilon_{\alpha\beta}(k, \omega)$, por definición, posee las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}(k, \omega) &= \varepsilon_{\alpha\beta}(-k, -\omega), \\ \varepsilon'_{\alpha\beta}(k, \omega) &= \varepsilon'_{\alpha\beta}(-k, -\omega), \\ \varepsilon''_{\alpha\beta}(k, \omega) &= \varepsilon''_{\alpha\beta}(-k, -\omega). \end{aligned} \tag{4.11}$$

De estas fórmulas se desprende, que

$$\begin{aligned} \varepsilon^{l\prime}(k, \omega) &= \varepsilon^{l\prime}(k, -\omega), \qquad \varepsilon^{l\prime\prime}(k, \omega) = -\varepsilon^{l\prime\prime}(k, -\omega), \\ \varepsilon^{tr\prime}(k, \omega) &= \varepsilon^{tr\prime}(k, -\omega), \qquad \varepsilon^{tr\prime\prime}(k, \omega) = -\varepsilon^{tr\prime\prime}(k, -\omega), \end{aligned} \tag{4.12}$$

es decir, las partes reales de las variables ε^l y ε^{tr} son funciones pares de la frecuencia, mientras que las partes imaginarias, funciones impares de la frecuencia.

§ 5. Relaciones de Kramers — Krönig

La analiticidad de la función $\varepsilon(\omega)$ en el semiplano superior de la variable compleja $\omega = \omega' + i\omega''$ significa que las partes real e imaginaria de la constante dieléctrica $\varepsilon(\omega)$ no son independientes. Están ligadas entre sí con fórmulas que llevan el nombre de relaciones de Cauchy — Rieman

$$\frac{\partial\varepsilon'(\omega)}{\partial\omega'} = \frac{\partial\varepsilon''(\omega)}{\partial\omega''}, \qquad \frac{\partial\varepsilon'(\omega)}{\partial\omega''} = -\frac{\partial\varepsilon''(\omega)}{\partial\omega'}. \tag{5.1}$$

Por regla, en los experimentos las variables ε' y ε'' son medidas como funciones de la frecuencia real, por lo que la ligazón entre ellas se escribe con comodidad en otra forma: como integrales por las frecuencias reales. Semejante ligazón puede obtenerse con ayuda de la fórmula integral de Cauchy. De acuerdo con ella, la integral por el contorno cerrado Γ, que acota la región dentro de la que cierta función $f(\omega)$ es analítica, se reduce a

cierta función f tomada en cierto punto ω del contorno Γ:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\omega_1)d\omega_1}{\omega_1-\omega}=\begin{cases}f(\omega), \text{ si } \omega \text{ está dentro del contorno,}\\ 0, \text{ si } \omega \text{ está fuera del contorno.}\end{cases}$$

Si el punto ω yace en el contorno de integración, la fórmula de Cauchy tiene el aspecto

$$f(\omega)=\frac{1}{\pi i}\int\frac{f(\omega_1)d\omega_1}{\omega_1-\omega}. \tag{5.2}$$

El símbolo $\int$ designa una integral que se entenderá en el sentido del valor principal.

Como función $f(\omega)$, analítica en todo lugar en el semiplano superior de ω (puede ser salvo los puntos del eje real), elijamos la función

$$f(\omega)=\varepsilon(\omega)-1,$$

mientras que trazamos el contorno Γ de la forma mostrada en la fig. 5.1. Dicho contorno consta de dos partes: el sector que va a lo largo del eje real

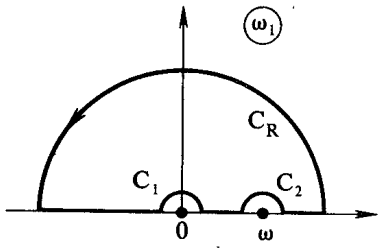

Fig. 5.1

pasando por los puntos $\omega_1=0$ y $\omega_1=\omega$ y del arco C_R del círculo grande, cuyo radio tiende al infinito. Como dentro del contorno Γ ho hay singularidades, la integral de Cauchy es nula:

$$\oint\frac{\varepsilon(\omega_1)-1}{\omega_1-\omega}d\omega_1=0. \tag{5.3}$$

La aportación a esta integral del sector del contorno C_R es igual a cero, ya que en el arco de radio grande el integrando en (5.3) tiende a cero con mayor rapidez que $1/\omega_1$. Esto se desprende de la forma de la función $\varepsilon(\omega)$ con grandes frecuencias. En correspondencia con (3.14) $\varepsilon(\omega)-1\sim-\omega_p^2/\omega^2$ y el integrando en (5.3), en el sector del contorno C_R, con $|\omega|\to\infty$ se comporta como $1/\omega^3$. Por esta razón, la integral por el arco de radio grande tiende a cero. Queda la aportación del sector del contorno que va a lo largo del eje real, así como del recorrido de las singularidades del integrando con $\omega_1=\omega$ y $\omega_1=0$. La última singularidad está relacionada con la conducta de la función $\varepsilon(\omega)$ en los medios conductores con $\omega\to 0$ (véase la fórmula

(3.11)). El recorrido de estas dos singularidades proporciona, respectivamente, aportación en la integral (5.3):

$$i\pi[\varepsilon(\omega) - 1] \qquad \text{y} \qquad -4\pi^2\sigma/\omega.$$

Así, pues, (5.3) toma la forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon(\omega_1) - 1}{\omega_1 - \omega} d\omega_1 - i\pi[\varepsilon(\omega) - 1] - \frac{4\pi^2\sigma}{\omega} = 0.$$

Separando en esta fórmula las partes real e imaginaria, obtenemos

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon''(\omega)}{\omega_1 - \omega} d\omega_1, \tag{5.4a}$$

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{4\pi\sigma}{\omega} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon'(\omega_1) - 1}{\omega_1 - \omega} d\omega_1. \tag{5.4b}$$

Estas fórmulas que ligan $\varepsilon'(\dot{\omega})$ y $\varepsilon''(\ddot{\omega})$ son denominadas *relaciones de dispersión* o bien *relaciones de Kramers — Krönig.*

Las fórmulas (5.4) pueden escribirse de forma que la integración por ω_1 sólo se realice por las frecuencias positivas. Dividiendo el contorno de integración en dos sectores, desde $-\infty$ hasta 0 y desde 0 hasta $+\infty$, introduciendo en la primera de las dos integrales una nueva variable de integración $\omega_1 \to -\omega_1$ y, tomando en consideración la paridad e imparidad de las funciones $\varepsilon(\dot{\omega})$ y $\varepsilon(\ddot{\omega})$, tendremos

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega_1 \varepsilon''(\ddot{\omega}_1)}{\omega_1^2 - \omega^2} d\omega_1, \tag{5.5a}$$

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{4\pi\sigma}{\omega} + \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon'(\omega_1) - 1}{\omega^2 - \omega_1^2} d\omega_1. \tag{5.5b}$$

Semejante forma de anotación de las relaciones de Kramers — Krönig es en particular cómoda durante el análisis de resultados experimentales. Las relaciones de Kramers — Krönig se utilizan en óptica para la reconstrucción de la función completa $\varepsilon(\omega)$ por sus partes real o imaginaria, medidas en el intervalo de frecuencias lo más ancho posible. La fórmula (5.5a), a veces, se escribe

$$\varepsilon'(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m} \int_0^{\infty} \frac{f(\omega_1)}{\omega^2 - \omega_1^2} d\omega_1. \tag{5.6}$$

La función $f(\omega)d\omega$, determinada con esta fórmula, lleva el nombre de fuerza del oscilador o bien número de electrones dispersos en el intervalo de frecuencias $d\omega$. Entre las funciones $f(\omega)$ y $\varepsilon''(\omega)$ existe la relación

$$f(\omega) = \frac{m\omega\varepsilon''(\omega)}{2\pi^2 e^2}. \tag{5.7}$$

El principio de causalidad es la base física de las relaciones de dispersión y las fórmulas ligadas a ellas. El carácter tensorial de la constante dieléctrica en medios anisótropos no varía las deducciones a que hemos llegado. La toma en consideración de la dispersión espacial conduce a la aparición de nuevos momentos.

La existencia de las relaciones (5.5) quiere decir que entre $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{E}$ hay nexo causal. Semejante nexo presupone que el vector $\boldsymbol{E}$ es una variable controlable que no depende de la evolución temporal de la respuesta del sistema. En algunos casos tal situación en realidad se observa. Semejante caso se verifica si en el experimento es posible mantener una diferencia constante de potencial entre ciertas regiones del espacio. De hecho, esto significa que en el transcurso de la evolución del sistema en estas regiones del espacio, de manera controlada, son adicionadas o bien se toman de ellas cargas de forma que la diferencia de potencial entre las regiones sea constantemente determinada y no dependa de la respuesta del sistema. Por lo visto, tal género de control del vector $\boldsymbol{E}$ es posible a condición de que la distancia entre las regiones del espacio con potenciales fijados, sea tan grande que la no homogeneidad del campo eléctrico, que con ello surge, no requiera la toma en consideración de la dispersión espacial. Las relaciones de Kramers — Krönig para $\varepsilon(\boldsymbol{k} = 0, \omega)$ (véase (5.5)) reflejan, precisamente, semejante situación.

La dispersión espacial se manifiesta en sistemas con variación espacial del campo suficientemente rápida. Semejante campo es difícil de controlar por el procedimiento indicado con anterioridad. Es natural crearlo introduciendo en el medio cargas extrañas, cuyo valor está fijado y no depende de la respuesta del sistema. En este caso, el campo $\boldsymbol{E}$ ya no será una variable independiente, en nexo causa-efecto, que determina la respuesta del sistema. De la ecuación $\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho_{\text{ext}}$ sigue que, en tal caso, las variables controladas serán ρ_{ext} y $\boldsymbol{D}$.

De la comparación de las imágenes de Fourier de la última ecuación de Maxwell, escrita para un medio homogéneo en la forma

$$i\varepsilon^{l}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \omega)k_\alpha E_\beta = 4\pi\rho_{\text{ext}}(\boldsymbol{k}, \omega) \tag{5.8a}$$

y en la forma

$$i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} = 4\pi\rho_{\text{t}}(\boldsymbol{k}, \omega), \tag{5.8b}$$

podemos llegar a la conclusión de que entre la densidad de las cargas extrañas ρ_{ext} y la de todas las cargas ρ_{t} (estas últimas se constituyen de las

extrañas e inducidas, de forma que $\rho_t = \rho_{ext} + \rho$) existe la relación

$$\rho_t(k, \omega) = \frac{k^2}{k_\alpha k_\beta \varepsilon^l_{\alpha\beta}(k, \omega)} \rho_{ext}(k, \omega). \tag{5.9a}$$

En un medio isótropo, esta relación tiene el aspecto:

$$\rho_t = \frac{1}{\varepsilon^l(k, \omega)} \rho_{ext}(k, \omega). \tag{5.9b}$$

Como las (2.10), las fórmulas (5.9) pueden servir de definición de la constante dieléctrica. En (5.9) la variable independiente, de acuerdo con lo dicho más arriba, debe considerarse ρ_{ext}. Esto quiere decir, que el principio de causalidad debe emplearse, en este caso, respecto de $[\varepsilon^l(k, \omega)]^{-1}$ en los medios isótropos y respecto de $k^2/k_\alpha k_\beta \varepsilon^l_{\alpha\beta}(k, \omega)$, en los anisótropos. Correspondientemente, las relaciones de Kramers — Krönig para la constante dieléctrica longitudinal, en medios isótropos toman la forma:

$$\mathrm{Re}\frac{1}{\varepsilon^l(k, \omega)} = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi^2}{\xi^2 - \omega^2} \mathrm{Im}\frac{1}{\varepsilon^l(k, \xi)}, \tag{5.10a}$$

$$\mathrm{Im}\frac{1}{\varepsilon^l(k, \omega)} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^{1/2}} \left[\mathrm{Re}\frac{1}{\varepsilon^l(k, \xi)} - 1\right] \frac{1}{\omega^2 - \xi^2}. \tag{5.10b}$$

Cuando el campo es transversal, la variable independiente será la densidad de las corrientes extrañas j_{ext}. En correspondencia con las fórmulas del § 4, P. II, el campo eléctrico, determinado por las corrientes extrañas, puede hallarse de la ecuación

$$\left\{\frac{\omega^2}{c^2}\left[\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)\varepsilon^{tr}(k, \omega) + \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\varepsilon^l(k, \omega)\right] - \right.$$

$$\left. - k^2\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)\right\} E_\beta = \frac{4\pi\omega}{c^2} (j_{ext})_\alpha.$$

De esta ecuación se desprende, que

$$E = \frac{4\pi}{\omega(\varepsilon^{tr} - c^2k^2/\omega^2)} j_{ext}.$$

Por esta causa, las relaciones de Kramers — Krönig deben tener lugar para la variable $(\varepsilon^{tr} - c^2k^2/\omega^2)^{-1}$. Cuando se tratan de ondas largas, o sea, al poder despreciar la dispersión espacial, las relaciones de Kramers — Krönig también se emplean para $\varepsilon^{tr}(k = 0, \omega)$.

§ 6. Apantallado de Debye

6.1. Potencial electrostático de una carga puntual en un medio. La capacidad de polarizarse que posee el medio conduce al debilitamiento del campo eléctrico exterior, provocado por cargas extrañas. Es de particular importancia comprender cual es, precisamente, la forma de este debilitamiento en el más sencillo de los casos, cuando el indicado campo está condicionado por una carga puntual ubicada en el medio. Este género de fenómeno de apantallado es importante para el estudio en las más diferentes ramas de física. Pero, además, tiene significado de principio en el sentido de que permite apreciar las distancias máximas que separan los objetos entre los cuales la interacción debe considerarse sustancial. El fenómeno de apantallado también es de interés desde el punto de vista de que, por un lado, muestra cómo el efecto de la dispersión espacial, débil en cierto sentido, puede conducir a fenómenos de importancia básica y, por otro lado, da la oportunidad de comprender cuál es el límite estático de la constante dieléctrica introducida en el § 4, P. II.

Como sabemos, las propiedades del campo eléctrico en el vacío se determinan con las ecuaciones $\mathrm{rot}\, E = 0$ y $\mathrm{div}\, E = 4\pi\rho$. En un medio, el campo eléctrico también se describe con la primera y última ecuaciones del sistema (2.27). Como en el vacío, la estructura de la primera ecuación permite introducir el potencial escalar φ del campo eléctrico de forma, que

$$E(r) = -\operatorname{grad}\varphi(r).$$

La imagen de Fourier de esta correlación para $\omega = 0$ es

$$E(k, 0) = ik\varphi(k, 0). \tag{6.1}$$

Por ello, la última de las ecuaciones del sistema (4.7)

$$ik \cdot E\varepsilon^l(k, \omega) = 4\pi\rho_{\text{ext}}(k, \omega)$$

en el límite estático tiene la forma

$$k^2\varepsilon^l(k, 0)\varphi(k, 0) = 4\pi\rho_{\text{ext}}(k, 0). \tag{6.2}$$

Si el campo está condicionado por una sola carga puntual que yace en el punto r_0, entonces

$$\rho_{\text{ext}}(r, t) = e\delta(r - r_0).$$

En tal caso,

$$\rho_{\text{ext}}(k, \omega) = \frac{e}{(2\pi)^2}\int \exp\left[-i(k \cdot r + \omega t)\right]\delta(r - r_0)d^3r\, dt =$$

$$= \frac{e}{2\pi}\,\delta(\omega)\exp(-ik \cdot r_0).$$

Por consiguiente, tenemos

$$\varphi(k, \omega) = 2e\frac{\exp(-ik \cdot r_0)}{k^2 \varepsilon^l(k, \omega)} \delta(\omega). \tag{6.3}$$

Realizando la transformación inversa de Fourier y, por lo tanto, retornando a las variables r y t, obtenemos

$$\varphi(r, t) = (2\pi)^{-2} \int \varphi(k, \omega) \exp[i(k \cdot r - \omega t)] d^3k\, d\omega =$$

$$= 2e(2\pi)^{-2} \int \frac{\exp[ik \cdot (r - r_0)]}{k^2 \varepsilon^l(k, 0)} d^3k. \tag{6.4}$$

Este potencial no depende del tiempo, ya que la carga está inmóvil. Si la carga se encontrara no en un medio, sino en el vacío, el potencial φ tendría el aspecto

$$\varphi(r) = \frac{2e}{(2\pi)^2} \int \frac{\exp[ik(r - r_0)]}{k^2} d^3k. \tag{6.5}$$

Es obvio que esta integral es igual a $e/|r - r_0|$. La presencia de la función $\varepsilon^l(k, 0)$, dependiente del vector de onda k, en el integrando de la fórmula (6.4), significa que la dependencia de (6.4) de las coordenadas será distinta de $e/|r - r_0|$. Con ello, hemos de remarcar que no sólo nos referimos al debilitamiento del campo sino que a la variación de su dependencia de las coordenadas. Esta circunstancia está condicionada por completo por la dependencia entre ε^l y k, o sea, por la dispersión espacial.

Con el fin de aclarar el carácter de dicha dependencia hay que apreciar, con cierta aproximación y en cualquier modelo, la forma de la función $\varepsilon^l(k, 0)$. En este parágrafo vamos a realizar esta apreciación con una aproximación sencilla e importante, es decir, cuando las partículas cargadas pueden desplazarse con libertad, chocando entre sí o con partículas de otros géneros de forma que la longitud de su recorrido libre sea mucho mayor que la característica para el problema de escala electrodinámica (o sea, la distancia a la que el campo varía de manera sustancial). La constante dieléctrica obtenida con esta aproximación recibe el nombre de permitividad del plasma homogéneo isótropo sin choques (de electrones) (indiquemos de inmediato que, hablando en general, en otro caso límite también podemos despreciar los choques, o sea, cuando la frecuencia del campo es mucho mayor que la de las colisiones). En este modelo es posible hallar una sencilla descripción cinemática del medio, basada en el análisis de la forma de la distribución $f(r, p, t)$.

De acuerdo con el teorema de Liouville, conocido en mecánica, la función de distribución de un sistema mecánico estático sin choques se determina con la ecuación

$$df/dt = 0. \tag{6.6a}$$

La igualdad a cero de la derivada total de la función de distribución también puede expresarse en forma de la fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{p}\frac{\partial f}{\partial p} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial r} = 0; \tag{6.6b}$$

aquí p es el impulso, $\dot{p}$, la fuerza $e\left(E + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times B\right)$. La ecuación (6.6b) se denomina *ecuación cinética de un sistema sin choques* o bien *ecuación de Vlásov*.

Al resolver la ecuación (6.6b) junto con las ecuaciones de Maxwell, la densidad de las cargas y de las corrientes inducidas ha de expresarse mediante la función de distribución:

$$\rho = e\int (f - f_0)d^3p, \qquad j = e\int \mathbf{v}(f - f_0)d^3p, \tag{6.7}$$

donde f_0 es la función de distribución en equilibrio, no perturbada por el campo electromagnético.

El hecho de que en las integrales de las expresiones (6.7) tengamos la diferencia $f - f_0$ quiere decir, que suponemos que en el sistema, no perturbado por el campo exterior, no hay cargas macroscópicas y corrientes. Semejante propiedad posee, precisamente, el plasma isótropo en equilibrio: debido a la cuasineutralidad y a la carencia en él de movimientos ordenados

$$\rho_0 = e\int f_0 d^3p = 0, \qquad j_0 = e\int \mathbf{v} f_0 d^3p = 0.$$

Como el plasma no perturbado por un campo exterior se considera homogéneo, la función de distribución en equilibrio f_0 sólo depende de la energía (o sea, de p^2) y no de r y t.

Designemos la diferencia $f - f_0$, es decir la función de distribución perturbada y en equilibrio, por δf. Como examinamos el problema de apantallado del campo eléctrico, $B = 0$. Vamos a estudiar el campo como la superposición de las armónicas, cada una de las cuales varía en el espacio según la ley e^{ikr} junto con su vector de onda k. Quedando en los márgenes de electrodinámica lineal, hemos de retener en la ecuación cinética (6.6b) sólo los términos lineales según el campo. A éstos se refieren los términos que contienen el producto de E por la función de distribución en equilibrio f_0 (con mayor precisión, la derivada de f_0 por los impulsos) o bien la parte no en equilibrio δf de la función de distribución. Los sumandos que contienen el producto de δf por la intensidad del campo E son términos cuadráticos según el campo, por lo que deben ser desechados. En el caso, si $E = E_0 e^{-i\omega t}$ (después, haremos que ω tienda a cero), en la aproximación lineal por E la imagen de Fourier de la ecuación cinética (6.6b) toma el aspecto

$$-i\omega\delta f + ik\cdot\mathbf{v}\delta f + eE\cdot\frac{\partial f_0}{\partial p} = 0. \tag{6.8}$$

La solución de esta ecuación será

$$\delta f = -\frac{ieE}{\omega - \mathbf{kv}} \frac{\partial f_0}{\partial p}. \tag{6.9}$$

Poniendo la expresión (6.9) en la fórmula para la densidad de corriente, obtenemos

$$j_\alpha = -ie^2 \int \frac{v_\alpha E_\beta}{\omega - \mathbf{kv}} \frac{\partial f_0}{\partial p_\beta} d^3p. \tag{6.10}$$

Recordemos que el tensor de la constante dieléctrica $\varepsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \omega)$ está ligado con el tensor de conductividad $\sigma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \omega)$ con la correlación

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi i \sigma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \omega)}{\omega}.$$

Entonces

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi i}{\omega}\left\{-ie^2 \int \frac{v_\alpha}{\omega - \mathbf{kv}} \frac{\partial f_0}{\partial p_\beta} d^3p\right\} =$$

$$= \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi e^2}{\omega} \int \frac{v_\alpha}{\omega - \mathbf{kv}} \frac{\partial f_0}{\partial p_\beta} d^3p. \tag{6.11}$$

6.2. Radio de Debye. El integrando de (6.11) contiene un polo que debe ser recorrido, como siempre, cuando existen singularidades en la expresión subintegral. La regla del recorrido se establece partiendo del siguiente razonamiento. Todo campo que consideramos continuo en el tiempo, en realidad, no existe infinitamente. Él aparece con $t \to -\infty$. Por ello, con $t \to -\infty$ la parte de no equilibrio δf de la función de distribución tiende a cero. Esto sucederá si $\delta f \sim e^{-i\omega t}$, con la particularidad de que la frecuencia ω tiene una parte imaginaria s infinitamente pequeña, es decir, $\omega \to \omega + is$ y $s \to +0$. Con otras palabras, el denominador de la integral en (6.11) debe entenderse como $\omega + is - \mathbf{kv}$. Con ello, el polo no yace en el eje real, por el que se realiza la integración, sino a una distancia s de él, lo que es equivalente a la prefijación de la regla de recorrido de dicho polo.

Este mismo resultado puede ser obtenido de otra manera. Con este fin, en la ecuación cinética (6.6b) hay que tener en cuenta la existencia de choques, para lo que en las fórmulas finales es preciso hacer que la frecuencia de los choques ν tienda a cero. Al haber choques, la ecuación cinemática toma el aspecto

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{p}} \frac{\partial f}{\partial p} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial r} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{ch}}.$$

El sumando a la derecha, llamado término de choque, toma en consideración la influencia del choque sobre la función de distribución. En la varian-

te más sencilla, el término de choque puede ser escrito en la forma

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{ch}} = -\nu(f - f_0).$$

La variable ν se denomina frecuencia de los choques (correspondientemente, $\tau = \nu^{-1}$ recibe el nombre de tiempo de relajación). De este modo, con la aproximación del tiempo de relajación, la ecuación cinética será

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{p}}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} = -\frac{f - f_0}{\tau}.$$

La solución de esta ecuación coincide con (6.10), si en ésta sustituimos la frecuencia ω por $\omega + i\nu$. Así, pues, la frecuencia de los choques ν desempeña el mismo papel que el parámetro s al determinar la regla de recorrido del polo en (6.11).

De acuerdo con (4.5), la expresión (6.11) contiene información tanto acerca de la variable ε^l, como sobre ε^{tr}. Para estudiar el fenómeno de apantallado del campo de una carga coulombiana, con la que el campo transversal no está relacionado de ningún modo, de (6.11) podemos destacar la función $\varepsilon^l(\boldsymbol{k}, \omega)$. Multiplicando (4.5) por $k_\alpha k_\beta$ nos cercioramos de que

$$\varepsilon^l(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\,\varepsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \omega).$$

Con esta fórmula de (6.11), obtenemos:

$$\varepsilon^l(\boldsymbol{k}, \omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{k^2\omega}\int \frac{k_\alpha k_\beta v_\alpha v_\beta}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\mathbf{v}}\frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}}d^3p. \qquad (6.11a)$$

Aquí hemos utilizado la posibilidad de representar la derivada de la función de distribución por la componente beta del impulso en la forma

$$\frac{\partial f_0}{\partial p_\beta} = \frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}}\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial p_\beta} = v_\beta\frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}},$$

donde $\mathscr{E}$ es la energía, argumento de la función de distribución en equilibrio.

Examinemos el límite al que tiende $\varepsilon^l(\boldsymbol{k}, \omega)$ con $\omega \to 0$. Si hiciéramos que, primero, $\boldsymbol{k}$ tendiera a cero y, después, ω, o sea, pasando al límite

$$\varepsilon^l(\omega \to 0, k/\omega \to 0),$$

el límite de la variable ε^l sería el infinito. El sentido físico de este infinito está completamente claro. Este resultado corresponde a una conductividad infinitamente grande de un gas de partículas cargadas libres, que no sufren choques, en un campo eléctrico continuo homogéneo.

Otro resultado obtendríamos en el límite $\boldsymbol{k} \neq 0$, $\omega = 0$. En semejante caso no es de esperar una conductividad infinita, ya que con $\boldsymbol{k} \neq 0$ la

partícula sólo puede efectuar movimiento finito y no puede acelerarse hasta una velocidad muy alta. Esto significa, que la razón que entra en (6.11a)

$$\frac{1}{\omega}\int\frac{v_\alpha v_\beta}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\mathbf{v}}\frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}}d^3p$$

se comporta con $\omega \to 0$ como una indeterminación "cero por cero". Tal tipo de indeterminación puede desarrollarse según la regla de L´Hospital:

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{1}{\omega}\int\frac{v_\alpha v_\beta}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\mathbf{v}}\frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}}d^3p \to -\int\frac{v_\alpha v_\beta}{(\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{v})^2}\frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}}d^3p.$$

Por consiguiente, en el límite $\omega = 0, \boldsymbol{k} \neq 0$ la constante dieléctrica longitudinal ε^l toma la forma:

$$\varepsilon^l = 1 - \frac{4\pi e^2}{k^2}\int\frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}}d^3p.$$

Por regla, esta fórmula se escribe del modo siguiente:

$$\varepsilon^l = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}, \tag{6.12}$$

donde

$$r_D^{-2} = -4\pi e^2\int\frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}}d^3p. \tag{6.13}$$

La variante r_D es una de las más importantes características del medio y lleva el nombre de *radio de empantallado de Debye*. La variable escalar r_D^{-2} es positiva, ya que en equilibrio $\partial f_0/\partial \mathscr{E} < 0$.

El procedimiento expuesto para obtener r_D no es universal. Ante todo, es justo si $r_D \ll l$ (l es la longitud del recorrido libre de las partículas cargadas). Es verdad, que esta condición se cumple con frecuencia. P. ej., en los metales, siempre. Otra limitación de la generalidad de la deducción está relacionada con la aplicabilidad del propio método de obtención de la función de distribución δf con ayuda de la ecuación cinética linealizada. Pero sean cuales fuesen los límites de aplicabilidad del procedimiento aducido de cálculo del radio de Debye r_D, en los cómputos realizados vemos que existe cierta característica del medio relacionada con la dispersión espacial (k y r_D entran en (6.12) como un producto) y que caracteriza la respuesta del medio respecto del campo eléctrico.

Ahora, aclaremos el sentido físico del parámetro r_D. Para ello, retornemos a la fórmula (6.4) y pongamos en ella (6.12). Con ello, la expresión para el potencial escalar del campo eléctrico de una carga puntual, será

$$\varphi(r) = \frac{2er_D^2}{(2\pi)^2}\int\frac{\exp[ik(r - r_0)]}{1 + k^2 r_D^2}d^3k.$$

La integral que entra en esta fórmula es igual a

$$\int \frac{\exp[ik|r - r_0|]}{1 + k^2 r_D^2} d^3k = 2\pi \int \frac{\exp[ik|r - r_0|x]}{1 + k^2 r_D^2} k^2 dk\, dx, \qquad (6.14)$$

donde x es el coseno del ángulo entre los vectores k y $(r - r_0)$. En (6.14) tomemos primero la integral para la variable x, con lo que obtenemos

$$\frac{2\pi}{i|r - r_0|} \int_0^\infty \frac{\exp[ik|r - r_0|] - \exp[-ik|r - r_0|]}{1 + k^2 r_D^2} k\, dk. \qquad (6.15)$$

En el segundo sumando del integrando sustituyamos la variable $k \to -k'$, después de lo cual (6.15) toma la forma

$$\frac{2\pi}{i|r - r_0|} \left\{ \int_0^\infty \frac{\exp[ik|r - r_0|]}{1 + k^2 r_D^2} k\, dk + \int_{-\infty}^0 \frac{\exp[ik'|r - r_0|]}{1 + k'^2 r_D^2} k'\, dk' \right\} =$$

$$= \frac{2\pi}{i|r - r_0|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[ik|r - r_0|]}{1 + k^2 r_D^2} k\, dk. \qquad (6.16)$$

Ahora, demos a la variable k valores complejos. Con grandes valores de k, en el semiplano superior el integrando se reduce con rapidez a cero debido al exponente. Por esta razón, el contorno de integración que pasa por el eje real puede completarse con el arco de gran radio, cerrando el indicado contorno en el semiplano superior. Dentro del contorno de integración, en el punto $k = ir_D^{-1}$, yacerá un polo de primer orden. Calculando el correspondiente residuo, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[ik|r - r_0|]}{1 + k^2 r_D^2} k\, dk = \frac{i\pi}{r_D^2} \exp\left[-\frac{|r - r_0|}{r_D}\right],$$

en tanto que (6.4) será

$$\varphi(r) = \frac{e}{|r - r_0|} \exp\left[-\frac{|r - r_0|}{r_D}\right]. \qquad (6.17)$$

Así, pues, el potencial de la carga puntual e en un medio no es el potencial coulombiano debilitado cierta cantidad de veces. El medio cambia la propia forma de la función $\varphi(r)$. Cerca de la carga, cuando $|r - r_0| < r_D$, el campo de ésta en el medio coincide con ese mismo campo en el vacío. Con $|r - r_0| > r_D$, el campo decrece de manera exponencial diferenciándose, en este sentido, sustancialmente del campo coulombiano en el vacío. Esta última circunstancia es de gran importancia.

Como es natural para un medio, si existe un sistema de cargas que rodea cierta carga destacada, cada una de las cargas situadas en la capa esfé-

rica de espesor dr, que rodea la carga destacada, actuará sobre ella. Cuando no se toma en consideración el apantallado, la correspondiente fuerza es proporcional a r^{-2}, donde r es el radio de la capa. Esta fuerza disminuye a medida que la capa se aleja de la carga, pero el número de partículas en ella crece como r^2, por lo que la fuerza total que actúa sobre la carga se determina de modo sustancial por todas las partículas del medio, incluso por aquellas que se hallan infinitamente alejadas. Parece que el resultado a que hemos llegado está exento de sentido físico. En efecto, el apantallado de Debye conduce a que la interacción entre objetos lejanos es de poca importancia.

Otra conclusión a la que podemos llegar, apoyándonos en el examen realizado, consiste en que debemos atribuir sentido físico a aquella constante dieléctrica en un campo estático, en la que hacemos $\omega \to 0$, pero se mantiene la dependencia entre ε y k.

Para terminar el presente parágrafo, aduciremos los valores del radio de Debye r_D en diversos medios. En los metales $r_D \sim 10^{-7}$ cm, en los semiconductores el valor de r_D es más próximo a 10^{-5} cm, en el plasma termonuclear $r_D \sim 10^{-3}$ cm, en la ionosfera de un orden de 10^{-1} cm y en el plasma interestelar $r_D \approx 10^3$ cm. El apantallado tiene lugar no sólo en los campos estáticos, el campo de una carga en movimiento también sufre apantallado, pero éste es algo diferente. En tal caso, hablamos del apantallado dinámico del campo.

§ 7. Disipación de la energía del campo en medios dispersantes

Las partículas del medio, en movimiento por el campo electromagnético alternativo, reciben de éste energía: con ello disminuye la energía del campo electromagnético y crece la energía mecánica de las partículas (cinética y potencial). Como durante el desplazamiento de las partículas se genera el campo, existe también el proceso inverso de transformación de la energía mecánica de las partículas en la del campo electromagnético. La presencia de semejante intercambio de energía quiere decir que en la energía del campo electromagnético en el medio, hay que incluir la propia energía del campo que tiene la forma de la integral por el volumen V de los cuadrados de la intensidad del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ y del vector de la inducción magnética $\boldsymbol{B}$

$$\frac{1}{8\pi}\int (\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2) dV$$

y la energía de aquella parte del movimiento mecánico de las partículas del medio, condicionada por el campo electromagnético en él.

Junto con el campo que está en interacción con ellas, las partículas del medio no siempre forman un sistema cerrado. P. ej., pueden chocar trans-

mitiendo su energía e impulso a tales excitaciones del medio que ya no entran, directamente, en interacción con el campo y, por lo tanto, no lo generan. Parte de la energía del campo electromagnético, a expensas del choque, se convierte en la energía mecánica desordenada de las partículas cargadas y no puede ser retornada al campo. A fin de cuentas, ella se convierte en calor. Semejante proceso recibe el nombre de *disipación de energía del campo electromagnético.*

Como sabemos de termodinámica, la cantidad de calor no es función termodinámica en el sentido de que ella no se determina por los parámetros del sistema en cada momento de tiempo (en nuestro caso, con los vectores $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ y $\bar{\mathscr{D}}$). La cantidad de calor es determinada por toda la historia del proceso y depende de qué manera llega el sistema al estado que observamos. Esto nos indica que no existen fórmulas que nos proporcionen la cantidad de energía absorbida como función de los vectores del campo, tomados en cierto momento de tiempo. De importancia es conocer cómo cambió el campo en todos los momentos anteriores. Por ello, en el presente parágrafo será estudiado el caso particular, pero muy sustancial de la dispersión de energía del campo monocromático.

Consideramos que la amplitud de este campo es invariable. Esto significa que hay tal fuente exterior del campo que el suministro de energía al campo de la fuente compensa la disipación de energía de éste en el medio. La energía del propio campo electromagnético en el medio no varía. Según el período del campo, el valor medio de la densidad de energía absorbida

$$q = \overline{\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}} \tag{7.1}$$

es igual al trabajo medio de las fuerzas del campo electromagnético sobre las partículas cargadas. Describe aquella parte de la energía del campo que, sistemáticamente, se convierte en energía mecánica de partículas del medio. La operación de mediación es aquí de gran importancia. La variable no mediada $\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}$ contiene también aquella energía que, posteriormente, puede retornar de las partículas al campo y, por lo tanto, no describe la energía disipada. Si las variables $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{E}$ se consideran complejas, lo que es cómodo hacer cuando el campo es monocromático, tendremos

$$q = \overline{\mathrm{Re}\boldsymbol{j} \cdot \mathrm{Re}\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4}\,(j_\alpha E^*_\alpha + j^*_\alpha E_\alpha).$$

Poniendo en esta fórmula la expresión para la corriente, $j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta$, obtenemos

$$q = \frac{1}{4}\,(\sigma_{\alpha\beta} E^*_\alpha E_\beta + \sigma^*_{\beta\alpha} E_\beta E^*_\alpha) = \frac{1}{2}\,\sigma^h_{\alpha\beta} E^*_\alpha E_\beta. \tag{7.2}$$

Aquí $\sigma^h_{\alpha\beta}$ es la parte hermitiana del tensor de conductividad. Pasando del miembro medio de la fórmula (7.2) al segundo, hemos hecho uso de que cualquier tensor (incluido el tensor de conductividad $\sigma_{\alpha\beta}$) puede de-

sarrollarse en hermitiano y antihermitiano. La parte hermitiana del tensor de conductividad se determina con la relación

$$\sigma^h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\sigma_{\alpha\beta} + \sigma^*_{\beta\alpha}), \tag{7.3}$$

mientras que la antihermitiana con la expresión

$$\sigma^{ah}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\sigma_{\alpha\beta} - \sigma^*_{\beta\alpha}). \tag{7.4}$$

La posibilidad de semejante partición y las propiedades de las partes hermitiana y antihermitiana son examinadas en el Complemento I.

Empleando la ligazón entre la conductividad y la constante dieléctrica

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i\omega}{4\pi}(\delta_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}), \tag{7.5}$$

podemos dar a la fórmula (7.2) la siguiente forma

$$q = -\frac{i\omega}{8\pi}\varepsilon^{ah}_{\alpha\beta}E^*_\alpha E_\beta. \tag{7.6}$$

De aquí sigue, que si el tensor de la constante dieléctrica no contiene la parte antihermitiana, quiere decir que no hay absorción.

Si el medio es isótropo y no manifiesta propiedades magnéticas,

$$\varepsilon^{ah}_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon - \varepsilon^*}{2} = i\varepsilon'' \qquad \text{y} \qquad q = \frac{\omega}{8\pi}|E|^2\varepsilon''. \tag{7.7}$$

En un medio isótropo, pero magnético, de acuerdo con (4.10)

$$\varepsilon^{ah}_{\alpha\beta} = \varepsilon''\delta_{\alpha\beta} + \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^{ah}\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) =$$
$$= \varepsilon''\delta_{\alpha\beta} + \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2\frac{\mu''}{|\mu|^2}\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right). \tag{7.8}$$

Poniendo (7.8) en (7.6), llegamos a

$$q = -\frac{i\omega}{8\pi}\left[\varepsilon''|E|^2 + \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2\left(|E|^2 - \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}^*)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})}{k^2}\right)\frac{\mu''}{|\mu|^2}\right].$$

Transformemos la expresión obtenida, haciendo uso de la primera de las ecuaciones de Maxwell (2.18) escrita en la forma $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = \frac{\omega}{c}\mu\boldsymbol{H}$. Tomando el cuadrado de los módulos de los miembros primero y segundo de esta ecuación, hallaremos

$$(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}^*) = k^2|E|^2 - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}^*) = (\omega/c)^2|\mu|^2|H|^2,$$

lo que permite escribir la fórmula para la densidad de la energía electromagnética, disipada por unidad de tiempo, en la forma

$$q = \frac{\omega}{8\pi} [\varepsilon'' |E|^2 + \mu'' |H|^2]. \tag{7.9}$$

De esta última fórmula se desprende que la disipación de la energía electromagnética en la materia se determina por las partes imaginarias de las variables ε y μ.

Si

$$|\varepsilon|'' \ll |\varepsilon|' \text{ y } |\mu''| \ll |\mu'|,$$

durante el período de variación del campo la disipación es pequeña (en comparación con la energía electromagnética acumulada en la sustancia). El intervalo de frecuencias en el que se satisfacen estas desigualdades lleva el nombre de región de transparencia de las sustancias.

Si al no haber campo la sustancia se encuentra en estado de equilibrio termodinámico, la ley de crecimiento de la entropía requiere el cumplimiento de la desigualdad $q > 0$. Esto conduce a las desigualdades

$$\omega\varepsilon'' > 0, \qquad \omega\mu'' > 0, \tag{7.10}$$

es decir, las partes imaginarias de la constante dieléctrica y de la permeabilidad magnética son positivas cuando lo son las frecuencias.

Las intensidades de los campos $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ en la fórmula (7.9) son variables complejas de la forma $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) \exp(-i\omega t)$. En un experimento se miden sus partes reales $\boldsymbol{E}' = \mathrm{Re}\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}' = \mathrm{Re}\boldsymbol{H}$. Como durante la mediación según el tiempo se realiza la correlación

$$|\boldsymbol{E}|^2 = \overline{2\boldsymbol{E}'^2},$$

la expresión (7.9) puede escribirse de forma que en esta fórmula entrarán los valores reales de las intensidades del campo:

$$q = \frac{\omega}{4\pi} (\varepsilon'' \overline{E'^2} + \mu'' \overline{H'^2}). \tag{7.11}$$

§ 8. Energía del campo electromagnético y flujo de energía en un medio dispersante

En el § 16, P. I, fue mostrado que de las ecuaciones de Maxwell en el vacío se deduce directamente la ecuación del balance de energía (teorema Poynting), con la particularidad de que el análisis de diversos términos de la ecuación de Poynting permitió hallar la expresión para la densidad de energía y del flujo de energía del campo electromagnético.

La fórmula de Poynting (véase P. I, (16.32)) también es justa en electrodinámica de los medios si por la densidad de corriente entendemos la

densidad de la suma de las corrientes extraña e inducida. Con otras palabras, el balance de energía en electrodinámica de medios se expresa con la fórmula

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+B^2}{8\pi}\right)+\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}(E\times B)=-[j_{\text{ext}}+j(E,B)]\cdot E, \tag{8.1}$$

donde $j(E,B)$ es la corriente inducida dependiente de E y B (e igual a cero cuando $E=B=0$). La integración de esta fórmula por el tiempo nos permitió en el § 16, P. I, introducir la expresión para la densidad de energía del campo en el vacío

$$w=\frac{1}{8\pi}(E^2+B^2)$$

y el vector de Poynting

$$\vec{\gamma}=\frac{c}{4\pi}E\times B.$$

Aquí escribimos por doquier B en lugar de H teniendo en cuenta el sentido de dicho vector en electrodinámica macroscópica. En particular, hay que remarcar que estas expresiones son válidas con cualquier dependencia entre los vectores E y B y el tiempo.

A pesar del parecido exterior de la ecuación de balance de energía en el vacío y la ecuación (8.1), válida para medios, entre estos dos casos hay una profunda diferencia. Con el fin de revelar con claridad la naturaleza de ella, reescribimos (8.1) de otra manera. Ya que j está ligada con el vector de densidad de polarización mediante la fórmula (2.25), a la ecuación (8.1) se le puede atribuir la forma

$$\frac{1}{4\pi}\left(E\cdot\frac{\partial\vec{\mathscr{D}}}{\partial t}+B\cdot\frac{\partial B}{\partial t}\right)+j_{\text{ext}}\cdot E=-\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}(E\times B). \tag{8.2}$$

De aquí vemos que la expresión

$$\frac{1}{4\pi}\left(E\cdot\frac{\partial\vec{\mathscr{D}}}{\partial t}+B\cdot\frac{\partial B}{\partial t}\right) \tag{8.3}$$

también determina, simultáneamente, el incremento de la energía del campo en el medio y la disipación de ésta (como veremos más adelante, (8.3) asimismo hace aportación en el flujo de energía). La fórmula de Poynting no contiene ninguna indicación de que modo, precisamente, (8.3) debe dividirse en partes que describan el incremento de la energía del campo en el medio y la disipación. Podemos esperar que tal género de indicaciones sólo sean proporcionadas por las ecuaciones materiales. En la actualidad no hay metodología para obtener tal información de las ecuaciones fenomenológicas materiales de la forma $\mathscr{D}_\alpha=\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}E_\beta$.

No obstante, en una serie de casos conseguimos realizar tal división empleando las ecuaciones materiales microscópicas basadas directamente en el análisis de las ecuaciones de movimiento. Sólo cuando la disipación es despreciablemente pequeña es posible obtener la expresión para la energía del campo sin un análisis especial de las ecuaciones materiales macroscópicas. De hecho, esto significa que la energía del campo sólo puede hallarse si éste es próximo al monocromático, ya que sólo en este caso es posible la situación con la que la energía de un campo de determinada frecuencia es grande en comparación con la disipación (esta misma puede no ser pequeña, pero sustancial en otra zona de frecuencias). A las dependencias arbitrarias $\boldsymbol{E}(t)$ y $\boldsymbol{B}(t)$ les corresponde un extenso espectro de frecuencias, con lo que la disipación puede ser muy considerable.

Ahora, pasemos a la determinación de la energía del campo cuasimonocromático. Sea que en la ecuación de Poynting (8.1) los campos son cuasimonocromáticos, así, que

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}, t) \exp [i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)]. \tag{8.4}$$

La amplitud $\boldsymbol{E}_0$ de semejante onda es una función uniforme de las coordenadas y el tiempo, de forma que el tiempo característico de variación de la amplitud es mucho mayor que ω^{-1}, en tanto que la longitud característica, por la que la amplitud cambia de manera sustancial, es mucho mayor que $1/k$. Estas dos condiciones pueden escribirse así

$$|(k^{-1}\nabla)E_{0\alpha}| \ll E_{0\alpha}, \quad \left|\left(\omega^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_{0\alpha}\right| \ll E_{0\alpha}. \tag{8.5}$$

Además, vamos a suponer que la disipación es pequeña, de modo que

$$\max_{\alpha, \beta} \varepsilon^{ah}_{\alpha\beta} \ll \max_{\alpha, \beta} \varepsilon^{h}_{\alpha\beta}. \tag{8.6}$$

La densidad de corriente, condicionada por una onda cuasimonocromática en un medio homogéneo, es igual a

$$j_\alpha(\boldsymbol{r}, t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\boldsymbol{r}' \sigma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t') E_\beta(\boldsymbol{r}', t') =$$

$$= \exp [i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)] \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\boldsymbol{r}' \sigma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t') E_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}', t') \times$$

$$\times \exp \{i[\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}) - \omega(t' - t)]\}. \tag{8.7}$$

Desarrollemos la amplitud en lenta variación en la serie de Taylor:

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}', t') = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}, t) + [(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}) \cdot \nabla]\boldsymbol{E}_0 + (t' - t)\frac{\partial \boldsymbol{E}_0}{\partial t} + \ldots \tag{8.8}$$

Después de poner este desarrollo en (8.7) surgen integrales múltiples de tres tipos. La integral, por la que se multiplica la variable $E_0(r, t)$, tiene la forma

$$\int_{-\infty}^{t} dt' \int dr' \sigma_{\alpha\beta}(r - r', t - t') \exp\{i[k \cdot (r' - r) - \omega(t' - t)]\} = \sigma_{\alpha\beta}(k, \omega). \tag{8.9a}$$

Las otras dos integrales, por las que se multiplican las variables $\nabla \cdot E_0$ y $\partial E_0/\partial t$, son iguales a

$$\int_{-\infty}^{t} dt' \int dr' \sigma_{\alpha\beta}(r - r', t - t')(r' - r) \exp\{i[k \cdot (r' - r) - \omega(t' - t)]\} =$$

$$= -i \frac{\partial}{\partial k} \sigma_{\alpha\beta}(k, \omega); \tag{8.9b}$$

$$\int_{-\infty}^{t} dt' \int dr' \sigma_{\alpha\beta}(r - r', t - t')(t' - t) \exp\{i[k \cdot (r' - r) - \omega(t' - t)]\} =$$

$$= i \frac{\partial}{\partial \omega} \sigma_{\alpha\beta}(k, \omega). \tag{8.9c}$$

Tomando en consideración las fórmulas (8.9), la ligazón entre j y la intensidad del campo cuasimonocromático, toma la forma

$$j_\alpha(r, t) = \exp[i(k \cdot r - \omega t)] \left\{ \sigma_{\alpha\beta}(k, \omega) E_{0\beta}(r, t) - \right.$$

$$\left. - i \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}(k, \omega)}{\partial k} \frac{\partial E_{0\beta}(r, t)}{\partial r} + i \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}(k, \omega)}{\partial \omega} \frac{\partial E_{0\beta}(r, t)}{\partial t} \right\}. \tag{8.10}$$

Ahora, hagamos uso de la ligazón entre la conductividad y la constante dieléctrica $\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + 4\pi i \omega^{-1} \sigma_{\alpha\beta}$. Expresando la conductividad mediante $\varepsilon_{\alpha\beta}$

$$i\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\omega}{4\pi} (\varepsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta})$$

ponemos esta magnitud en los sumandos segundo y tercero de la fórmula (8.10). Entonces, el componente alfa de la densidad de corriente tendrá la forma

$$j_\alpha(r, t) = \exp[i(k \cdot r - \omega t)] \left\{ \sigma_{\alpha\beta}(k, \omega) E_{0\beta}(r, t) - \right.$$

$$\left. - \frac{\omega}{4\pi} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}(k, \omega)}{\partial k} \frac{\partial E_{0\beta}(r, t)}{\partial r} + \left[\frac{\varepsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}}{4\pi} + \frac{\omega}{4\pi} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial \omega} \right] \frac{\partial E_{0\beta}(r, t)}{\partial t} \right\}. \tag{8.11}$$

En el segundo miembro de la ecuación (8.1) se halla el producto de la parte real de la corriente (8.11) por la parte real de la intensidad del campo

eléctrico. La media de este producto por el período $2\pi/\omega$, será

$$\overline{\frac{1}{4}(j+j^*)\cdot(E+E^*)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(j\cdot E^*), \tag{8.12}$$

donde al mediar por el período las amplitudes en variación lenta se consideraban constantes, de manera que las medias de los términos $j^*\cdot E^*$ y $j\cdot E$ son nulas. Sustituyendo en (8.12) la expresión para la corriente (8.11), hallaremos

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(j\cdot E^*) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\,\sigma_{\alpha\beta}E^*_{0\alpha}E_{0\beta} - \frac{\omega}{8\pi}\,\frac{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial k}\,E^*_{0\alpha}\frac{\partial E_{0\beta}}{\partial r} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{8\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\omega}\,(\omega\varepsilon_{\alpha\beta}) - \delta_{\alpha\beta}\right]E^*_{0\alpha}\frac{\partial E_{0\beta}}{\partial t}\right\}. \tag{8.13}$$

Transformemos los sumandos en el segundo miembro de (8.13). El producto $E^*_{0\alpha}E_{0\beta}$ es el hermitiano del tensor de II rango. Como ya sabemos (véase el Comp. 1.3), la convolución del hermitiano y antihermitiano de los tensores es una variable puramente imaginaria. Por ello, haciendo $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma^h_{\alpha\beta} + \sigma^{ah}_{\alpha\beta}$, tendremos

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\,\sigma_{\alpha\beta}E^*_{0\alpha}E_{0\beta}\right) = \frac{1}{2}\,\sigma^h_{\alpha\beta}E^*_\alpha E_\beta. \tag{8.14}$$

En los dos términos restantes del segundo miembro de (8.13), basándonos en la igualdad (8.6), despreciemos la parte antihermitiana del tensor de $\varepsilon_{\alpha\beta}$, o sea, hagamos $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^h_{\alpha\beta}$. Haciendo de nuevo uso de que la convolución del hermitiano y del antihermitiano de los tensores es una variable puramente imaginaria, realizamos las transformaciones siguientes:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\omega}{8\pi}\,\frac{\partial\varepsilon^h_{\alpha\beta}}{\partial k}\,E^*_{0\alpha}\frac{\partial E_{0\beta}}{\partial r}\right) = \frac{\omega}{16\pi}\,\frac{\partial\varepsilon^h_{\alpha\beta}}{\partial k}\left(E^*_{0\alpha}\frac{\partial E_{0\beta}}{\partial r} + E_{0\beta}\frac{\partial E^*_{0\alpha}}{\partial r}\right) =$$
$$= \frac{\omega}{16\pi}\,\frac{\partial\varepsilon^h_{\alpha\beta}}{\partial k}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(E^*_{0\alpha}E_{0\beta}) = \frac{\omega}{16\pi}\,\mathrm{div}\left(\frac{\partial\varepsilon^h_{\alpha\beta}}{\partial k}\,E^*_\alpha E_\beta\right). \tag{8.15}$$

Aquí hemos tomado en consideración que el medio es espacial-homogéneo. El último sumando en (8.13)

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{8\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\omega}\,(\omega\varepsilon^h_{\alpha\beta}) - \delta_{\alpha\beta}\right]E^*_{0\alpha}\frac{\partial E_{0\beta}}{\partial t}\right\} =$$
$$= \frac{1}{16\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\varepsilon^h_{\alpha\beta}) - \delta_{\alpha\beta}\right]\frac{\partial}{\partial t}\,(E^*_\alpha E_\beta). \tag{8.16}$$

En los segundos miembros de las fórmulas (8.14) — (8.16) está escrito por doquier $E^*_\alpha E_\beta$ en lugar de $E^*_{0\alpha}E_{0\beta}$. Teniendo en cuenta dichas fórmulas, escribimos:

$$\overline{j\cdot E} = \frac{1}{2}\,\sigma^h_{\alpha\beta}E^*_\alpha E_\beta + \left[\frac{\partial(\omega\varepsilon^h_{\alpha\beta})}{\partial\omega} - \delta_{\alpha\beta}\right]\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^*_\alpha E_\beta}{16\pi}\right) - \mathrm{div}\left(\frac{\omega}{16\pi}\,\frac{\partial\varepsilon^h_{\alpha\beta}}{\partial k}\,E^*_\alpha E_\beta\right). \tag{8.17}$$

Ahora, mediemos los dos miembros de la igualdad (8.1) según el tiempo y pongamos en ella el valor hallado de $\overline{j \cdot E}$ en la forma (8.17). La mediación por el tiempo se realiza de acuerdo con el esquema corriente, mediante la representación de los vectores reales E y B con ayuda de las variables complejas tipo (8.4)

$$E \to \tfrac{1}{2}(E + E^*), \qquad B \to \tfrac{1}{2}(B + B^*),$$

donde en los segundos miembros entran los vectores complejos del campo. Después de la mediación, sólo los términos de la forma $E^* \cdot E$, $E \times B^*$, etc., que no contienen los factores $\exp(\pm 2i\omega t)$, siguen siendo distintos de cero. Habiendo realizado la mediación y la sustitución de (8.17), la ecuación (8.1) toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{E^*_\alpha E_\alpha + B^*_\alpha B_\alpha}{16\pi} + \left[\frac{\partial(\omega\varepsilon^h_{\alpha\beta})}{\partial\omega} - \delta_{\alpha\beta}\right]\frac{E^*_\alpha E_\beta}{16\pi}\right\} +$$

$$+ \operatorname{div}\left\{\frac{c}{16\pi}(E \times B^* + E^* \times B) - \frac{\omega}{16\pi}\frac{\partial\varepsilon^h_{\alpha\beta}}{\partial k} E^*_\alpha E_\beta\right\} =$$

$$= -\overline{j_{\text{ext}} \cdot E} - \frac{1}{2}\sigma^h_{\alpha\beta} E^*_\alpha E_\beta. \tag{8.18}$$

La ecuación (8.1) ha tomado la forma de una ecuación de continuidad con fuente diferente de cero, situada en el segundo miembro de la igualdad. La variable $\overline{j_{\text{ext}} \cdot E}$ es el trabajo del campo eléctrico sobre las cargas exteriores, mientras que la variable $1/2\sigma^h_{\alpha\beta} E^*_\alpha E_\beta$, la densidad de la potencia de las pérdidas térmicas (de Joule). Estas dos partes entran en (8.18) con signo menos, ya que conducen al decrecimiento de la energía del campo. La variable que se halla en (8.18) bajo el signo de la derivada por el tiempo

$$w = \frac{1}{16\pi}\left\{\frac{\partial(\omega\varepsilon^h_{\alpha\beta})}{\partial\omega} E^*_\alpha E_\beta + B^*_\alpha B_\alpha\right\} \tag{8.19}$$

tiene el sentido de la densidad de energía del campo electromagnético cuasimonocromático en un medio. Por fin, el vector

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{16\pi}\left\{E \times B^* + E^* \times B - \frac{\omega}{c}\frac{\partial\varepsilon^h_{\alpha\beta}}{\partial k} E^*_\alpha E_\beta\right\}, \tag{8.20}$$

que en (8.18) se encuentra bajo el signo de divergencia, debe ser identificado con la densidad del flujo de energía en el medio. Todas estas magnitudes han sido mediadas por el período. Con un campo irrotacional, cuando $B = 0$, el flujo de energía también resulta ser no igual a cero. En tal caso, toda la transferencia de energía por el campo está condicionada por la dispersión espacial.

La fórmula (8.19) para la densidad de energía electromagnética en un medio se simplifica de modo considerable cuando el medio no es dispersan-

te, no es magnético ($\mu = 1$) e isótropo. En semejante caso, de acuerdo con (4.10), $\varepsilon^h_{\alpha\beta} = \varepsilon\delta_{\alpha\beta}$ y

$$w = \frac{1}{16\pi}(\varepsilon \boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}^* \cdot \boldsymbol{B}). \tag{8.21}$$

Si las intensidades del campo son magnitudes reales, la fórmula (8.21) adquiere el aspecto

$$w = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon \overline{\boldsymbol{E}'^2} + \overline{\boldsymbol{B}'^2}) = \frac{1}{8\pi}(\overline{\boldsymbol{E}' \cdot \boldsymbol{D}'} + \overline{\boldsymbol{B}'^2}). \tag{8.22}$$

Cuando el medio es magnético (pero no dispersante) es cómodo introducir la permeabilidad magnética μ y, con su ayuda, expresar la densidad de energía. Suponiendo que en (4.10) las variables ε y μ no dependen de la frecuencia, tendremos

$$\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\varepsilon^h_{\alpha\beta}) + \varepsilon'\delta_{\alpha\beta} + \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2\left(1 - \frac{1}{\mu'}\right)\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)$$

y, despreciando la parte imaginaria de μ'', de (8.19) obtendremos

$$w = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon' \overline{\boldsymbol{E}'^2} + \mu' \overline{\boldsymbol{H}'^2}) = \frac{1}{8\pi}(\overline{\boldsymbol{E}' \cdot \boldsymbol{D}'} + \overline{\boldsymbol{H}' \cdot \boldsymbol{B}'}). \tag{8.23}$$

Para el mismo caso de un medio isótropo no dispersante también puede simplificarse la expresión (8.20) para la densidad del flujo de energía. Habiendo calculado con (4.10) la derivada $\partial\varepsilon^h_{\alpha\beta}/\partial\boldsymbol{k}$ suponiendo que ε y μ no dependen de $\boldsymbol{k}$, hallamos

$$-\frac{\omega}{c}\frac{\partial\varepsilon^h_{\alpha\beta}}{\partial\boldsymbol{k}} E^*_\alpha E_\beta = -\frac{c}{\omega}\left(1 - \frac{\mu'}{|\mu|^2}\right)[2\boldsymbol{k}\,|\boldsymbol{E}|^2 - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}^*) - \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})].$$

En adelante vamos a suponer que $\mu' \gg \mu''$, así, que

$$1 - \mu'/|\mu|^2 \approx 1 - 1/\mu'.$$

La imagen de Fourier de la primera ecuación de Maxwell $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \frac{\omega}{c}\mu'\boldsymbol{H}$ se multiplica vectorialmente por $\boldsymbol{E}^*$ y añadimos a ella expresión complejo-conjugada (suponiendo de nuevo que la magnitud μ'' puede despreciarse), después de lo cual obtenemos

$$2\boldsymbol{k}\,|\boldsymbol{E}|^2 - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}^*) - \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}) = \frac{\omega}{c}\mu'(\boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H} + \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*).$$

Con ayuda de esta fórmula hallamos

$$-\frac{\omega}{c}\frac{\partial\varepsilon^h_{\alpha\beta}}{\partial\boldsymbol{k}} E^*_\alpha E_\beta = (1 - \mu')(\boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H} + \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*),$$

lo que nos permite escribir la expresión (8.20) para la densidad del flujo de energía en un medio isótropo sin dispersión espacial en la siguiente forma:

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{16\pi}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* + \boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H}) = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*). \tag{8.20a}$$

O bien para el valor real del campo en la forma:

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi} \overline{\boldsymbol{E}' \times \boldsymbol{H}'}. \tag{8.20b}$$

Las fórmulas (8.19) y (8.20) son idóneas para calcular las variables w y $\vec{\gamma}$ según la distribución de los campos hallada de manera teórica de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell. Al calcular w y $\vec{\gamma}$ según los valores medidos de las intensidades del campo, es cómodo tener fórmulas en las que figuran no las intensidades complejas, sino las reales, o sea, $\boldsymbol{E}' = \operatorname{Re}\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}' = \operatorname{Re}\boldsymbol{B}$ y el vector real de inducción $\vec{\mathscr{D}} = \operatorname{Re}\vec{\mathscr{D}}$. Es evidente que al mediar por el tiempo el producto

$$\overline{\boldsymbol{B}^* \cdot \boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^* \cdot \boldsymbol{B} = \overline{2\boldsymbol{B}'^2}, \qquad \overline{\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}} = 0, \text{ etc.}$$

Pero el vector $\boldsymbol{E}$ entra en (8.19) no en forma del cuadrado del módulo, por lo que efectuamos las siguientes transformaciones:

$$\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\varepsilon^h_{\alpha\beta})E^*_\alpha E_\beta = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\varepsilon^h_{\alpha\beta})E^*_\alpha E_\beta + \frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\varepsilon^h_{\alpha\beta})E^*_\alpha E_\beta\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\mathscr{D}_\alpha)E^*_\alpha + \frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\mathscr{D}^*_\alpha)E_\alpha\right] - \frac{1}{2}\left[\omega\varepsilon^h_{\alpha\beta}\frac{\partial E_\beta}{\partial\omega}E^*_\alpha + \omega\varepsilon^{*h}_{\alpha\beta}\frac{\partial E^*_\alpha}{\partial\omega}E_\beta\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}^* \cdot \frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\vec{\mathscr{D}}) + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\vec{\mathscr{D}}^*)\right] - \frac{\omega}{2}\left[\vec{\mathscr{D}}^* \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial\omega} + \vec{\mathscr{D}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}^*}{\partial\omega}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{\left[(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^*) \cdot \frac{\partial}{\partial\omega}\omega(\vec{\mathscr{D}} + \vec{\mathscr{D}}^*)\right]} - \frac{\omega}{2}\overline{\left[(\vec{\mathscr{D}} + \vec{\mathscr{D}}^*) \cdot \frac{\partial}{\partial\omega}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^*)\right]} =$$

$$= 2\boldsymbol{E}' \cdot \frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\vec{\mathscr{D}}) - 2\omega\vec{\mathscr{D}}' \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}'}{\partial\omega}.$$

Como resultado, tenemos

$$w = \frac{1}{8\pi}\left\{\overline{\boldsymbol{B}'^2} + \overline{\boldsymbol{E}' \cdot \frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\vec{\mathscr{D}}')} - \overline{\omega\vec{\mathscr{D}}' \cdot \frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{E}'}\right\}. \tag{8.24}$$

De manera análoga transformamos la expresión para γ:

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{16\pi}\left\{\boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}^* - \frac{\omega}{c}\frac{\partial\varepsilon^h_{\alpha\beta}}{\partial k}E^*_\alpha E_\beta\right\} =$$

$$= \frac{c}{16\pi}\left\{\overline{4\boldsymbol{E}' \times \boldsymbol{B}'} - \frac{\omega}{2c}\left[\frac{\partial\varepsilon^h_{\alpha\beta}}{\partial k}E^*_\alpha E_\beta + \frac{\partial\varepsilon^{*h}_{\beta\alpha}}{\partial k}E^*_\alpha E_\beta\right]\right\}.$$

La expresión entre corchetes puede ser escrita en la forma

$$E^*_\alpha \frac{\partial \mathscr{D}_\alpha}{\partial k} - E^*_\alpha \varepsilon^{*h}_{\beta\alpha} \frac{\partial E_\beta}{\partial k} + E_\alpha \frac{\partial \mathscr{D}^*_\alpha}{\partial k} - E_\beta \varepsilon^h_{\alpha\beta} \frac{\partial E^*_\alpha}{\partial k} =$$

$$= \overline{(E + E^*)_\alpha \frac{\partial}{\partial k} (\vec{\mathscr{D}} + \vec{\mathscr{D}}^*)_\alpha} - \overline{(\vec{\mathscr{D}} + \vec{\mathscr{D}}^*)_\alpha \frac{\partial}{\partial k} (E + E^*)_\alpha} =$$

$$= 4\overline{E'_\alpha \frac{\partial \mathscr{D}'_\alpha}{\partial k}} - 4\overline{\mathscr{D}'_\alpha \frac{\partial E'_\alpha}{\partial k}};$$

aquí hemos hecho uso del carácter hermitiano ($\varepsilon^h_{\alpha\beta} = \varepsilon^{*h}_{\beta\alpha}$) del tensor de la constante dieléctrica.

En fin de cuentas, la densidad del flujo de energía en un medio adquiere la forma

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi} \left[\overline{\vec{E}' \times \vec{B}'} + \frac{\omega}{c} \left(\overline{\mathscr{D}'_\alpha \frac{\partial E'_\alpha}{\partial k}} - \overline{E'_\alpha \frac{\partial \mathscr{D}'_\alpha}{\partial k}} \right) \right]. \tag{8.25}$$

Es de recordar que por $\vec{\mathscr{D}}$ aquí se entiende aquella parte del vector de la inducción eléctrica, expresada por E con ayuda de la parte hermitiana del tensor de la constante dieléctrica compleja.

§ 9. Ecuaciones de electrodinámica en medios en movimiento

9.1. Ecuaciones de Maxwell y ecuaciones materiales. Al deducir las ecuaciones de electrodinámica supusimos que el medio en interacción con el campo electromagnético estaba en reposo en el sistema de coordenadas donde se hallaba el observador. No obstante, hay casos cuando respecto de éste el medio se mueve. P. ej., es posible que esto suceda si los fenómenos electromagnéticos se desarrollan en el plasma fluyente. Durante la deformación de los medios dieléctricos en el campo electromagnético, sectores macroscópicos del medio también pueden sufrir notorios movimientos. Aunque estos movimientos siempre transcurren a velocidades no relativistas, es más cómodo, como fue hallado por H. Minkowski, examinar el problema relativista y, a continuación, si esto es preciso, pasar al límite no relativista.

Señalemos, ante todo, que el medio en movimiento no cambia de ninguna manera la forma de las ecuaciones del campo. En ellas, semejante medio se toma en consideración con la forma de la densidad de corriente j y de carga ρ en las ecuaciones de Maxwell. Algo más complicado es el problema que atañe a las variables macroscópicas. El carácter de la mediación no depende del movimiento del medio, por lo que la mediación transcurre por el volumen — tiempo determinados respecto del sistema de coordenadas del laboratorio. Sin embargo, es preciso aclarar el comportamiento de los vectores D y H cuando el medio está en movimiento.

La aparición de la teoría de estos vectores se encuentra ligada con la posibilidad de representar la corriente inducida j y la carga ρ en la forma

$$j = c\,\mathrm{rot}\,M + \frac{\partial P}{\partial t} \qquad \text{y} \qquad \rho = -\mathrm{div}\,P,$$

donde P es la densidad de momento eléctrico dipolar y M, el magnético.

P. ej., consideremos la corriente de magnetización (cuya densidad es $c\,\mathrm{rot}\,M$) en dos sistemas de coordenadas: acompañante y de laboratorio. Supongamos que dicha corriente esté condicionada por la existencia en el medio (al examinar el proceso en el sistema de coordenadas acompañante) de corrientes cerradas. Si observamos esas mismas corrientes desde el sistema de coordenadas del laboratorio, será fácil comprender que ellas parecerán no cerradas y a gran velocidad de movimiento del medio, la trayectoria de las partículas cargadas del medio (con relación al sistema de laboratorio) pueden no tener por completo sectores que correspondan al movimiento de retorno. Esto significa que una corriente que, sin duda alguna, es de magnetización, si se observa desde el correspondiente sistema de coordenadas, en lo que se refiere al sistema de coordenadas de laboratorio, intervendrá como corriente de polarización. Por esto, si en el caso de medios en movimiento la estructura de las fórmulas (2.6) y (2.14) incluso se conserva, los vectores M y P ya no pueden considerarse en todos los casos como la densidad de los momentos dipolares magnético y eléctrico, respectivamente. De estos razonamientos queda claro que el momento magnético en movimiento puede generar un campo eléctrico, en tanto que un momento eléctrico es capaz de crear un campo magnético.

Cerciorémonos de que aunque en las fórmulas (2.6) y (2.14), cuando los medios se mueven, los vectores M y P ya no tienen aquel sentido físico propio que ellos poseían en el sistema de coordenadas acompañante, la propia estructura de las indicadas fórmulas, a pesar de todo, puede conservarse. En efecto, determinemos en el sistema de coordenadas del laboratorio cierto vector P como una variable relacionada con la densidad de carga ρ (que también se ha determinado en el sistema de laboratorio) con una correlación del tipo (2.6): $\rho = -\mathrm{div}\,P$. Esta posibilidad se determina debido a que en el caso de medios en movimiento, el vector P debe anularse fuera del medio. De la ecuación de continuidad, tomando en consideración la estructura de (2.6), se desprende que

$$\mathrm{div}\,(j - \partial P/\partial t) = 0.$$

Por lo tanto, la variable $(j - \partial P/\partial t)$ es el rotor de un vector que, de cierta forma, caracteriza las propiedades del medio y se reduce a cero fuera de él (designemos también este vector con la misma letra M con la que antes designábamos la densidad del momento magnético). De lo dicho se desprende que la estructura de las fórmulas (2.6) y (2.14) asimismo se conserva cuando el medio está en movimiento. Pero esto significa que la estructura de las

ecuaciones de Maxwell

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} j_{\text{ext}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \tag{9.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho_{\text{ext}}$$

también se conserva en tal caso, aunque los vectores $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$ ya no tienen el mismo sentido físico que en el sistema de coordenadas acompañante.

De la última afirmación se desprende directamente que la ligazón entre $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{B}$ y, claro está, entre $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$, cuando los medios se mueven, no será ya igual a la que observamos en el sistema de coordenadas acompañante. Es evidente que el vector $\boldsymbol{D}$ en el sistema del laboratorio describirá la respuesta del medio tanto en lo que atañe al campo eléctrico, como al magnético. Lo mismo podemos decir respecto del vector $\boldsymbol{H}$.

La covariación relativista de las ecuaciones (9.1) permite escribirlas en forma covariante explícita:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0, \tag{9.2a}$$

$$\frac{\partial H^{ik}}{\partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^i_{\text{ext}}, \tag{9.2b}$$

donde F_{ik} es un tensor del tipo:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{9.3}$$

La magnitud H^{ik} también es un tensor:

$$H^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{9.4}$$

el 4-vector j^i_{ext} tiene la misma forma que al no haber medio.

Ahora, aclaremos qué forma tienen los enlaces entre los vectores $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ cuando los medios están en movimiento. Limitémonos al caso de un medio isótropo sin dispersión. En el sistema acompañante de referencia, lo mismo que para el medio inmóvil, tendremos

$$\tilde{\boldsymbol{D}} = \varepsilon \tilde{\boldsymbol{E}}, \qquad \tilde{\boldsymbol{B}} = \mu \tilde{\boldsymbol{H}}, \tag{9.5}$$

donde con el tilde se designan los vectores del campo en el indicado sistema. Las constantes materiales ε, μ son iguales a las del medio inmóvil. Seguidamente, expresamos los valores de los vectores del campo en el sistema

acompañante con ayuda de sus valores en el sistema de laboratorio, haciendo uso del hecho establecido más arriba de que $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ y $(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H})$ forman a pares 4-tensores de II rango. Podemos emplear las fórmulas (10.3) de la P. I, efectuando variaciones evidentes en las designaciones:

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{E}}_{\parallel} &= \boldsymbol{E}_{\parallel}, \qquad \tilde{\boldsymbol{E}}_{\perp} = \gamma\left(\boldsymbol{E}_{\perp} + \frac{1}{c}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}\right),\\
\tilde{\boldsymbol{B}}_{\parallel} &= \boldsymbol{B}_{\parallel}, \qquad \tilde{\boldsymbol{B}}_{\perp} = \gamma\left(\boldsymbol{B}_{\perp} - \frac{1}{c}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E}\right),\\
\tilde{\boldsymbol{D}}_{\parallel} &= \boldsymbol{D}_{\parallel}, \qquad \tilde{\boldsymbol{D}}_{\perp} = \gamma\left(\boldsymbol{D}_{\perp} + \frac{1}{c}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H}\right),\\
\tilde{\boldsymbol{H}}_{\parallel} &= \boldsymbol{H}_{\parallel}, \qquad \tilde{\boldsymbol{H}}_{\perp} = \gamma\left(\boldsymbol{H}_{\perp} - \frac{1}{c}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{D}\right).
\end{aligned} \tag{9.6}$$

Aquí γ es el factor de Lorentz, $\boldsymbol{V}$, la velocidad del medio en el sistema de laboratorio. Poniendo por separado en (9.5) las componentes longitudinales y transversales y reduciendo γ de las ecuaciones para las componentes transversales, obtenemos las siguientes ecuaciones materiales:

$$\boldsymbol{D} + \frac{1}{c}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H} = \varepsilon\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}\right), \tag{9.7}$$

$$\boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E} = \mu\left(\boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{D}\right). \tag{9.8}$$

Ellas llevan el nombre de *ecuaciones de Minkowski*.

Es posible deducir estas ecuaciones de otro modo, escribiendo de manera relativista la ligazón covariante entre los tensores F_{ik} y H_{ik} de forma que se convierta en la ecuación (9.5) en el sistema acompañante. Semejante generalización covariante de las últimas correlaciones tiene el aspecto

$$H_{ik}u^k = \varepsilon F_{ik}u^k, \tag{9.9}$$

$$F_{ik}u_l + F_{kl}u_i + F_{li}u_k = \mu(H_{ik}u_l + H_{kl}u_i + H_{li}u_k), \tag{9.10}$$

donde u_i es el 4-vector de velocidad del medio. Dejamos que el lector se cerciore por sí mismo de la equivalencia de las ecuaciones (9.8) y (9.7). Esto se puede hacer mediante las correlaciones (9.3), (9.4) y (4.30) de la P. I, aducidas más arriba.

En el límite no relativista, las ecuaciones de Minkowski (9.7) y (9.8) se simplifican:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H}, \tag{9.11}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{V}. \tag{9.12}$$

De hecho, es precisamente con estas últimas ecuaciones con las que se tiene que operar, ya que los cuerpos macroscópicos siempre se mueven a velocidades mucho menores que la de la luz.

9.2. Condiciones de frontera. Además de las ecuaciones materiales, también hay que reenunciar las condiciones de frontera para las ecuaciones del campo. A primera vista, puede parecer que como las ecuaciones (9.1) tienen la misma forma que en el sistema de coordenadas acompañante, las condiciones de frontera destinadas a ellas tampoco variarán. Pero esto no es así. Las condiciones de frontera en el sistema de coordenadas acompañante tienen el aspecto (2.22) sólo en el caso cuando las derivadas parciales según el tiempo, que entran en las ecuaciones de Maxwell, son variables acotadas. Esto es lo que sucede si el medio está en reposo. Pero si el medio se encuentra en movimiento, en el momento que la frontera de éste cruza cierto punto, el campo varía a salto y las derivadas $\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ y $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ se reducen al infinito.

Estudiemos el caso del movimiento débilmente relativista del medio, que es lo que ofrece el mayor interés. Al obtener las condiciones de frontera, con el fin de tener en cuenta la singularidad del problema con medios en movimiento, adicionemos a los miembros segundo y primero de las ecuaciones de Maxwell, que contienen las derivadas por el tiempo, expresiones que completen las derivadas parciales según el tiempo hasta las derivadas totales. Éstas, que tienen la forma $\partial/\partial t + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)$, describirán la variación del campo en el punto que mueve a la velocidad de desplazamiento del medio y por ello, en el proceso de movimiento, no cruza la frontera. Por lo tanto, semejantes derivadas totales siempre serán variables finitas. P. ej., obrando de esta manera con la segunda ecuación de Maxwell, obtenemos

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{D} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{\text{ext}} + \frac{1}{c}\left[\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{D}\right]. \tag{9.13}$$

Si la densidad de corriente $\boldsymbol{j}_{\text{ext}}$ es finita en la capa límite, el primer miembro de la ecuación (9.13) debe estar también acotado en los puntos situados en la frontera. Ahora, temporalmente, figurémonos que el sistema de coordenadas está situado de manera que cierto trozo, infinitamente pequeño, de la superficie límite resulta ser paralelo al plano xy. Entonces, en la superficie las derivadas de todas las variables por x y por y serán finitas. Por consiguiente, los términos del primer miembro de la ecuación (9.13), que contienen derivadas por z, también deben ser acotados. Dichos sumandos tienen la forma

$$-\mathrm{e}_x\frac{\partial}{\partial z}H_y + \mathrm{e}_y\frac{\partial}{\partial z}H_x + \frac{1}{c}V_z\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{D},$$

donde las magnitudes e_x y e_y son versores dirigidos a lo largo de los correspondientes ejes. De aquí obtenemos de inmediato que en el límite de sepa-

ración quedan finitas las proyecciones de este vector

$$\frac{V_z}{c}\frac{\partial D_z}{\partial z}, \qquad \frac{V_z}{c}\frac{\partial D_x}{\partial z} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \qquad \frac{V_z}{c}\frac{\partial D_y}{\partial z} + \frac{\partial H_x}{\partial z}.$$

Por lo tanto, las variables

$$D_z, \qquad \frac{V_z}{c} D_x - H_y \qquad \text{y} \qquad \frac{V_z}{c} D_y + H_x$$

tienen iguales valores por los dos lados de la superficie límite. Como D_z y V son continuos, las dos últimas expresiones pueden ser presentadas como

$$H_x - \frac{1}{c}(V_y D_z - V_z D_y) \qquad \text{y} \qquad H_y - \frac{1}{c}(V_z D_x - V_x D_z).$$

Ahora es cómodo hacer innecesaria la elección especial de la posición de los ejes de coordenadas respecto del elemento que consideramos de la superficie límite, reescribiendo el resultado en forma vectorial: los componentes

$$D_n \qquad \text{y} \qquad \left(H - \frac{1}{c} V \times D\right)_\tau \tag{9.14}$$

deben ser continuos en la superficie de separación. Si la densidad de corriente j_{ext} es infinita en dicha superficie, será finita la magnitud

$$\text{rot}\, H + \frac{1}{c}(u \cdot \nabla) D - \frac{4\pi}{c} j_{\text{ext}},$$

de donde sigue que en las supreficies interior y exterior del límite de separación la diferencia de las expresiones

$$\left(H - \frac{1}{c} u \times D\right)_\tau$$

es igual a la variable $4\pi i/c$, donde i es la densidad de corriente superficial y $D_{n_2} - D_{n_1} = 4\pi\sigma$ (σ es la densidad de la carga superficial). La última fórmula se obtiene con facilidad si tomamos en consideración que las cargas superficiales, a las que corresponden la densidad volumétrica $\rho = \sigma\delta(z)$ (para mayor precisión, hacemos coincidir aquí el origen de coordenadas con el límite de separación), durante su movimiento también crean una corriente $j_{\text{ext}} = \rho u$.

Una consideración análoga de la ecuación $\text{rot}\, E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$ nos muestra que las variables

$$B_n \qquad \text{y} \qquad \left(E - \frac{1}{c} u \times B\right)_\tau \tag{9.15}$$

son continuas en la superficie de separación. De (9.14) — (9.15) sigue que estas condiciones de frontera se reducen a las corrientes, válidas en el caso

de medios inmóviles, si el componente de la velocidad u del medio normal a la superficie es igual a cero.

9.3. Ecuaciones de Maxwell con vector de inducción generalizado. Si hacemos uso de las ecuaciones de Maxwell escritas en la forma (2.27), la descripción de los fenómenos electromagnéticos en medios que están en movimiento se simplifican. Dichas ecuaciones también pueden representarse en la forma explícita relativistamente covariante (9.2), con el mismo tensor F_{ik}, pero con ello, el tensor H^{ik} tomará el aspecto

$$H^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathscr{D}_x & -\mathscr{D}_y & -\mathscr{D}_z \\ \mathscr{D}_x & 0 & -B_z & B_y \\ \mathscr{D}_y & B_z & 0 & -B_x \\ \mathscr{D}_z & B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.16}$$

De la comparación de los tensores H^{ik} y F_{ik} sigue que el vector $\vec{\mathscr{D}}$ se transforma con ayuda de la misma regla que el vector E. Para obtener la ecuación material en un medio en movimiento, vamos a partir de la conocida ecuación (4.2) en el sistema acompañante:

$$\tilde{\mathscr{D}}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}(\tilde{k}, \tilde{\omega})\tilde{E}_\beta.$$

Transformemos $\vec{\mathscr{D}}$ y $\tilde{E}$ en el sistema de laboratorio, teniendo en cuenta para simplificar el caso del movimiento no relativista del medio:

$$\mathscr{D}_\alpha + \frac{1}{c}[V \times B]_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}(\tilde{k}, \tilde{\omega})\left(E_\beta + \frac{1}{c}[V \times B]_\beta\right). \tag{9.17}$$

Si el medio es isótropo y no magnético, esta fórmula adopta la forma

$$\vec{\mathscr{D}} = \varepsilon(\tilde{k}, \tilde{\omega})E + \frac{\varepsilon - 1}{c} V \times B.$$

Aquí E, B y $\vec{\mathscr{D}}$ dependen de ω y k determinados en el sistema de laboratorio. En lo que atañe al argumento del tensor $\varepsilon_{\alpha\beta}$, en él, han quedado la frecuencia y el vector de onda en el sistema acompañante. Ellos deben expresarse con ω y k mediante las fórmulas de la transformación relativista (véase el § 28, P. I), que en el primer orden por V/c tienen la forma

$$\tilde{\omega} = \omega - k \cdot V, \qquad \tilde{k} = k. \tag{9.18}$$

De aquí se desprende que si incluso la variable $\varepsilon_{\alpha\beta}$ no depende de k, después de transformar la frecuencia, el vector de onda k entrará en el argumento de la constante dieléctrica. Esto quiere decir, que los medios en movimiento tienen no sólo dispersión temporal sino también espacial. El valor de la dispersión puede hacerse sustancial a una velocidad suficiente de movimiento del medio, incluso cuando en el sistema de coordenadas acompañante es posible despreciar dicha dispersión. En tal caso, el motivo físico de aparición de la dispersión espacial radica en que la información acerca del campo en cierto punto se traspasa a otros puntos, no sólo debido

al movimiento microscópico de las partículas del medio, sino también como consecuencia de la existencia del movimiento macroscópico de todo el medio en su total. Si $V \gg v$ (donde v es la velocidad característica de las partículas del medio), la dispersión espacial en el medio en movimiento se condiciona enteramente por el movimiento macroscópico del medio. En (9.18) también puede ser tomada en consideración la dispersión espacial de origen microscópico. Por fin, señalemos que el vector $\boldsymbol{k}$ en la primera de las fórmulas (9.18) entra en calidad de factor en el producto escalar con el vector $\boldsymbol{V}$. Esto significa, que las propiedades electromagnéticas del medio dependen del ángulo entre los vectores $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{V}$, con otras palabras, durante el movimiento de un medio isótropo, en él aparece anisotropía incluso en el caso cuando en el medio en reposo éste carece de ella.

§ 10. Fuerzas que actúan sobre los elementos del medio en el campo electromagnético

Si ubicamos el medio en el campo electromagnético, ello no provocará la variación de la neutralidad eléctrica de semejante medio, pero conducirá a la aparición en éste de cargas y corrientes inducidas. La interacción tanto de las unas, como de las otras con el campo electromagnético condiciona la existencia de fuerzas que, por parte del campo, actúan sobre los elementos del medio.

10.1. Fuerzas que actúan sobre un dieléctrico en un campo eléctrico continuo. Para simplificar, vamos a considerar que el medio es un líquido dieléctrico isótropo. Cuando se trata de dieléctricos sólidos, la naturaleza de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo no varía, pero la descripción de los fenómenos se complica, ya que las deformaciones del cuerpo provocadas por estas fuerzas no se reducen a la sola variación de su densidad, como sucede en los líquidos. La energía del campo eléctrico continuo en un líquido tiene la forma

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon E^2 dV, \tag{10.1}$$

donde ε es la constante dieléctrica del medio en el campo estático, dV, el elemento de volumen. Esta energía puede también escribirse

$$W = \frac{1}{2} \int \rho_{\text{ext}} \varphi \, dV. \tag{10.2}$$

La variación de la energía (10.1) durante la deformación del medio, será

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int E^2 \delta\varepsilon \, dV + \frac{1}{4\pi} \int \varepsilon E \delta E \, dV. \tag{10.3}$$

La variación equivalente de la energía, representada en la fórmula (10.2), es

$$\delta W = \frac{1}{2}\int \varphi \delta \rho_{ext}\, dV + \frac{1}{2}\int \rho_{ext}\delta\varphi\, dV. \tag{10.4}$$

El símbolo δ está delante de variables que varían con la deformación del medio. El integrando de la segunda integral en (10.3), es igual a

$$\varepsilon \boldsymbol{E}\,\delta \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{D}\,\mathrm{grad}\,(\delta\varphi) = -\mathrm{div}\,(\boldsymbol{D}\,\delta\varphi) + \delta\varphi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{D},$$

por lo que a la expresión (10.3) puede dársele la forma

$$\delta W = \frac{1}{8\pi}\int E^2 \delta\varepsilon\, dV + \int \rho_{ext}\delta\varphi\, dV. \tag{10.5}$$

Sustrayendo ahora (10.5) de la expresión (10.4) duplicada, hallaremos

$$\delta W = -\frac{1}{8\pi}\int E^2 \delta\varepsilon\, dV + \int \varphi\delta\rho_{ext}\, dV. \tag{10.6}$$

Si la deformación del medio transcurre con una distribución fijada de las cargas extrañas, que crean el campo de cebo, la variación de la energía del campo

$$\delta W = -\frac{1}{8\pi}\int E^2 \delta\varepsilon\, dV. \tag{10.7}$$

Otra fórmula de estructura parecida puede ser obtenida de manera análoga cuando durante la deformación son fijadas no las cargas extrañas, sino los potenciales en las superficies destacadas (elegidas).

Al deformarse el medio cambia su constante dieléctrica y la variación de $\delta\varepsilon$ está condicionada por dos circunstancias. Primero, durante la deformación, descrita por el vector de deformación $\boldsymbol{u}$, los elementos del medio pasan del punto $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{u}$ al punto $\boldsymbol{r}$ y, junto con cada elemento del medio, se transfiere el correspondiente valor de la constante dieléctrica. La variación de ésta condicionada por esta transformación, será

$$\varepsilon(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{u}) - \varepsilon(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{u}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon. \tag{10.8}$$

En segundo lugar, la deformación provoca la variación de la densidad del medio en cada punto. De mecánica de los medios continuos sabemos que el cambio de la densidad τ con la deformación está ligada con el vector de deformación mediante la correlación

$$d\tau = -\tau\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}. \tag{10.9}$$

Por esto, la variación de la constante dieléctrica es igual a

$$\delta\varepsilon = -\boldsymbol{u}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon - \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} \tag{10.10}$$

y el cambio de la energía del campo eléctrico

$$\delta W = \frac{1}{8\pi}\int E^2\left(u\,\mathrm{grad}\,\varepsilon + \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\mathrm{div}\,u\right)dV \tag{10.11}$$

es igual al trabajo $\int fu\,dV$ de las fuerzas que actúan sobre el medio, tomado con signo contrario. Así, pues, para obtener la expresión de la densidad de la fuerza f, el integrando en la fórmula (10.11) debe representarse en tal forma que el vector de deformación u entre en él de modo multiplicativo. En semejante forma u está sólo contenido en el primer sumando. El segundo sumando ha de ser transformado:

$$\tau E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\mathrm{div}\,u = \mathrm{div}\left(E^2\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}u\right) - u\,\mathrm{grad}\left(E^2\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right).$$

La fórmula de Gauss — Ostrogradski permite transformar la integral por la divergencia en integral de superficie, que resulta ser nula. Por lo tanto,

$$\int f\cdot u\,dV = -\frac{1}{8\pi}\int\left[E^2\,\mathrm{grad}\,\varepsilon - \mathrm{grad}\left(E^2\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)\right]u\,dV. \tag{10.12}$$

De esta fórmula sigue que la densidad de la fuerza que actúa sobre el medio

$$f = -\frac{1}{8\pi}E^2\,\mathrm{grad}\,\varepsilon + \frac{1}{8\pi}\,\mathrm{grad}\left(E^2\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right) - \nabla p_0. \tag{10.13}$$

El sumando ∇p_0 está relacionado con la presencia en todo líquido de la presión p de tipo hidrostático, cuya variación de punto en punto conduce a la aparición en el líquido de la correspondiente aportación sobre la densidad volumétrica de la fuerza f. Como la deducción de la fórmula (10.13) se basa en la expresión para la energía (10.1) o bien (10.2), las derivadas en (10.13) deben entenderse como derivadas con entropía constante. Correspondientemente, la presión p_0 en (10.13) es la presión que habría en el líquido al no haber campo con la densidad τ prefijada y con entropía.

Si el campo fuese incluido en un proceso de tipo isotérmico, la aportación en la energía libre, dependiente de él, sería igual a

$$\frac{1}{8\pi}\int\varepsilon E^2 dV = \frac{1}{2}\int\varphi\rho_{\mathrm{ext}}\,dV.$$

En tal caso, los segundos miembros de las fórmulas (10.3) y (10.4) serían las variaciones $\delta\int F dV$ de la energía libre. Entonces, la densidad de fuerza tendría como antes la forma (10.13), pero en ésta las derivadas deberían ser comprendidas como isotérmicas en tanto que p_0 tendría que ser la presión sin campo con la densidad y temperatura prefijadas.

Cualquier componente de la densidad de fuerza f_α puede representarse en forma de la derivada de la variable llamada *tensor de tensiones* $\sigma_{\alpha\beta}$. Semejante posibilidad es corolario directo de la ley de conservación del im-

pulso. Como sabemos, la conservación del impulso significa que para cada componente de éste es posible escribir una correlación del tipo de la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0, \tag{10.14}$$

en la que el tensor $\sigma_{\alpha\beta}$ tiene el sentido de la densidad de flujo del impulso. Esta fórmula es equivalente a la expresión

$$f_\alpha = \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \tag{10.15}$$

que liga, precisamente, la densidad de fuerza con el tensor $\sigma_{\alpha\beta}$. Ahora, hallemos el tensor $\sigma_{\alpha\beta}$ correspondiente a la expresión obtenida para la densidad de fuerza f. Para ello, al primer sumando de (10.13) debe atribuírsele la forma de la derivada espacial, mientras que el segundo, ya tiene dicha forma:

$$-\frac{1}{8\pi} E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\varepsilon E^2) + \frac{1}{8\pi} \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_\alpha} E^2 =$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\varepsilon E^2) + \frac{1}{4\pi} \varepsilon E_\beta \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\alpha}. \tag{10.16}$$

Adicionemos a la expresión (10.16) y sustraemos de ella la magnitud $\frac{1}{4\pi} D_\beta \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}$; (10.16) toma la forma

$$-\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\varepsilon E^2) + \frac{1}{4\pi} \varepsilon E_\beta \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\alpha} -$$

$$-\frac{1}{4\pi} \varepsilon E_\beta \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{4\pi} \varepsilon E_\beta \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}.$$

Sumando los sumandos segundo y tercero de esta fórmula, obtenemos

$$\frac{1}{4\pi} D_\beta \left(\frac{\partial E_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta} \right).$$

La expresión entre paréntesis es el componente del vector $\operatorname{rot} \boldsymbol{E}$. Como con un campo continuo $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$, de (10.16) queda la expresión

$$-\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\varepsilon E^2) + \frac{1}{4\pi} D_\beta \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}.$$

Vamos a considerar que en el medio no hay cargas volumétricas, así que en la región del espacio ocupada por el medio $\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0$. Adicionando a

(10.16) un cero en la forma $\frac{1}{4\pi} E_\alpha \frac{\partial D_\beta}{\partial x_\beta}$, obtendremos

$$-\frac{1}{8\pi} E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\varepsilon E^2) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\varepsilon E_\alpha E_\beta).$$

Así, pues, la densidad volumétrica de fuerza

$$f_\alpha = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[E^2 \left(\varepsilon - \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right) \right] \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\varepsilon E_\alpha E_\beta) - \frac{\partial p_0}{\partial x_\alpha}$$

y el tensor de tensiones

$$\sigma_{\alpha\beta} = -p_0 \delta_{\alpha\beta} - \frac{E^2}{8\pi} \left[\varepsilon - \tau \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right) \right] \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon \frac{E_\alpha E_\beta}{4\pi}. \qquad (10.17)$$

El primer sumando en (10.17) describe la parte no eléctrica del tensor de tensiones, los dos restantes están condicionados por la presencia del campo eléctrico.

Puede resultar más cómodo el cálculo de la fuerza total, que actúa sobre el medio, mediante el tensor $\sigma_{\alpha\beta}$ que con ayuda de f_α, ya que en el primer caso es suficiente resolver una integral doble y no triple.

Las fuerzas con las que la superficie de separación de dos medios en contacto actúan entre sí deben ser, en condiciones de equilibrio, iguales en valor y de sentido inverso:

$$\sigma^{(1)}_{\alpha\beta} n^{(1)}_\beta = -\sigma^{(2)}_{\alpha\beta} n^{(2)}_\beta.$$

Como los versores de la normal a la superficie del primer medio $n^{(1)} = -n^{(2)}$, entonces

$$\sigma^{(1)}_{\alpha\beta} n^{(1)}_\beta = -\sigma^{(2)}_{\alpha\beta} n^{(1)}_\beta.$$

Esto nos indica que si el primer medio está con el segundo en equilibrio, al calcular la fuerza la integral $\oint \sigma_{\alpha\beta} n_\beta dS$ puede tomarse tanto por la superficie exterior del medio, como por la interior.

10.2. Fuerzas que actúan sobre un material magnético ubicado en un campo magnético continuo. Un razonamiento totalmente análogo al aducido más arriba, nos permite determinar la fuerza que actúa sobre el medio en un campo magnético continuo. El correspondiente tensor de tensiones es obtenido de (10.17) sustituyendo ε por μ^{-1} y E por B:

$$\sigma_{\alpha\beta} = -p_0 \delta_{\alpha\beta} - \frac{B^2}{8\pi} \left[\mu^{-1} - \tau \left(\frac{\partial \mu^{-1}}{\partial \tau} \right) \right] \delta_{\alpha\beta} + \mu^{-1} \frac{B_\alpha B_\beta}{4\pi}. \qquad (10.18)$$

La parte de la densidad de la fuerza volumétrica condicionada por el campo magnético, es igual a

$$f = +\frac{1}{8\pi} \operatorname{grad} \left[B^2 \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{\mu} \right) \right] - \frac{1}{8\pi} B^2 \operatorname{grad} \frac{1}{\mu}. \qquad (10.19)$$

10.3. Fuerzas en el campo electromagnético alternativo. Ahora, generalicemos los resultados obtenidos para el campo electromagnético alternativo, cuando hay que tomar en consideración la dispersión temporal de la constante dieléctrica. Examinemos un dieléctrico líquido (cuya permitividad es función de la frecuencia del campo) ubicado en un campo eléctrico alternativo de una frecuencia que se halla en el ámbito de transparencia del dieléctrico. La deducción de las fórmulas (10.13) y (10.17) de modo sustancial se basaba en la expresión (10.1) para la energía de campo eléctrico en un medio, sólo válida para un campo continuo. La densidad de energía, media según el tiempo, del campo eléctrico en un medio dispersante tiene la forma (véase la fórmula (8.19))

$$w = \frac{\overline{E^2}}{8\pi} \frac{d}{d\omega} (\omega\varepsilon(\omega)). \tag{10.20}$$

Por esta razón, asimismo era de esperar que en la expresión para el tensor de tensiones en un campo alternativo aparecerían términos adicionales que contuviesen $d\varepsilon(\omega)/d\omega$. Más abajo será mostrado que, a pesar de todo, esto no es así, el tensor de tensiones también se da en el campo alternativo con la fórmula (10.17), pero mediada según el tiempo.

Consideremos un condensador lleno de un dieléctrico con la constante dieléctrica $\varepsilon(\omega)$ a cuyas armaduras se alimenta un potencial variable

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t \tag{10.21}$$

en el que la frecuencia de variación de ω se encuentra en la región de transparencia del medio, así que $\operatorname{Im} \varepsilon(\omega) = 0$. Semejante condensador no es de por sí un sistema eléctrico cerrado, pero puede convertirse en parte de tal sistema si unimos el condensador con una bobina de inductancia, formando de este modo un circuito oscilante con frecuencia propia ω.

Obtengamos ahora la expresión para la energía de un condensador de capacidad C, relleno de un dieléctrico dispersante. La energía del condensador al que se aplica una tensión constante φ y que porta en las armaduras una carga constante Q, es igual a

$$W = W_0 + Q^2/2C = W_0 + C(\varphi^2/2). \tag{10.22}$$

Aquí hemos hecho uso de la noción de capacidad eléctrica determinada como la razón entre la carga y la diferencia de potencial en las armaduras del condensador.

Por otro lado, la energía del condensador puede escribirse en la forma (10.1). La generalización de ésta para el campo alternativo es la fórmula (10.20). Por ello, para un campo alternativo la generalización de la fórmula (10.22) es la expresión

$$W = W_0 + \frac{\overline{\varphi^2}}{2} \frac{d}{d\omega} (\omega C). \tag{10.23}$$

De acuerdo con la definición de la autoinducción, la energía media ligada con ella es $\overline{LJ^2}/2c^2$. Si despreciamos la resistencia, el potencial φ en las armaduras del condensador estará ligado con la corriente J en el circuito oscilante mediante la conocida correlación:

$$\varphi = -\frac{1}{c^2} L \frac{dJ}{dt}.$$

Con la particularidad de que J se expresa por medio de la carga Q en las armaduras del condensador con la fórmula $J = dQ/dt$ que sigue directamente de la ecuación de continuidad. Si las características del campo eléctrico varían según una ley armónica $J = -i\omega Q$ y $dJ/dt = -\omega^2 Q$, así, que

$$\varphi = \frac{1}{c^2} L\omega^2 Q.$$

Tomando en consideración la definición de la capacidad $C(\omega) = Q/\varphi$, de la anterior fórmula obtenemos

$$\omega = c/\sqrt{LC(\omega)}.$$

De forma que la relación de Thomson entre la frecuencia y las características fundamentales del circuito oscilante sólo tiene lugar al haber dispersión. Las fórmulas aducidas más arriba permiten representar la energía, ligada a la autoinducción, en otra forma:

$$\frac{\overline{LJ^2}}{2c^2} = \frac{1}{2c^2} L\omega^2 \overline{Q^2} = \frac{C}{2} \overline{\varphi^2}.$$

Por lo tanto, la energía total de un sistema cerrado tendrá el aspecto

$$W = W_0 + \frac{\overline{\varphi^2}}{2} \frac{d}{d\omega} (\omega C) + \frac{\overline{C\varphi^2}}{2} = W_0 + \frac{\overline{\varphi^2}}{2\omega} \frac{d}{d\omega} (\omega^2 C). \qquad (10.24)$$

Ahora, deformemos lentamente el condensador. Con ello las fuerzas exteriores realizarán sobre él un trabajo

$$\delta A = \sigma_{\alpha\beta} \xi_\alpha n_\beta S. \qquad (10.25)$$

Aquí $\vec{\xi}$ es el desplazamiento, n, la normal a la superficie, S, su área.

Calculemos la variación de la energía W del sistema e, igualando δA y δW, hallemos la forma del tensor $\sigma_{\alpha\beta}$. Como sabemos de mecánica, con la variación infinitamente lenta de los parámetros de un sistema oscilatorio lineal queda constante el llamado invariante adiabático, igual a la razón entre la energía de las oscilaciones W_{osc} y la frecuencia ω:

$$W_{osc}/\omega = \text{const}. \qquad (10.26)$$

De esta fórmula se desprende que $\delta W - W\delta\omega/\omega = 0$, de manera que el cambio de la frecuencia propia durante la deformación $\delta\omega$ está ligado con

δW mediante la correlación

$$\delta W = \frac{\delta\omega}{\omega^2}\frac{\overline{\varphi^2}}{2}\frac{d}{d\omega}(\omega^2 C). \tag{10.27}$$

Como la frecuencia propia de las oscilaciones $\omega = c/\sqrt{LC}$, la variación de la frecuencia en el transcurso de la deformación está relacionada con el cambio de la capacidad del condensador mediante la fórmula

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{1}{2}\frac{\delta C}{C}. \tag{10.28}$$

La variación total de la capacidad δC (que designaremos por δC_{def}) está directamente condicionada por la deformación del condensador y el cambio de la frecuencia, ya que la capacidad es función de la frecuencia

$$\delta C = \delta C_{\text{def}} + \frac{dC}{d\omega}\delta\omega. \tag{10.29}$$

La magnitud δC_{def} se expresa con el vector $\vec{\xi}$ del mismo modo que en caso estático. Eliminando en (10.28) y (10.29) la razón $\delta C/C$, obtenemos

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \delta C_{\text{def}} \Big/ \left[\frac{1}{\omega}\frac{d(\omega^2 C)}{d\omega}\right]. \tag{10.30}$$

Sustituyendo esta fórmula en (10.27), hallamos

$$\delta W = \frac{\overline{\varphi^2}}{2}\delta C_{\text{def}}. \tag{10.31}$$

Como sigue de (10.22), la variación de la energía eléctrica del condensador con carga constante en las armaduras, tiene la forma

$$\delta W = -\frac{Q^2}{2c^2}\delta C = -\frac{\varphi^2}{2}\delta C. \tag{10.32}$$

De (10.31) y (10.32) se deduce que las fórmulas que describen la variación de la energía del campo en el caso estático y la de la energía del campo, mediada por el período, tienen la misma estructura. Por ello, al tratar un campo alternativo, el tensor de tensiones se obtiene mediando la fórmula (10.17) por el período:

$$\sigma_{\alpha\beta} = -p_0\delta_{\alpha\beta} - \frac{\overline{E^2}}{8\pi}\left[\varepsilon - \tau\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)\right]\delta_{\alpha\beta} + \varepsilon\frac{\overline{E_\alpha E_\beta}}{4\pi}. \tag{10.33}$$

Con el campo electromagnético alternativo está ligada la aparición de otro sumando más en la expresión para la densidad de fuerza volumétrica. El origen de este sumando se comprende de la mejor forma si escribimos la expresión para la ley de la conservación del impulso en la forma

$$\frac{\partial p_\alpha^F}{\partial t} + \frac{\partial p_\alpha^M}{\partial t} - \frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0, \tag{10.34}$$

donde p^M es la densidad del impulso del medio, p^F, la densidad del impulso del propio campo electromagnético. El impulso total del sistema "medio — campo en interacción" $p = p^F + p^M$. Si nos interesa la fuerza que actúa sobre el medio, podemos escribirla así

$$f_\alpha^M = \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial p_\alpha^F}{\partial t}. \tag{10.35}$$

El segundo sumando que aparece en el segundo miembro de (10.35) no tiene la forma de derivada espacial del tensor de tensiones. En la fórmula (10.35) $p^F = \frac{1}{4\pi c} E \times B$. Este último sumando es, por regla, pequeño.

§ 11. Campos medio y eficaz en los medios

Hasta el momento hemos tratado campos microscópicos o bien macroscópicos en los medios. El campo macroscópico que figura en las ecuaciones macroscópicas de Maxwell es resultado de la mediación del campo microscópico por los estados de todas las partículas del medio. Precisamente mediante este campo macroscópico se determina la fuerza que actúa en el medio sobre una pequeña carga macroscópica introducida del exterior. No obstante, la fuerza que actúa sobre cada carga propia aislada, perteneciente al medio, no se determina por el campo medio. La cuestión radica en que sobre la partícula del medio que yace en cierto punto r, además del campo de las cargas y corrientes exteriores, actúa el campo creado por todas las partículas del medio, salvo la que consideramos.

Si tenemos en cuenta el más importante caso, es decir, el del campo eléctrico, podemos estar seguros de que el campo que actúa sobre la partícula a considerar, es menor que el medio. En efecto, la respuesta de las partículas del medio al efecto del campo eléctrico exterior se reduce al debilitamiento de este campo. Sin tener en cuenta la aportación de la partícula que consideramos en dicha respuesta, obtenemos un campo que, por lo menos, no será menor que el medio. Aunque el número de todas las demás cargas del medio, salvo la que observamos, es grande en comparación con la unidad, la aportación de la carga que hemos destacado en el campo sumario puede ser suficientemente grande, ya que nos interesa el más próximo entorno de dicha carga. Este campo que actúa sobre una partícula aislada del medio o bien sobre un elemento polarizable de éste, recibe el nombre de *campo eficaz**).

*) Hablando en rigor, hay una causa más que conduce a la distinción del campo que actúa sobre un elemento aislado polarizable del medio. P. ej., está claro que un cristal, junto al núcleo atómico, el campo que actúa siempre se diferenciará de modo sustancial del campo medio por todo el cristal debido, simplemente, a la no homogeneidad espacial del átomo y a la disposición regular de los átomos en la red cristalina. La causa es trivial. En el presente parágrafo se considera la diferencia entre los campos que actúa y medio en los medios que podemos considerar espacialmente homogéneos.

El campo eficaz está enlazado con la fuerza que actúa sobre la partícula del medio. La densidad de ésta se determina con la fórmula (10.13) en la que entra el campo medio E. Cuando se trata de un dieléctrico líquido homogéneo e isótropo ubicado en campo eléctrico continuo, la densidad de la fuerza que actúa sobre el medio

$$f = \frac{\tau}{4\pi}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right)(E\cdot\nabla)E. \tag{11.1}$$

Por otro lado, esta fuerza puede representarse así

$$<\sum_m (p_m\cdot\nabla)E_m>. \tag{11.2}$$

Aquí p_m son los valores microcópicos de cada momento dipolar aislado inducido por el campo en la sustancia, E_m, los valores microscópicos del campo eléctrico en el lugar donde se dispone este momento dipolar elemental. La suma por m se toma por todos los dipolos por la unidad de volumen de la sustancia. El paréntesis angular es símbolo de la mediación.

Desarrollando el campo eléctrico microscópico en la serie de Taylor por las potencias de las coordenadas r_m de los dipolos elementales y reteniendo en el desarrollo los dos primeros sumandos, la densidad de fuerza (11.2) puede escribirse en la forma

$$<\sum_m (p_m\cdot\nabla)E_m>=<\sum_m (p_m\cdot\nabla)[E_0+(r_m\cdot\nabla)E_0]> \tag{11.3}$$

(suponemos que el origen de coordenadas se halla en el centro de un volumen unitario), E_0 es la intensidad del campo eléctrico en el origen de coordenadas; el ∇ entre corchetes, aplicado a E_0, debe entenderse como la derivada del campo tomada en el origen de coordenadas. El cálculo directo de esta expresión en las proyecciones nos proporciona $f = (P\cdot\nabla)E_0$, donde $P = \sum_m p_m$ es la densidad del momento dipolar. Como sigue de lo expuesto anteriormente, la intensidad del campo eléctrico E_0 es el campo medio microscópico que actúa sobre un dipolo aislado, por lo que la magnitud E_0 puede identificarse con el campo eficaz E^{ef} y representar f como

$$f = (P\cdot\nabla)E^{ef}. \tag{11.4}$$

Comparando las expresiones (11.1) y (11.4) hallamos que las intensidades de los campos medio y eficaz están ligadas con la correlación

$$E^{ef} = \frac{\tau}{\varepsilon - 1}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right)E. \tag{11.5}$$

Como fue establecido en el parágrafo anterior la fórmula (11.1) no sólo es válida para los campos estáticos, por lo que la fórmula (11.5) también es justa para un campo alternativo en un medio dispersante sin absorción.

Si la constante dieléctrica ε depende de la densidad τ del medio de modo lineal, es decir, $\varepsilon = 1 + c\tau$, donde c es cierta constante,

$$\frac{\tau}{\varepsilon - 1}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right) = 1$$

y campo medio coincide con el eficaz. La dependencia lineal entre ε y τ es de esperar en medios enrarecidos, p. ej., en el plasma. En lo que atañe a los medios condensados, la constante dieléctrica es función no lineal de la densidad del medio.

La relación (11.5) entre los campos eficaz y medio nos permite establecer la ligazón entre las magnitudes macroscópica y microscópica, es decir, entre la constante dieléctrica ε y la polarizabilidad atómica o molecular. Con este fin igualemos dos expresiones para la densidad del momento dipolar del medio $\boldsymbol{P}$:

$$\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \boldsymbol{E} = n\chi_a \boldsymbol{E}^{\text{ef}},$$

donde n es la concentración de átomos o moléculas en el medio, χ_a, la polarizabilidad microscópica (atómica o molecular). Como resultado, teniendo en cuenta (11.5), obtenemos

$$\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} = n\chi_a \frac{\tau}{\varepsilon - 1}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right). \tag{11.6}$$

De acuerdo con el sentido de la definición de la polarizabilidad χ_a, en ocasiones ella puede considerarse como una magnitud independiente de la densidad del medio τ. Entonces, la fórmula

$$\chi_a = \frac{(\varepsilon - 1)^2}{4\pi n \tau} \frac{1}{(\partial \varepsilon / \partial \tau)} \tag{11.7}$$

permite, por un lado, apreciar la magnitud microscópica χ_a partiendo de las mediciones de la magnitud macroscópica ε y, por otro lado, proporciona la ecuación diferencial, cuya solución determina la forma de la dependencia $\varepsilon(\tau)$ junto con la suposición de que $\chi_a = \text{const}$. La ecuación correspondiente tiene el aspecto

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{1}{4\pi\chi_a} \frac{(\varepsilon - 1)^2}{n\tau}. \tag{11.8}$$

Si la concentración n es proporcional a la densidad τ, de modo que $n = b\tau$, la ecuación (11.8) se reduce a la fórmula

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{1}{4\pi b\chi_a} \frac{1}{\tau^2} (\varepsilon - 1)^2. \tag{11.9}$$

Pero puede ser imposible representar la densidad del momento dipolar $\boldsymbol{P}$ como la suma de los momentos dipolares elementales, cuya polarizabilidad no depende de τ. Si esto es o no así debe aclararse en cada caso sobre la base de la teoría microscópica electrónica de la estructura del medio. Por

ello, es posible hallar la magnitud $\frac{\tau}{\varepsilon - 1}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right)$ en (11.5) en función del carácter del medio y partiendo de otros razonamientos simuladores.

Razonamientos próximos a los simuladores son necesarios al calcular la derivada $\partial\varepsilon/\partial\tau$ en (11.7) y en aquellos casos cuando se cumple la correlación $n = b\tau$. Con esto, conseguimos expresar la derivada $\partial\varepsilon/\partial\tau$ mediante ε y τ. Mostremos un ejemplo de semejante enfoque.

Destaquemos en la sustancia una región esférica de radio macroscópico R que rodea un punto en el que se encuentra el dipolo elegido. La energía de interacción U entre este dipolo y todos los demás dipolos de la región esférica, será

$$\sum_i \frac{p \cdot p_i - 3(n_i \cdot p)(n_i \cdot p_i)}{r_i^3},$$

donde p es el momento dipolar destacado; la suma se toma por todos los restantes momentos dipolares p_i situados dentro de la región esférica, r_i, la

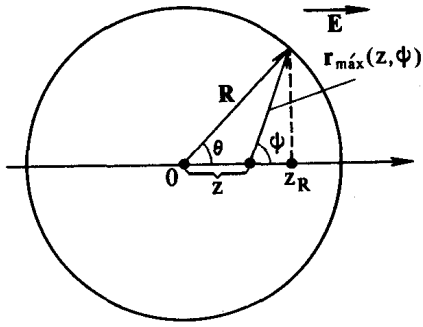

Fig. 11.1

distancia desde el centro de la esfera hasta el dipolo i-ésimo. Considerando que todos los dipolos son paralelos entre sí, representamos la anterior suma del siguiente modo

$$p \sum_i p_i \frac{1 - 3\cos^2 \psi_i}{r^3},$$

aquí $\psi_i = (\widehat{n_i, p_i})$. Con la descripción macroscópica podemos sustituir esta suma con la integral por el volumen de la esfera:

$$pP \int \frac{1 - 3\cos^2 \psi}{r^3} dV.$$

Si el dipolo (y el origen de coordenadas junto con él) está en el centro de la esfera, la parte angular de la integral se anula. Esto se desprende de que la magnitud $1 - 3\cos^2 \psi$, con una precisión salvo el factor constante, coincide con el polinomio de Legendre $P_2^0(\cos \psi)$.

Aquí es cero no sólo U, sino también la fuerza $F = -\nabla U$ con la que la sustancia polarizada ubicada dentro de la esfera actúa sobre el dipolo en el centro de ésta. Mostremos esto. Para ello examinemos un dipolo que yace a una distancia z del centro de una esfera llena de sustancia (fig. 11.1). La energía U de interacción entre el dipolo y la sustancia tendrá la forma

$$2\pi pP \int_{-1}^{+1} d\cos\psi(1 - 3\cos^2\psi) \int_0^{r_{\text{máx}}(z,\psi)} \frac{dr}{r},$$

donde r es la distancia desde el punto $x = y = 0, z \neq 0$, donde se encuentra el dipolo, hasta cualquier punto en los límites de la esfera. Con z y ψ fijados la magnitud r puede variar desde 0 hasta $r_{\text{máx}}(z, \psi)$. La dependencia $r_{\text{máx}}(z, \psi)$ se puede hallar mediante la relación

$$r^2_{\text{máx}}(z, \psi) = x_R^2 + y_R^2 + (z - z_R)^2.$$

Aquí x_R, y_R, z_R son las coordenadas cartesianas de un punto arbitrario de la superficie de la esfera. Como $z_R - z = r_{\text{máx}} \cos\psi$

$$r^2_{\text{máx}} = R^2 + z^2 - 2z(z + r_{\text{máx}} \cos\psi).$$

La solución de esta ecuación cuadrada determina la dependencia entre $r_{\text{máx}}$ y z y $\cos\psi$:

$$r_{\text{máx}} = -z\cos\psi + \sqrt{z^2\cos^2\psi + R^2 - z^2}.$$

Por esto

$$U = 2\pi pP \int_{-1}^{+1} d\cos\psi(1 - 3\cos^2\psi)\ln(-z\cos\psi + \sqrt{z^2\cos^2\psi + R^2 - z^2}),$$

en tanto que la derivada de U por z (las derivadas por las demás direcciones son nulas, como queda claro a causa de la simetría)

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -2\pi pP \int_{-1}^{+1} d\cos\psi(1 - 3\cos^2\psi) \times$$

$$\times \frac{\dfrac{z(\cos^2\psi - 1)}{\sqrt{z^2\cos^2\psi + R^2 - z^2}} - \cos\psi.}{\sqrt{z^2\cos^2\psi + R^2 - z^2} - z\cos\psi}$$

Con $z = 0$ esta fuerza es igual a

$$F_z = \frac{2\pi pP}{R} \int_{-1}^{+1} d\cos\psi(1 - 3\cos^2\psi)\cos\psi.$$

Pero $3\cos^2\psi - 1$ es proporcional al polinomio de Legendre P_2^0 y $\cos\psi \sim P_1^0$, por lo que debido a la ortogonalidad de los polinomios de Legendre,

$$F_z(z = 0) = 0.$$

Por consiguiente, los dipolos que se encuentran dentro de la esfera nada aportan al campo eficaz. En lo que respecta al campo medio, dichos dipolos introducen una aportación que es distinta de cero. Debido a esto, $|E^{ef} - E|$ se diferencia en un valor igual a la suma de los campos de todos los dipolos de la región esférica E_{esf}. El campo E_{esf} es el de una esfera dieléctrica de polarización P en los límites de ésta. Semejante esfera crea en su propio interior un campo $E_{esf} = -4/3\pi P$. Así, pues,

$$E^{ef} = E + \frac{4}{3}\pi P = \frac{\varepsilon + 2}{3} E. \tag{11.10}$$

El valor del campo eficaz permite establecer la correspondencia entre las magnitudes macroscópica y microscópica, es decir, entre la constante dieléctrica ε y la polarizabilidad χ_a atómica o molecular. Esta última se determina con la fórmula

$$P = n\chi_a E^{ef}, \tag{11.11}$$

donde n es la concentración de dipolos. De (11.10), (11.11) y la fórmula $P = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E$ se deduce que ε y χ_a están enlazadas con la relación

$$\chi_a = \frac{3}{4\pi n} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}, \tag{11.12}$$

que lleva el nombre de *fórmula de Clausius — Mossotti*. En la zona óptica del espectro, donde se suele trabajar con índice de refracción $N = \sqrt{\varepsilon}$, esta fórmula toma la forma

$$\chi_a = \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} \frac{3}{4\pi n} \tag{11.13}$$

y se denomina *fórmula de Lorentz — Lorentz*.

De la comparación de las fórmulas de Clausius — Mossotti y (11.7) se deduce, que

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right) = \frac{(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 1)}{3\tau}. \tag{11.14}$$

Poniendo (11.12) en (11.9) llegamos de nuevo a (11.14), lo que quiere decir que la fórmula de Clausius — Mossotti concuerda con la suposición sobre la proporcionalidad de n y τ. Para terminar señalemos que la fórmula de Clausius — Mossotti es precisa para los cristales cúbicos con disposición fijada de las moléculas polarizantes y aproximada, para los líquidos.

Las fórmulas (11.6) — (11.13) que hemos obtenido en la suposición de que la polarizabilidad microscópica se determina sólo por las propiedades de cada elemento polarizable aislado estructural, son aplicables a los dieléctricos apolares (neutros). Las propiedades de los dieléctricos polares son del mayor interés en el caso de campos estáticos o de baja frecuencia y serán estudiados en el siguiente capítulo.

Capítulo II. Campo eléctrico continuo en medios

§ 12. Campo eléctrico en el entorno de los conductores

El campo eléctrico exterior conduce a la aparición de cargas inducidas en los conductores. A su vez, las cargas inducidas varían el campo eléctrico inicial. El campo resultante en el espacio entre los conductores satisface las ecuaciones de electrostática:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0. \tag{12.1}$$

Después de conectar el campo exterior y de la redistribución de las cargas, provocada por él, el campo eléctrico dentro del conductor se anula. En caso contrario, en los conductores debería existir corriente y observarse la disipación de la energía. En ciertas condiciones, semejante proceso puede ser estacionario, pero no estático. Para que el campo $\boldsymbol{E}$ en el interior de los conductores sea igual a cero, todas las cargas inducidas deben encontrarse en la superficie de los cuerpos conductores. Esto significa que las condiciones de frontera en la superficie de separación conductor — vacío toman el aspecto

$$E_\tau|_S = 0 \qquad \text{o bien} \qquad \varphi|_S = \text{const}, \tag{12.2}$$

$$E_n|_S = 4\pi\sigma \qquad \text{o bien} \qquad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S = -4\pi\sigma, \tag{12.3}$$

donde σ es la densidad superficial de la carga. De las condiciones (12.2) sigue que las líneas de fuerza del campo eléctrico en las proximidades de la superficie conductora están dirigidas por la normal a dichas superficies; de las condiciones de (12.3) se desprende que la carga total en la superficie

$$Q = \oint \sigma \, dS = \frac{1}{4\pi} \oint E \, dS. \tag{12.4}$$

Para que en el espacio entre los conductores y sobre sus superficies el campo esté determinado por completo, hay que prefijar bien los potenciales de los conductores o bien sus cargas totales. La densidad superficial de la carga σ no puede preestablecerse al azar; ella depende de la disposición, forma y carga de todos los conductores en el sistema, incluido el dado, y se calcula con las fórmulas (12.3) después de determinar el potencial electrostático φ por todo el espacio.

Sobre la superficie de un conductor ubicado en el campo eléctrico actúa una fuerza que puede ser determinada mediante el tensor de tensiones de Maxwell (véase la fórmula (16.39), P. I). De la condición $E_\tau|_S = 0$ obtenemos de inmediato que la densidad superficial de dicha fuerza es igual a $(E^2/8\pi)\boldsymbol{n}$. Esta fuerza va dirigida por la normal exterior a la superficie en el sentido del conductor al vacío.

El potencial escalar del campo puede tener valor máximo y mínimo sólo en la superficie del conductor. Si fuese posible que el potencial φ tuviese también extremos en el vacío, en el espacio entre los conductores, podríamos destacar una superficie cerrada tan pequeña, que rodearía un punto del espacio en el que φ es extremo, de forma que la derivada $\partial\varphi/\partial n$ en dicha superficie tuviera en todo lugar un mismo signo. Entonces la integral $\oint \partial\varphi/\partial n\, dS$, tomada por toda la superficie, sería diferente de cero. Pero esto contradiría la ecuación $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$ de la que sigue de inmediato que la integral $\oint \partial\varphi/\partial n\, dS$, por cualquier superficie cerrada situada entre los conductores en el vacío, es igual a cero. En este sentido, la existencia de conductores polarizantes no varía la situación que existe en electrostática microscópica con sólo cargas extrañas.

Para los potenciales del campo electrostático puede ser enunciado el teorema de la reciprocidad. Para ello, en la fórmula de Green (véase (20.1), P. I.)

$$\int (\psi \Delta\varphi - \varphi \Delta\psi) dV + \int \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}\right) dS \tag{12.5}$$

en calidad de funciones φ y ψ tomamos dos soluciones diferentes del problema electrostático a las que corresponden dos distribuciones distintas de las cargas que crean el campo. La integral en el primer miembro de (12.5) se toma por todo el espacio, la del segundo miembro, por una superficie infinitamente alejada y por las superficies de todos los conductores. La primera integral se anula si todos los conductores cargados se hallan en una región finita del espacio.

Como en el espacio que rodea a los conductores $\Delta\varphi = \Delta\psi = 0$, de la fórmula de Green y de las fórmulas (12.2) y (12.3) sigue, que

$$\sum_a \varphi_a Q_\psi^{(a)} = \sum_a \psi_a Q_\varphi^{(a)}, \tag{12.6}$$

aquí la suma se toma por todos los conductores. Los potenciales escalares ψ y φ son magnitudes constantes en la superficie de cada conductor, por lo que pueden ser sacados de los signos de la integral. Teniendo también en cuenta la fórmula (12.4) a la correlación (12.6) puede dársele la forma

$$\sum_a \varphi_a Q_\psi^{(a)} = \sum_a \psi_a Q_\varphi^{(a)}. \tag{12.7}$$

Aquí $Q_\psi^{(a)}$ y $Q_\varphi^{(a)}$ son las cargas totales en el a-ésimo conductor correspondientes a los potenciales φ y ψ en el espacio que rodea a los conductores. La fórmula (12.7) es la enunciación matemática del *teorema de reciprocidad* en electrostática. De este teorema sigue directamente que si, p. ej., tenemos dos conductores I y II y el primero porta la carga Q (con ello el potencial en su superficie es φ_I), en tanto que el segundo no está cargado (el potencial en su superficie es φ_{II}) y si, además, transferir toda la carga Q del primer con-

ductor al segundo, en el conductor I se establecerá el potencial ψ que antes se hallaba en el conductor II. En efecto, cuando tenemos dos conductores de este tipo la fórmula (12.7) toma la forma $Q\varphi_{II} = Q\psi_I$ de donde sigue de inmediato, que

$$\psi_I = \varphi_{II}. \tag{12.8}$$

Este resultado no depende de la forma de los conductores.

Ahora, introduzcamos la noción de capacidad eléctrica de los conductores. Examinemos un sistema de conductores y, de cierta forma, cambiemos el potencial en uno de ellos, digamos en el g-ésimo conductor. Con ello, sea que los potenciales de los demás conductores quedan invariables. Con el fin de que dichos potenciales no cambien, deberemos variar las cargas en todos los conductores de forma que las nuevas cargas sean iguales a $Q^{(a)} + \delta Q^{(a)}$. El potencial del g-ésimo conductor será designado por $\varphi_g + \delta\varphi_g$. En tal caso, la relación (12.7) adquirirá el aspecto

$$Q^{(g)}\delta\varphi_g = \sum_a \varphi_a \delta Q^{(a)}$$

y

$$Q^{(g)} = \sum_a \varphi_a \delta Q^{(a)}/\delta\varphi_g. \tag{12.9}$$

Aquí se realiza la suma por todos los conductores, incluido el g-ésimo.

Introduzcamos la designación

$$\delta Q^{(a)}/\delta\varphi_g = C_{ga} \tag{12.10}$$

de manera, que

$$Q^{(g)} = \sum_a C_{ga}\varphi_a. \tag{12.11}$$

Esta última fórmula muestra que las cargas de los conductores son funciones lineales de sus potenciales, entre los cuales la ligazón lineal está condicionada por la linealidad de las ecuaciones de electrostática.

Los elementos diagonales de la matriz $\hat{C}$, determinada con la fórmula (12.10), reciben el nombre de *coeficientes de capacidad electrostática* y los no diagonales, *coeficientes de inducción electrostática*. En aquellos casos, cuando sólo hay un conductor, la fórmula (12.11) toma la forma $Q = C\varphi$. El coeficiente C lleva el nombre de *capacidad* de semejante conductor.

La energía del campo eléctrico

$$W = \frac{1}{8\pi}\int E^2 dV = -\frac{1}{8\pi}\int E\cdot\nabla\varphi\, dV = -\frac{1}{8\pi}\int \nabla(\varphi E)dV. \tag{12.12}$$

ya que $\varphi\nabla\cdot E = 0$. Transformando con la fórmula de Gauss — Ostrogradski la integral de volumen en integral de superficie, obtenemos

$$W = \frac{1}{2}\sum_a \varphi_a \oint E_a\cdot dS_a = \frac{1}{2}\sum_a \varphi_a Q^{(a)}. \tag{12.13}$$

Pongamos en (12.13) la fórmula (12.11) y escribamos la energía en la forma

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ab} C_{ab} \varphi_a \varphi_b. \tag{12.14}$$

La energía W siempre es positiva, ya que lo es la primera integral en (12.12). De la positividad de W se desprende, en particular, que todos los elementos diagonales de la matriz C son positivos y los no diagonales, negativos.

La variación de la energía del campo, con el cambio infinitesimal de las cargas o los potenciales en los conductores, tiene el aspecto

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int E \, \delta E \, dV.$$

Al cambiar las cargas de los conductores

$$\delta W = -\frac{1}{4\pi} \int \nabla \varphi \cdot \delta E \, dV = -\frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div} (\varphi \, \delta E) \, dV =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_a \varphi_a \oint \delta E_a \cdot dS_a = \sum_a \varphi_a \delta Q^{(a)};$$

aquí se hizo uso de la ecuación $\operatorname{div} \delta E = 0$ que se desprende de (12.1).

Durante la variación de los potenciales, un cálculo análogo nos proporciona

$$\delta W = -\frac{1}{4\pi} \int E \cdot \nabla \delta \varphi \, dV = \sum_a Q^{(a)} \delta \varphi_a.$$

De estas fórmulas hallamos

$$\partial W / \partial Q^{(a)} = \varphi_a, \qquad \partial W / \partial \varphi_a = Q^{(a)}. \tag{12.15}$$

Como la energía W es función de estado, las derivadas mixtas $\partial^2 W / \partial \varphi_a \partial \varphi_b$ y $\partial^2 W / \partial \varphi_b \partial \varphi_a$ deben ser iguales:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} = \frac{\partial Q^{(a)}}{\partial \varphi_b} = C_{ab}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi_b \partial \varphi_a} = \frac{\partial Q^{(b)}}{\partial \varphi_a} = C_{ba}.$$

Aquí se ha empleado la fórmula (12.11). De la igualdad de las derivadas mixtas llegamos a la conclusión de que la matriz C es simétrica y, que

$$C_{ab} = C_{ba}. \tag{12.16}$$

Para terminar, introducimos el concepto de tensor de polarizabilidad de un cuerpo conductor. Las cargas inducidas en el conductor por un campo exterior homogéneo crean el momento dipolar P que depende de la forma del

cuerpo. Semejante momento es lineal según el campo, de manera que

$$P_\alpha = V\pi_{\alpha\beta}E_\beta, \tag{12.17}$$

donde V es el volumen del cuerpo, $\pi_{\alpha\beta}$, un tensor que toma en cuenta la influencia de la forma del cuerpo sobre el momento dipolar inducido, E_β, el valor del campo lejos del cuerpo. La magnitud $V\pi_{\alpha\beta}$ se denomina *tensor de polarizabilidad* del cuerpo. P. ej., es fácil ver que la energía de interacción W del cuerpo con una carga puntual, alejada de él a gran distancia y que crea el campo E, tiene la forma

$$W = -1/2V\pi_{\alpha\beta}E_\alpha E_\beta. \tag{12.18}$$

§ 13. Campo eléctrico en medios no conductores

En semejantes medios no puede haber corriente estacionaria, pero pueden existir cargas volumétricas inducidas. En tales medios las ecuaciones de electrostática tienen el aspecto

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\boldsymbol{E} &= 0, \\ \mathrm{div}\boldsymbol{D} &= 4\pi\rho_{\mathrm{ext}}. \end{aligned} \tag{13.1}$$

La diferencia entre el vector $\boldsymbol{D}$ y la intensidad de campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ está condicionada por la aparición de cargas inducidas, cuya densidad volumétrica

$$\rho = -\mathrm{div}\boldsymbol{P} = -\mathrm{div}\frac{\boldsymbol{D}-\boldsymbol{E}}{4\pi}. \tag{13.2}$$

De la última fórmula sigue que en la superficie de un dieléctrico polarizado, pueden existir cargas superficiales inducidas, cuya densidad σ es igual al componente normal del vector de densidad de polarización

$$\sigma = P_n. \tag{13.3}$$

De las ecuaciones (13.1), de manera habitual, obtenemos las condiciones de frontera en la superficie de separación de los medios:

$$E_{\tau_1} = E_{\tau_2}, D_{n_1} - D_{n_2} = 4\pi\sigma_{\mathrm{ext}}. \tag{13.4}$$

De la primera ecuación (13.1) sigue que $\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$, en tanto que la segunda ecuación (13.1) nos ofrece la ecuación para hallar el potencial escalar del campo eléctrico:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}\right) = -4\pi\rho_{\mathrm{ext}}. \tag{13.5}$$

El tensor $\varepsilon_{\alpha\beta}$ que figura en la ecuación (13.5) enlaza los vectores $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{E}$. Cuando es posible despreciar la dispersión espacial (lo que siempre se puede realizar cuando la variación del campo en el espacio es suficientemente suave), la constante dieléctrica se reduce a una magnitud algebraica

(no operacional). En el siguiente parágrafo mostraremos que el tensor $\varepsilon_{\alpha\beta}$ es simétrico ($\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha}$). Como todo vector simétrico de segundo rango, éste puede reducirse a los ejes principales, después de lo cual sólo tendrá componentes diagonales.

Si coinciden los tres valores fundamentales del tensor $\varepsilon_{\alpha\beta}$, la constante dieléctrica será un escalar. Esto sólo puede suceder cuando los medios son isótropos. En un cristal cúbico el tensor $\varepsilon_{\alpha\beta}$ también se convierte en escalar. La anisotropía de ese mismo cristal cúbico aparecerá en los tensores de rangos más altos. Los medios, en los que por lo menos dos o tres valores principales del tensor $\varepsilon_{\alpha\beta}$ son diferentes, son eléctricamente anisótropos. Si este medio es un cuerpo sólido, en el primer caso se habla de un cristal uniaxial, y en el segundo, de un cristal biaxial.

Además de la constante dieléctrica ε, en electrostática se hace también uso de la noción de *susceptibilidad dieléctrica* k, determinada por la correlación

$$P_\alpha = k_{\alpha\beta} E_\beta. \tag{13.6}$$

La susceptibilidad dieléctrica está relacionada con la constante dieléctrica con la fórmula

$$k_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}}{4\pi}. \tag{13.7}$$

Como hemos visto en la relación de Kramers — Krönig (5.4), cuando no hay dispersión espacial, la constante dieléctrica siempre es mayor que la unidad. La relación (5.4a) puede escribirse así

$$\varepsilon'(0, 0) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega^2}{\omega^2} \varepsilon''(0, \omega).$$

Precisamente el primer miembro de esta fórmula es, ni más ni menos, la constante dieléctrica estática. La magnitud $\varepsilon''(0, \omega)$ en el segundo miembro es positiva con todas las $\omega > 0$, ya que con ella se expresa la energía del campo electromagnético disipada en la sustancia. Si la disipación se produce en un medio en estado termodinámicamente equilibrado, $\varepsilon''(0, \omega) > 0$ con todas las ω.

En el caso, cuando el medio es eléctricamente isótropo, homogéneo y la dispersión espacial se puede despreciar, la ecuación (13.5) se convierte en la de Poisson:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho_{\text{ext}}/\varepsilon. \tag{13.8}$$

Las condiciones de frontera (13.4) en el límite de separación de dos dieléctricos toman la forma (comp. con las fórmulas (19.7) y (19.8), P. I)

$$\varphi_1 = \varphi_2, \qquad \varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma_{\text{ext}}. \tag{13.9}$$

Si en un medio dieléctrico el campo se crea por conductores cargados, al prefijar los potenciales de los conductores, las condiciones de frontera para ellos se escriben del siguiente modo

$$\varphi|_{S_a} = \varphi_a^0, \tag{13.10}$$

donde φ_a^0 es el potencial de a-ésimo conductor. Si las cargas $Q^{(a)}$ de los conductores están fijadas, las condiciones de frontera toman la forma

$$\varphi|_{S_a} = \text{const}, \quad -\frac{\varepsilon}{4\pi} \oint\limits_{S_a} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = Q^{(a)}. \tag{13.11}$$

§ 14. Correlaciones termodinámicas para los dieléctricos en un campo eléctrico exterior

14.1. Energía interna y energía libre de un dieléctrico. En el § 8 fue mostrado que con un campo de baja frecuencia, cuando es posible despreciar la dispersión temporal de la constante dieléctrica, en un medio polarizable la energía del campo se expresa de la manera siguiente

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon E^2 dV. \tag{14.1}$$

Si al no haber dieléctricos (con $\varepsilon = 1$) la magnitud W tiene sentido unívoco y claro, en presencia de dieléctricos el sentido físico de la fórmula (14.1) debe ser precisado.

Ante todo, es evidente que en (14.1) no sólo entra la energía del campo y la energía adicional de la sustancia, adquirida por el efecto del campo. Pero, por regla, los cuerpos macroscópicos están en contacto con los cuerpos circundantes (termostatos), por lo que pueden caracterizarse con varias magnitudes energéticas cuyo sentido termodinámico es diferente. Para nosotros tienen la mayor importancia dos de ellas: la energía interna y la libre.

Por su sentido físico la energía interna U, la más cercana a la energía mecánica de las partículas o a la energía del campo en el vacío (que fueron estudiadas en la P. I), es el valor medio según la asociación estadística de la energía total del cuerpo, incluida la energía cinética y la de interacción de las partículas que lo forman, así como la energía de su interacción con los campos exteriores y la energía de los propios campos exteriores en el volumen del cuerpo. La variación de la energía interna del cuerpo se determina por el trabajo de las fuerzas exteriores con el proceso adiabático, o sea, cuando el cuerpo tiene aislamiento térmico.

La energía libre

$$F = U - TS \tag{14.2}$$

se distingue de la interna por el sumando TS que es el producto de la temperatura absoluta por la entropía. La variación de la energía libre del cuerpo es igual al trabajo efectuado sobre éste durante un proceso isotérmico, es decir, a temperatura constante. Calculemos estas dos magnitudes U y F, para un dieléctrico en el campo eléctrico.

De los resultados del § 8, P. II se desprende que el aumento de la densidad de energía del dieléctrico, con el crecimiento lento de la inducción eléctrica D a un pequeño valor dD, es igual a

$$dA = \frac{1}{4\pi} E \cdot dD. \tag{14.3}$$

Este es el trabajo (por unidad de volumen) realizado por las fuentes exteriores del campo eléctrico sobre el dieléctrico. A continuación, haremos uso de correlaciones conocidas de termodinámica. Con una variación lenta reversible de los parámetros del cuerpo, su energía interna (por unidad de volumen) adquiere el incremento

$$dU = TdS + \zeta d\rho + \frac{1}{4\pi\varepsilon} D \cdot dD, \tag{14.4}$$

donde ρ es la densidad de la sustancia, ζ, el pc ıcial químico. En (14.4) el último sumando es el trabajo de las fuerzas eléctricas (14.3) expresado con $D = \varepsilon E$ *). La constante dieléctrica ε no depende del campo y puede ser expresada como función de S y ρ. La diferencial parcial de la energía interna, con S y ρ constantes, vendrá dada por

$$(dU)_{S,\rho} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} D \cdot dD,$$

de donde, por medio de la integración, hallamos

$$U(S, \rho, D) = U_0(S, \rho) + \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}. \tag{14.5}$$

Aquí, $U_0(S, \rho)$ es la densidad de energía interna del dieléctrico al no haber campo, $D^2/8\pi\varepsilon = \varepsilon E^2/8\pi$, la adición a la energía interna a cuenta del campo con la polarización adiabática del dieléctrico.

Añadiendo a (14.4) el sumando $-d(TS)$ obtendremos la diferencial de la energía libre:

$$dF = -SdT + \zeta d\rho + \frac{1}{4\pi\varepsilon} D \cdot dD, \tag{14.6}$$

*) Gran parte de las fórmulas de este parágrafo está escrita para medios isótropos. Cuando se tiene en cuenta la anisotropía, esto complica la forma de ciertas fórmulas, pero no introduce variaciones sustanciales en la interpretación de las correlaciones fundamentales.

donde ε debe ahora considerarse como una función de la densidad y temperatura. De (14.6), obtenemos

$$F(T, \rho, \boldsymbol{D}) = F_0(T, \rho) + \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}. \tag{14.7}$$

Así, pues, ese mismo sumando $D^2/8\pi\varepsilon$ es la adición a la densidad de energía libre del dieléctrico, si el proceso de polarización transcurre de modo isotérmico. Como, por regla, los dieléctricos polarizables están en contacto con el medio circundante (termostato), que conserva en ellos una temperatura constante, la magnitud

$$w = D^2/8\pi\varepsilon = \varepsilon E^2/8\pi \tag{14.8}$$

debe tomarse como una adición a la densidad de energía libre del dieléctrico.

En ocasiones es más cómodo operar con la energía libre de la que se ha excluido la energía del campo que también existe cuando no hay dieléctrico. La densidad de semejante energía libre

$$\mathscr{F} = F - \vec{\mathscr{E}}^2/8\pi, \tag{14.9}$$

donde $\vec{\mathscr{E}}$ es la intensidad del campo que existiría en el lugar dado si no hubiese dieléctrico, pero las fuentes del campo fueran las mismas que antes. El cambio de semejante energía libre durante la variación $\delta\vec{\mathscr{E}}$ del campo, será

$$\delta\mathscr{F} = \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D} - \vec{\mathscr{E}}\cdot\delta\vec{\mathscr{E}}). \tag{14.10}$$

Reescribamos esta expresión del siguiente modo

$$\delta F = (4\pi)^{-1}(\boldsymbol{D} - \vec{\mathscr{E}})\delta\vec{\mathscr{E}} + \boldsymbol{E}(\delta\boldsymbol{D} - \delta\vec{\mathscr{E}}) + (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{D})\delta\vec{\mathscr{E}}.$$

Al calcular la integral de δF por el volumen del dieléctrico, las integrales

$$\int(\boldsymbol{D} - \vec{\mathscr{E}})\cdot\delta\vec{\mathscr{E}}\, dV \qquad \text{y} \qquad \int\boldsymbol{E}\cdot(\delta\boldsymbol{D} - \delta\vec{\mathscr{E}})dV$$

se anulan. Efectivamente

$$\int(\boldsymbol{D} - \vec{\mathscr{E}})\cdot\delta\vec{\mathscr{E}}\, dV = \int\operatorname{div}[(\boldsymbol{D} - \vec{\mathscr{E}})\delta\varphi]dV - \\ - \int\delta\varphi_{\vec{\mathscr{E}}}\operatorname{div}(\boldsymbol{D} - \vec{\mathscr{E}})dV. \tag{14.11}$$

En esta expresión $\delta\varphi_{\vec{\mathscr{E}}}$ está ligada con la fórmula $\delta\vec{\mathscr{E}} = -\operatorname{grad}\delta\varphi_{\vec{\mathscr{E}}}$. En (14.11) la última integral es igual a cero, ya que en el volumen que ocupa el dieléctrico $\operatorname{div}\boldsymbol{D} = \operatorname{div}\vec{\mathscr{E}} = 0$. En lo que se refiere a la primera integral, ella puede ser representada como la integral de superficie $\oint(\boldsymbol{D} - \vec{\mathscr{E}})\delta\varphi_{\vec{\mathscr{E}}}\, d\boldsymbol{S}$, tomada por la superficie de los conductores que crean el campo y por una superficie infinitamente alejada.

En la superficie de los conductores se cumple la relación $\delta\varphi_{\vec{\mathscr{E}}} = \text{const}$, lo mismo que la relación $\varphi = \text{const}$, por lo que la integral por esa superficie

toma el aspecto

$$\delta\varphi_{\vec{\mathscr{E}}} \oint (D - \vec{\mathscr{E}})dS.$$

Pero $\oint D\,dS = \oint \vec{\mathscr{E}}\,dS$, ya que cada una de estas integrales es igual a la carga total en la superficie conductora. Esta carga continúa considerándose fijada al ubicarla en el campo de un dieléctrico. Apoyándonos en la base habitual en semejante caso, la integral por la superficie infinitamente alejada puede ser estimada como igual a cero.

Es fácil cerciorarse de que la integral $\int E(\delta D - \delta\vec{\mathscr{E}})dV$ también es nula. Por ello

$$\int \delta\mathscr{F}\,dV = -\frac{1}{4\pi}\int (D - E)\delta\vec{\mathscr{E}}\,dV = \int P\delta\vec{\mathscr{E}}\,dV. \tag{14.12}$$

Si el campo exterior es homogéneo

$$\int d\mathscr{F}\,dV = -\delta\vec{\mathscr{E}}\int P dV = -\vec{\mathscr{P}}\cdot\delta\vec{\mathscr{E}}, \tag{14.13}$$

donde $\vec{\mathscr{P}}$ es el momento dipolar completo de todo el dieléctrico. Así, pues, en el caso de un campo homogéneo exterior la variación de la densidad de energía libre $\mathscr{F}$, tendrá la forma

$$d\mathscr{F} = -P\cdot d\vec{\mathscr{E}}. \tag{14.14}$$

Como la densidad de momento dipolar P es una función lineal de E, ella también será proporcional a $\vec{\mathscr{E}}$. Por ello, es posible integrar la expresión (14.14) y obtener

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0(T, \rho) = -\tfrac{1}{2}P\cdot\vec{\mathscr{E}}. \tag{14.15}$$

14.2. Variación de la energía interna de un dieléctrico con la conexión isotérmica del campo. Al conectar el campo de manera isotérmica, la variación de la energía interna del dieléctrico no será descrita con la expresión (14.8). Hallémosla del modo siguiente.

En calidad de variables independientes tomemos la temperatura T, la densidad ρ y la inducción eléctrica D. Haciendo ρ = const, podemos escribir:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial T}dT + \frac{\partial U}{\partial D^2}dD^2.$$

Por otro lado, de acuerdo con (14.4),

$$dU = TdS + \frac{1}{8\pi\varepsilon}dD^2.$$

De las dos últimas igualdades hallamos la variación de la entropía:

$$dS = \frac{1}{T}\left(dU - \frac{1}{8\pi\varepsilon}dD^2\right) = \frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial T}dT + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial D^2} - \frac{1}{8\pi\varepsilon}\right)dD^2. \tag{14.16}$$

Como la entropía es función de estado, dS es una diferencial total y

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial T}, \qquad \frac{\partial S}{\partial D^2} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial D^2} - \frac{1}{8\pi\varepsilon}\right).$$

Igualando las derivadas entrecruzadas, hallamos

$$\frac{\partial}{\partial D^2}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial D^2} - \frac{1}{8\pi\varepsilon}\right)\right],$$

de donde sigue que

$$\frac{\partial U}{\partial D^2} = \frac{1}{8\pi\varepsilon}\left(1 + \frac{T}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right). \tag{14.17}$$

El segundo miembro de (14.17) no depende de D. Por ello, la relación diferencial (14.17) se integra con facilidad

$$U(T, \rho, D^2) = U_0(T, \rho) + \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}\left(1 + \frac{T}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right). \tag{14.18}$$

La función $U_0(T, \rho)$ es la densidad de energía interna cuando no hay campo. Como variables independientes adoptamos T y E (esto significa que se cuenta prefijada no ρ_{ext}, sino los potenciales φ en los conductores cargados que crean el campo). Entonces, la identidad termodinámica puede escribirse así

$$dU = TdS + \frac{\varepsilon}{8\pi} dE^2 + \frac{E^2}{4\pi}\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} dT, \tag{14.19}$$

como la variación del vector de la inducción eléctrica puede ser condicionada (con los potenciales preestablecidos) por el cambio de la temperatura del medio de la que depende la constante dieléctrica, ya que

$$dD = d(\varepsilon E) = \varepsilon\, dE + E\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} dT.$$

Un procedimiento análogo al que conduce a las fórmulas (14.17) y (14.18), en este caso proporcionaría

$$U(T, \rho, E^2) = U_0(T, \rho) + \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\left(1 + \frac{T}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right). \tag{14.20}$$

Como vemos, es posible obtener las fórmulas (14.18) y (14.20) una de otra sustituyendo $D \to \varepsilon E$ y, a la inversa, $E \to \frac{1}{\varepsilon} D$. De estas fórmulas se deduce que la adición a la energía interna de un dieléctrico ubicado en un campo eléctrico, no es igual a (14.18) y contiene un sumando que tiene en cuenta la "sensibilidad" de la constante dieléctrica a la variación de la temperatura.

Es aleccionador el cálculo de la entropía del medio en el campo eléctrico. De (14.16) y (14.18) sigue que

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U_0}{\partial T} + \frac{E^2}{8\pi} T\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial T^2}\right), \qquad \frac{\partial S}{\partial E^2} = \frac{1}{8\pi}\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}.$$

El segundo miembro de la última fórmula no depende de E y, por esto, la relación diferencial se integra con facilidad. Después de la integración, hallamos

$$S = S_0(T, \rho) + \frac{E^2}{8\pi}\frac{d\varepsilon}{dT}, \tag{14.21}$$

donde $S_0(T, \rho)$ es la entropía del medio al no haber campo. Con (14.19) y (14.21) podemos escribir la expresión para la energía libre $F = U - TS$:

$$F = F_0 + \varepsilon E^2/8\pi, \tag{14.22}$$

donde F_0 es la energía libre de medio cuando no hay campo eléctrico. De nuevo hemos obtenido una expresión equivalente a (14.7).

Retornando a la fórmula (14.21) podemos ver que el carácter de la influencia del campo sobre la entropía se determina por el signo de la derivada $d\varepsilon/dT$. Para $d\varepsilon/dT > 0$, al conectar el campo, la entropía crece. Como ésta es la medida del desorden, su crecimiento responde, en este caso, al aumento del desorden en el medio al conectar el campo o bien al aumentar éste.

También existen medios en los que $d\varepsilon/dT < 0$. Con ello, el crecimiento del campo provoca la disminución de la entropía y, por lo tanto, el aumento del orden en el medio. El modelo físico de semejante proceso puede ser la polarización de un medio enrarecido, constituido por dipolos del valor prefijado. Cuando no hay campo todos estos dipolos estarán orientados en absoluto desorden y el momento dipolar medio de tal medio será igual a cero. Al conectar el campo se produce cierta ordenación de las direcciones de los dipolos en el medio, lo que conduce, por consiguiente, a la aparición simultánea de la polarización media del medio no igual a cero y a la disminución de su entropía.

14.3. Simetría del tensor de la constante dieléctrica. Como conclusión de este parágrafo vamos a cerciorarnos que el tensor de la constante dieléctrica es simétrico. Con este fin volvamos a la fórmula (14.3). De su forma ya queda claro que es también válida para los dieléctricos anisótropos. Introduzcamos un nuevo potencial termodinámico $\tilde{U}$ determinándolo de la manera siguiente:

$$\tilde{U} = U - \frac{E \cdot D}{4\pi}. \tag{14.23}$$

Con la fórmula (14.23) realizamos la transformación de Legendre que permite pasar del potencial $U = (S, \rho, D)$ al potencial $\tilde{U} = \tilde{U}(S, \rho, E)$, de forma que

$$d\tilde{U} = TdS + \zeta d\rho - \frac{1}{4\pi} D \cdot dE$$

y

$$D = -4\pi \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial E}\right)_{S,\rho}. \tag{14.24}$$

Como $\tilde{U}$ (lo mismo que U) es función de estado, las derivadas $\dfrac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial E_\alpha \partial E_\beta}$ y $\dfrac{\partial^2 U}{\partial E_\beta \partial E_\alpha}$ no deben depender del orden de diferenciación. Pero

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial E_\alpha \partial E_\beta} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial D_\alpha}{\partial E_\beta} = -\frac{1}{4\pi} \varepsilon_{\alpha\beta}, \qquad \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial E_\beta \partial E_\alpha} = -\frac{1}{4\pi} \varepsilon_{\beta\alpha}.$$

Por esto

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha}. \tag{14.25}$$

§ 15. Fuerzas que actúan sobre los dieléctricos líquidos en el campo eléctrico. Electrostricción

Las fuerzas que actúan sobre un medio ubicado en el campo electromagnético ya fueron examinadas más arriba, en el § 10, P. II. De acuerdo con los resultados obtenidos, sobre un dieléctrico (o aislante líquido) actuará en el campo eléctrico una fuerza volumétrica de densidad

$$f = -\nabla p_0 - \frac{E^2}{8\pi} \operatorname{grad} \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad} \left(E^2 \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right), \tag{15.1}$$

que corresponde al tensor de tensiones

$$\sigma_{\alpha\beta} = -p_0 \delta_{\alpha\beta} - \frac{E^2}{8\pi} \left[\varepsilon - \tau \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right)\right] \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon \frac{E_\alpha E_\beta}{4\pi}. \tag{15.2}$$

La existencia de tal fuerza lleva a la variación de la densidad del dieléctrico, lo que está enlazado con la reducción de la presión en él. Este fenómeno recibe el nombre de *electrostricción*.

La condición de equilibrio de cada uno de los elementos del líquido consiste en que la fuerza total, que actúa sobre semejante elemento del medio, debe ser igual a cero. Ésta se forma de la fuerza f condicionada por el campo y la fuerza relacionada con la variación de la presión hidrostática de punto a punto. Escribamos esto en la forma

$$f - \nabla p = 0. \tag{15.3}$$

Aquí, la fuerza f se da haciendo uso de la expresión (10.13). Escribamos el segundo sumando de (10.13) en la forma

$$\operatorname{grad}\left(E^2\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)=\tau\operatorname{grad}\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)+E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\operatorname{grad}\tau.$$

Si el medio es homogéneo $\operatorname{grad}\varepsilon=\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\operatorname{grad}\tau$. Por ello, la condición de equilibrio (15.3) tomará el aspecto

$$\frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)=\frac{1}{\tau}\operatorname{grad}p.$$

Integrando esta ecuación, hallamos

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\tau}=\frac{1}{8\pi}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}. \tag{15.4}$$

Si conocemos la dependencia $\tau=\tau(p)$ podremos obtener la ligazón integral entre p y E^2.

Como, por regla, los líquidos pueden considerarse incompresibles, con esta aproximación, de (15.4), obtenemos

$$p-p_0=\frac{1}{8\pi}\left(E^2\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right). \tag{15.5}$$

Esta fórmula proporciona la variación electrostrictiva de la presión condicionada por la conexión del campo eléctrico.

§ 16. Constante dieléctrica estática

La constante dieléctrica (o permitividad) estática en forma explícita sólo puede ser calculada en uno u otro modelo de sustancias. Pero las representaciones de simulación acerca del medio no tienen que ser introducidas obligatoriamente desde un principio; se puede ir bastante adelante sin hacer suposiciones concretas sobre la estructura de la sustancia. Los modelos pueden y deben emplearse al final, para apreciar a lo que conduce la teoría en diferentes casos concretos.

16.1. Relación entre la constante dieléctrica estática y las fluctuaciones del vector de polarización del medio al no haber campo eléctrico exterior. Destaquemos en el medio que examinamos una esfera de volumen V de radio macroscópicamente pequeño. En presencia del campo eléctrico exterior, la sustancia ubicada en el interior de la esfera, lo mismo que en los restantes puntos del medio, se polarizará. Si el medio es isótropo el vector de polarización estará dirigido por el campo exterior E.

Siguiendo el método de Lorentz, que para el problema dado fue desarrollado por H. Fröhlich, para describir la conducta de la sustancia

dentro de la esfera destacada, haremos uso de la mecánica estática clásica. Por su parte, la sustancia que respecto de la esfera está en el exterior será considerada como un dieléctrico enterizo con constante dieléctrica ε. Durante la polarización de las cargas en el interior de la esfera, ellas se desplazarán respecto de la posición de equilibrio. Designemos con u_a semejante desplazamiento de la carga a-ésima, mientras que el conjunto de todos los desplazamientos con $Q = Q(u_1, \ldots, u_a, \ldots)$.

Supongamos que $U_0(Q)$ es la energía potencial del sistema de cargas que yace dentro de la esfera destacada cuando no hay campo eléctrico. La energía $U_0(Q)$ incluye tanto la interacción de las cargas que examinamos entre sí, como su interacción con las cargas que se encuentran fuera de la esfera destacada. Al conectar el campo eléctrico exterior (que vamos a considerar homogéneo y que tiene una intensidad E lejos de la esfera) la energía potencial de las cargas de la esfera recibe una adición que será la energía de interacción entre las cargas de la esfera con el campo E_i, creado dentro de la esfera por las fuentes exteriores y las cargas exteriores (en relación con la esfera) del dieléctrico. Como el dieléctrico fuera de la esfera se considera como un medio enterizo con constante dieléctrica ε, E_i será la intensidad del campo dentro de una cavidad esférica hecha en un dieléctrico homogéneo. En el Complemento VIII se muestra que dicho campo es homogéneo y su intensidad

$$E_i = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1} E. \tag{16.1}$$

La energía potencial de las cargas de la esfera en un campo homogéneo tomará la forma

$$U(Q, E) = U_0(Q) - \sum_a e_a u_a E_i = U_0(Q) - \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1} \vec{\mathscr{P}}(Q) \cdot E, \tag{16.2}$$

donde para el momento dipolar creado por las cargas de la esfera ha sido introducida la designación:

$$\vec{\mathscr{P}}(Q) = \sum_a e_a u_a. \tag{16.3}$$

Aquí la suma se realiza por todas las cargas (a es el número de la carga) dentro de la esfera y se supone que en estado de equilibrio (cuando todos $u_a = 0$) la esfera no está polarizada.

La región esférica está en contacto térmico con la parte exterior del dieléctrico y, a través de ella, con el termostato. La probabilidad de que la esfera se halle en un estado con energía $U(Q, E)$ se da con la distribución de Boltzmann:

$$dW = \exp\left(-\frac{U}{T}\right) dQ \Big/ \int \exp\left(-\frac{U}{T}\right) dQ, \tag{16.4}$$

donde T es la temperatura expresada en unidades energéticas.

Calculemos el valor medio de la proyección del momento eléctrico dipolar de la esfera sobre la dirección del campo E:

$$\langle \vec{\mathscr{P}}_E \rangle = \int \mathscr{P}(Q)\cos\theta \quad \exp\left(-\frac{U_0}{T}\right)dQ \Big/ \int \exp\left(-\frac{U}{T}\right)dQ. \qquad (16.5)$$

Aquí θ es el ángulo entre los vectores $\vec{\mathscr{P}}$ y E.

Si la intensidad E es suficientemente pequeña, de forma de $|\vec{\mathscr{P}}\cdot E_i| \ll T$, los exponentes en (16.5) pueden ser aproximados del modo siguiente:

$$\exp\left[-\frac{U(Q,E)}{T}\right] = \exp\left[-\frac{U_0(Q)}{T}\right]\left[1 + \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1}\frac{\mathscr{P}(Q)E}{T}\cos\theta\right], \qquad (16.6)$$

reteniendo sólo los términos lineales respecto a E. Más adelante sustituimos (16.6) en (16.5) y tomamos en consideración que

$$\int \mathscr{P}(Q)\cos\theta \exp\left(-\frac{U_0}{T}\right)dQ = 0. \qquad (16.7)$$

Esta última igualdad sigue de que al no haber campo el valor medio de la proyección de $\vec{\mathscr{P}}$ sobre cualquier dirección es igual a cero. La igualdad (16.5) toma el aspecto

$$\langle \mathscr{P}_E \rangle = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1}\frac{E}{T}\int \mathscr{P}^2(Q)\cos^2\theta \exp\left(-\frac{U_0}{T}\right)dQ \Big/ \int \exp\left(-\frac{U_0}{T}\right)dQ. \qquad (16.8)$$

Los integrandos en (16.8) no dependen de E y, al no haber campo exterior, todas las direcciones del vector $\vec{\mathscr{P}}$ son equivalentes. Por ello, la integración por el ángulo θ sólo se referirá al factor $\cos^2\theta$ y conducirá a su sustitución por $\cos^2\theta = 1/3$. En resumen (16.8) puede representarse así

$$\langle \mathscr{P}_E \rangle = \frac{\varepsilon}{2\varepsilon + 1}\frac{E}{T}\langle \mathscr{P}^2 \rangle, \qquad (16.9)$$

donde

$$\langle \mathscr{P}^2 \rangle = \int \mathscr{P}^2(Q) \exp\left(-\frac{U_0}{T}\right)dQ \Big/ \int \exp\left(-\frac{U_0}{T}\right)dQ. \qquad (16.10)$$

La magnitud $\langle \mathscr{P}^2 \rangle$ es el valor medio del cuadrado del momento dipolar de la esfera a cuenta de las fluctuaciones térmicas cuando está ausente el campo eléctrico exterior.

Como $D = \varepsilon E = E + 4\pi P$ y $P_E = \langle \mathscr{P}_E \rangle / V$,

$$\varepsilon - 1 = \frac{4\pi P_E}{E} = \frac{4\pi \langle \mathscr{P}_E \rangle}{EV}, \qquad (16.11)$$

donde V es el volumen de la esfera. La sustitución de la magnitud $\langle \mathscr{P}_E \rangle$ de (16.11) en (16.9), permite obtener

$$\varepsilon - 1 = \frac{4\pi}{V}\frac{\varepsilon}{1 + 2\varepsilon}\frac{\langle \mathscr{P}^2 \rangle}{T}. \qquad (16.12)$$

De tal manera, la fórmula (16.12) enlaza la constante dieléctrica del medio ε con el cuadrado medio de la polarización espontánea (de fluctuación) del medio: ε ha resultado ser expresada por las fluctuaciones del momento dipolar de la región esférica cuando no hay campo eléctrico exterior. La gran importancia de esta fórmula consiste en que ella expresa la respuesta del medio al efecto exterior (al campo eléctrico exterior), que saca a éste del estado de equilibrio (precisamente, esa respuesta se describe con la constante dieléctrica), por medio de aquellas propiedades del medio que se refieren a su estado de equilibrio. La existencia de semejante ligazón es característica no sólo para el problema que estudiamos. También existe en otros casos cuando el sistema se saca del estado de equilibrio por fuerzas externas (p. ej., por campo magnético exterior) y es un caso particular del llamado *teorema de fluctuación-disipación.*

En la fórmula (16.12) la constante dieléctrica del medio ε es expresada con la fluctuación del momento dipolar de la esfera que está en interacción con su ambiente. También podemos dar a esta dependencia la forma

$$\langle \mathscr{P}^2 \rangle = \frac{VT}{4\pi} \frac{(1 + 2\varepsilon)(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}. \tag{16.13}$$

El valor medio del cuadrado del momento dipolar de toda la esfera, que vemos en (16.12), es cómodo expresarlo con los momentos dipolares de moléculas aisladas que se encuentran en el interior de la esfera. Supongamos que dentro de la esfera hay N moléculas. Cuando el dieléctrico es un cristal, esto también puede ser N células elementales de la red o bien N átomos. El momento dipolar de la esfera se forma de los momentos dipolares de todos estos elementos estructurales (en adelante, vamos a denominar convencionalmente dichos elementos moléculas):

$$\vec{\mathscr{P}} = \sum_{a=1}^{N} \boldsymbol{p}_a. \tag{16.14}$$

Aquí $\boldsymbol{p}_a = \boldsymbol{p}_a(u_a)$ es el momento dipolar de la a-ésima molécula. El valor medio del cuadrado del momento dipolar de toda la esfera

$$\langle \vec{\mathscr{P}}^2 \rangle = \langle \vec{\mathscr{P}} \cdot \vec{\mathscr{P}} \rangle = \left\langle \sum_{a=1}^{N} \vec{\mathscr{P}} \cdot \boldsymbol{p}_a \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{a=1}^{N} \int \boldsymbol{p}_a(u_a) \vec{\mathscr{P}}(Q) \exp\left(-\frac{U_0(Q)}{T}\right) dQ, \tag{16.15}$$

donde

$$Z = \int \exp\left(-\frac{U_0(Q)}{T}\right) dQ \tag{16.16}$$

es la integral normalizante. Es cómodo representar cada uno de los sumandos en la suma (16.15) en la forma

$$\frac{1}{Z}\int p_a(u_a)\vec{\mathscr{P}}(Q)\exp\left[-\frac{U_0(Q)}{T}\right]dQ =$$

$$= \int p_a(u_a)\int \vec{\mathscr{P}}(Q)\exp\left[-\frac{U_0(Q)}{T}\right]dQ_a d^3u_a \Big/ \int \exp\left[-\frac{U_0(Q)}{T}\right]dQ_a \times$$

$$\times \frac{1}{Z}\int \exp\left[-\frac{U_0(Q)}{T}\right]dQ_a. \qquad (16.17)$$

Al símbolo dQ_a corresponde aquella parte del espacio configurativo de los desplazamientos de las cargas que está ligada con los desplazamientos de todas las cargas, salvo aquellas que entran en la a-ésima molécula. En (16.17) han aparecido dos combinaciones de integrales que tienen sentido físico explícito. La magnitud

$$\vec{\mathscr{P}}(u_a) = \int \vec{\mathscr{P}}(Q)\exp\left[-\frac{U_0(Q)}{T}\right]dQ_a \Big/ \int \exp\left[-\frac{U_0(Q)}{T}\right]dQ_a \qquad (16.18)$$

tiene el sentido del momento dipolar medio de la esfera con desplazamiento fijado de las cargas de la a-ésima molécula. La magnitud

$$\frac{1}{Z}\int \exp\left[-\frac{U(Q)}{T}\right]dQ_a = \rho(u_a) \qquad (16.19)$$

es la probabilidad de que el desplazamiento de las cargas en la a-ésima molécula sea igual a u_a, con la particularidad de que el desplazamiento del resto de las cargas puede ser arbitrario.

Así, pues,

$$\langle \vec{\mathscr{P}}^2 \rangle = \sum_{a=1}^{N} \int p_a(u_a)\vec{\vec{\mathscr{P}}}(u_a)\rho(u_a)d^3u_a. \qquad (16.20)$$

Si todas las moléculas son iguales

$$\langle \vec{\mathscr{P}}^2 \rangle = N\int p(u)\vec{\vec{\mathscr{P}}}(u)\rho(u)d^3u. \qquad (16.21)$$

Ahora, podemos dar a la fórmula (16.12) la forma

$$\varepsilon - 1 = \frac{4\pi n\varepsilon}{1 + 2\varepsilon}\frac{1}{T}\int p(u)\vec{\vec{\mathscr{P}}}(u)\rho(u)d^3u, \qquad (16.22)$$

donde $n = N/V$ es la concentración de moléculas.

16.2. Constante dieléctrica de un medio con moléculas polares. Si el dieléctrico consta de moléculas polares, en las que el valor absoluto del momento dipolar p puede considerarse invariable,

$$\left\langle \int p(u)\vec{\vec{\mathscr{P}}}(u)\rho(u)d^3u \right\rangle = p^2.$$

En este caso, la fórmula general (16.22) toma el aspecto

$$\varepsilon - 1 = \frac{4\pi n\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} \frac{p^2}{T}. \tag{16.23}$$

Esta relación recibe el nombre de *fórmula de Onsager*. Es posible considerarla como la apreciación que muestra qué orden y estructura tiene el segundo miembro de (16.22) cuando las moléculas son polares. Para un dieléctrico, compuesto de moléculas polares, es característico, como vemos en (16.23), la existencia de la dependencia entre la constante dieléctrica y la temperatura.

16.3. Constante dieléctrica de un medio con moléculas no polares. Estas moléculas se distinguen sustancialmente de las polares debido a que el valor absoluto del momento dipolar de una molécula no polar no puede considerarse magnitud constante sea cual fuese la aproximación utilizada. El depende notoriamente del campo aplicado y de la temperatura. El momento dipolar de semejante molécula es proporcional al desplazamiento de los átomos u.

Apreciemos la magnitud $\langle \vec{\mathscr{P}}^2 \rangle$ de (16.21) en el caso más sencillo, es decir, cuando las moléculas son esféricas. En tal caso, dicha magnitud tiene el aspecto:

$$Ne^2 \int_0^\infty u^2 \exp\left[-\frac{U(u)}{T}\right] u^2 du \Big/ \int_0^\infty \exp\left[-\frac{U(u)}{T}\right] u^2 du. \tag{16.24}$$

La energía de deformación de una molécula esférica en la aproximación armónica, será

$$U(u) = \gamma u^2. \tag{16.25}$$

Las integrales en la fórmula (16.24) pueden expresarse por la integral de probabilidades, por lo tanto es posible calcularlas. Designemos $\gamma/T = \xi$; entonces la integral

$$\int_0^\infty u^2 \exp\left[-\frac{U(u)}{T}\right] u^2 du = \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \xi^{-5/2},$$

mientras que la integral en el denominador de la fórmula (16.24)

$$\int_0^\infty \exp(-\xi u^2) u^2 du = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \xi^{-3/2}.$$

Por lo tanto, la apreciación de la magnitud (16.24), será

$$^3/_2 Ne^2 \frac{1}{\xi}. \tag{16.26}$$

La magnitud $\xi \sim 1/kT$, por lo que en el caso de moléculas no polares, como vemos en (16.22), la constante dieléctrica no depende de la temperatura. En este sentido los dieléctricos no polares (neutros) se distinguen sustancialmente de los polares. La fórmula (16.22), representada con ayuda de (16.26) en la forma

$$\varepsilon - 1 = \frac{6\pi n\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} N \frac{e^2}{\gamma}, \tag{16.27}$$

tiene la singularidad de que en esta fórmula la magnitud γ debe ser expresada directamente mediante la constante dieléctrica macroscópica ε. El coeficiente γ depende asimismo de la polarizabilidad microscópica molecular χ_a. Mostremos esto del modo siguiente.

De acuerdo con (16.25) $\gamma = U(u)/u^2$, con ello $U = U_i + U_e \cdot U_i = \frac{1}{2}cu^2$ es la energía interna de la molécula. La constante molecular c que caracteriza la "rigidez" de la molécula está relacionada con la polarizabilidad molecular χ_a. Esta ligazón es evidente y podemos establecerla por medio del siguiente sencillo razonamiento.

Si sobre la molécula actúa el campo E^{ef} su energía potencial es igual a $U(u) = \frac{1}{2}cu^2 - eu \cdot E^{ef}$. La energía $U(u)$ es la mínima para $eu = (e^2/c)E^{ef}$. Pero $eu = \vec{\mu} = \chi_a E^{ef}$, de manera que $e^2/c = \chi_a$ y $c = e^2/\chi_a$. Así, $U_i = (e^2/2\chi_a)u^2$.

La energía U_e está condicionada por la interacción de la molécula con el medio dieléctrico enterizo que la rodea. La molécula polarizada provoca la polarización del medio circundante que una vez polarizado de este modo también provoca la aparición de una aportación adicional al campo que actúa sobre la molécula. Este último suele llamarse *reactivo*. La intensidad del campo reactivo creado por una esfera homogéneamente polarizada (con densidad de polarización P), como se muestra en el Complemento IX, tiene el aspecto

$$E^{reac} = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1} 4\pi P = 2\frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1} \vec{\mathscr{P}} a^{-3}. \tag{16.28}$$

Aquí fue tomado en consideración que el momento dipolar total es $\frac{4}{3}\pi Pa = \vec{\mathscr{P}}$ (donde a es el radio de la esfera). Con el campo reactivo está ligada la energía $-\vec{\mathscr{P}} \cdot E^{reac}$ de interacción de la molécula con el medio circundante y la energía del propio campo reactivo. Esta última puede ser representada como $\lambda(E^{reac})^2$.

A su vez, es posible apreciar el coeficiente λ partiendo de la condición de que U_e sea la mínima con el valor fijado de $\vec{\mathscr{P}}$. La función $U_e = -\vec{\mathscr{P}} \cdot E^{reac} + \lambda(E^{reac})^2$ es mínima para $\vec{\mathscr{P}} = 2\lambda E^{reac}$. Sustituyendo la última fórmula en U_e obtenemos que $U_e = -\frac{1}{2}\vec{\mathscr{P}} \cdot E^{reac}$, o bien

$$U_e = -\frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1}\frac{\vec{\mathscr{P}}^2}{a^3} = -\frac{e^2}{a^3}\frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1}u^2. \tag{16.29}$$

Por esto

$$\gamma = \frac{U_i + U_e}{u^2} = e^2\left(\frac{1}{2\chi_a} - \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1}\right). \tag{16.30}$$

Ahora las fórmulas (16.22) y (16.27) toman el aspecto de la relación de Clausius — Mossotti:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{\chi_a}{a^3}. \tag{16.31}$$

§ 17. Fenómenos de transporte en un medio ubicado en un campo eléctrico continuo

17.1. Corriente eléctrica y flujo de calor en el medio en presencia de un campo eléctrico exterior. Cuando los medios son conductores, el campo eléctrico conduce a la aparición de una serie de efectos tan importantes como la polarización al ser los medios no conductores. Puesto que las partículas cargadas son capaces de desplazarse por los medios conductores, la aplicación del campo eléctrico provoca *procesos de transporte.* Los más importantes de éstos son la aparición de la corriente de las cargas y la transferencia de calor.

En un conductor homogéneo e isótropo, en todos los puntos del cual la temperatura es la misma, la corriente eléctrica sólo está condicionada por el campo eléctrico. Con una aproximación lineal según el campo, la densidad de corriente

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}. \tag{17.1}$$

El coeficiente σ se denomina conductividad del medio y es sustancial característica de los medios conductores. La relación (17.1) recibe el nombre de *ley de Ohm.*

Al fluir la corriente en el medio, se produce la disipación de la energía del campo, cuya densidad por unidad de tiempo

$$Q = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} = \sigma E^2 = \sigma^{-1} j^2. \tag{17.2}$$

Esta última relación lleva el nombre de *ley de Joule — Lenz.*

Con la disipación de la energía del campo crece la entropía. Por unidad de tiempo la entropía S de un conductor con corriente crece en la magnitud

$$\frac{dS}{dt} = \int \frac{1}{T}\, \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}\, dV; \tag{17.3}$$

aquí la integración se realiza por todo el volumen del conductor. De la positividad de la derivada dS/dt se desprende la positividad de σ, en el caso de un medio en equilibrio y tomando en consideración (17.2). La interacción de los electrones y los iones en el medio acarrea, en presencia del campo $\boldsymbol{E}$,

el surgimiento de un flujo de calor, cuya densidad, con aproximación lineal, sera igual a

$$q = \gamma E. \tag{17.4}$$

En los medios no homogéneos las fórmulas (17.1) y (17.4) se complican. El caso de mayor importancia, que es el único que vamos a examinar, es la no homogeneidad de temperatura, es decir, la presencia en el medio de un gradiente finito de temperatura. Este gradiente conduce a la difusión de las partículas cargadas de las zonas calientes a las menos calientes. Con estos procesos del movimiento prevalente de las cargas estarán ligados tanto una corriente eléctrica adicional, como el flujo de calor; teniendo en cuenta el gradiente de temperatura, las fórmulas (17.1) y (17.4) toman la forma

$$j = \sigma E + \beta \operatorname{grad} T, \tag{17.5}$$

$$q = \gamma E + \zeta \operatorname{grad} T. \tag{17.6}$$

El coeficiente β caracteriza el valor del efecto termoeléctrico, ζ está condicionado por la conductividad térmica corriente.

Los coeficientes σ, β, γ, ζ y otros semejantes que describen la respuesta del sistema al efecto exterior que saca el sistema del estado de equilibrio termodinámico, son llamados *coeficientes cinéticos*. Diversos coeficientes cinéticos no son independientes. Su relación mutua se expresa mediante el principio de simetría de los coeficientes cinéticos establecido por Onsager. Este principio, cuyo detallado estudio se realiza en los cursos de mecánica estadística, se enuncia del modo siguiente.

Designemos con J_i la densidad de corriente o bien el flujo de cualquier magnitud física. El índice i significa qué magnitud física teníamos en cuenta. Siguiendo a Onsager, escribamos la derivada de la entropía según el tiempo, de la forma

$$\frac{ds}{dt} = -J_i X_i. \tag{17.7}$$

Las magnitudes X_i en (17.7) llevan el nombre de *fuerzas generalizadas*. Los propios flujos J_i se expresan linealmente mediante las fuerzas generalizadas:

$$J_i = a_{ik} X_k. \tag{17.8}$$

La fórmula (17.8) puede considerarse como la definición de los coeficientes cinéticos a_{ik}. La enunciación matemática del principio de Onsager dice:

$$a_{ik} = a_{ki}. \tag{17.9}$$

La relación (17.9) lleva asimismo el nombre de *principio de simetría de los coeficientes cinéticos*.

Con el fin de aplicar este principio al establecimiento del enlace entre los coeficientes en las fórmulas (17.5) y (17.6) hay que generalizar la fór-

mula (17.3) para el caso cuando en el medio hay gradiente de temperatura. Entonces

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T}(j \cdot E - \operatorname{div} q). \tag{17.10}$$

El último sumando describe la aportación de la energía del flujo térmico dirigido al crecimiento de la entropía condicionado por la disipación. A la fórmula (17.10) debe dársele la forma de la relación (17.7). Esto permite determinar las fuerzas generalizadas X_i. Si integrando el segundo término de (17.10) por todo el volumen del cuerpo y reduciendo a cero la integral de superficie transformamos (17.10) a la forma

$$\frac{ds}{dt} = -\left[-\frac{j \cdot E}{T} - q \operatorname{grad}\frac{1}{T}\right], \tag{17.11}$$

de la comparación de (17.11) y (17.7) obtenemos que hay dos fuerzas generalizadas:

$$X_j = -E/T \qquad \text{y} \qquad X_q = -\operatorname{grad}(1/T).$$

Dando a las ecuaciones (17.5) y (17.6) el aspecto de las relaciones (17.8), hallamos que los coeficientes cinéticos a_{ik} se expresan en nuestro caso del modo siguiente:

$$a_{jj} = \sigma T, \qquad a_{jq} = -\beta T^2, \qquad a_{qj} = \gamma T, \qquad a_{qq} = -\zeta T^2. \tag{17.12}$$

De acuerdo con (17.9) $a_{jq} = a_{qj}$, etc.,

$$\gamma = -\beta T. \tag{17.13}$$

Retornemos a la potencia que se desprende del medio en forma de calor. De acuerdo con (17.5), (17.6), (17.10) y (17.13), dicha potencia puede ser representada así

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{j^2}{\sigma} + jT\nabla\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) + \operatorname{div}(k\nabla T), \tag{17.14}$$

donde $k = -(\zeta + \beta^2 T/\sigma)$. El primer sumando en el segundo miembro de la fórmula (17.14) es el calor de Joule, el tercero está condicionado por la conductividad térmica corriente. En lo que atañe al segundo sumando, éste está ligado con la existencia de efectos termoeléctricos. Su aportación en el desprendimiento de calor es lineal por j y, por lo tanto, puede ser tanto positivo, como negativo, en función del sentido de la corriente.

17.2. Efecto Peltier. Si la corriente pasa por la soldadura de dos conductores diferentes en la zona de ésta puede absorverse o desprenderse calor. Dicho fenómeno lleva la denominación de *efecto Peltier*.

La expresión para la densidad del flujo de calor (17.6), en concordancia con (17.5) y (17.13), puede ser escrita

$$q = -\frac{\beta T}{\sigma} j - k\nabla T. \tag{17.15}$$

Cuando los dos conductores en contacto tienen una misma temperatura, q se determina sólo por el primer sumando. Designemos $\Pi = -\beta T/\sigma$. Esta magnitud es la característica del metal y para distintos metales es diferente. Por ello, *la diferencia de densidades de los flujos de calor aportado* y extraído del contacto por la corriente, será

$$q = (\Pi_1 - \Pi_2) j_n, \tag{17.16}$$

donde los índices 1 y 2 de los coeficientes Π se refieren a los conductores primero y segundo, respectivamente. El signo del efecto Peltier depende de la dirección de la corriente, a lo que corresponde el desprendimiento o absorción de calor en el contacto.

17.3. Efecto Thomson. Si la temperatura de distintos puntos de un conductor homogéneo por su composición es diferente y grad $T \neq 0$, en la parte derecha del segundo sumando de la fórmula (17.14)

$$jT\nabla\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) = jT\frac{d}{dT}\left(\frac{\beta}{\sigma}\right)\nabla T.$$

Introduciendo la designación

$$\rho = -T\frac{d}{dT}\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) \tag{17.17}$$

obtenemos la siguiente fórmula para el valor del desprendimiento de calor en un conductor con gradiente de temperatura por el que pasa la corriente:

$$Q_{\text{Th}} = \rho j \cdot \nabla T. \tag{17.18}$$

Este es el *efecto Thomson*. Se distingue de el de Joule — Lentz por ser lineal respecto a la corriente. Por esto, en función del sentido de la corriente respecto de la dirección del gradiente de temperatura, así como en dependencia del signo del coeficiente ρ podremos observar tanto absorción como desprendimiento de calor.

17.4. Fuerza termoelectromotriz. Si ponemos en contacto tres conductores de los que el primero contacta con el segundo y éste, con el tercero (el primero y el tercero están hechos de un mismo material) y en las zonas de contacto se mantienen, respectivamente temperaturas T_1 y T_2 ($T_1 \neq T_2$), en tanto que la temperatura en los extremos del circuito es igual, en tal circuito surgirá diferencia de potencial que medida en los extremos del circuito recibirá el nombre de *fuerza termoelectromotriz* $\mathscr{E}_T$.

Podemos obtener el valor de la fuerza termoelectromotriz de la fórmula (17.5), escrita de esta manera

$$E = \frac{j}{\sigma} - \frac{\beta}{\sigma}\nabla T,$$

donde $j \to 0$ y la integración se realiza por todo el circuito:

$$\mathscr{E}_T = -\int \frac{\beta}{\sigma}\nabla T \cdot d\boldsymbol{l}.$$

Esta integral se descompone en una suma de integrales tomadas a lo largo de cada uno de los conductores. Después de integrar, hallamos

$$\mathscr{E}_T = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\beta_1}{\sigma_1} - \frac{\beta_2}{\sigma_2}\right) dT. \tag{17.19}$$

17.5. Relaciones de Thomson. Los coeficientes de Peltier Π y de Thomson ρ no son independientes. De la comparación de (17.15), (17.16) y (17.17) vemos que entre ellos hay cierta ligazón:

$$\rho = T\frac{d}{dt}\left(\frac{\Pi}{T}\right). \tag{17.20}$$

Después, de la comparación de (17.19) y (17.20) es posible ver, que

$$\mathscr{E}_T = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} (\Pi_1 - \Pi_2). \tag{17.21}$$

Las relaciones (17.20) y (17.21) se llaman *de Thomson*.

§ 18. Estimación de la conductividad con la aproximación del tiempo de relajación

El cálculo de los coeficientes cinéticos y, en primer lugar, de la conductividad σ del medio en un campo eléctrico exterior se realiza, por regla, con una ecuación cinética. Ésta, que es corolario del teorema de Liouville acerca de la invariabilidad de la función de distribución siendo el movimiento a lo largo de la trayectoria de fase cuando existe el campo eléctrico exterior, toma la forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial p} eE = I(f). \tag{18.1}$$

Cuando el proceso es estacionario la derivada parcial $\partial f/\partial t = 0$. El segundo miembro de esta ecuación se denomina *integral de colisión*. Este sumando describe la variación de la función de distribución condicionada por la dispersión de las partículas del medio, unas sobre otras. En los problemas relacionados con el cálculo de la respuesta del medio al efecto del campo exterior continuo homogéneo o bien débilmente variable, es precisamente la integral de colisión la que determina las características fundamentales de la respuesta del sistema.

En el caso general, la integral de colisión tiene forma muy complicada, mientras que la ecuación cinética, en relación con la función buscada $f(p)$, es una ecuación íntegro-diferencial. Debido a esto, ella se estudia en los casos particulares más importantes de los metales, semiconductores y el plas-

ma. Pero incluso en dichos casos la ecuación cinética sigue siendo muy compleja, sensible a los pormenores de la interacción de las partículas entre sí.

En la descripción de la integral de colisión, la aproximación más sencilla y basta es la del tiempo de relajación. Con semejante aproximación la integral de colisión se escribe así

$$I(f(\boldsymbol{p})) = -\delta f(\boldsymbol{p})/\tau, \tag{18.2}$$

donde δf es la desviación de la función f de la de equilibrio. La base para anotar la integral de colisión en esta forma es la circunstancia de que, como muestran las observaciones, la aproximación al estado de equilibrio de un sistema que ha sido sacado de este estado y sobre el que, a continuación no se actúa, transcurre con frecuencia de acuerdo con una ley exponencial. En efecto, de (18.1) y (18.2) sigue que la relajación de un sistema espacial-homogéneo se describe con la ecuación

$$\partial\delta f/\partial t = -\delta f/\tau. \tag{18.3}$$

Después de integrarla, obtenemos

$$\delta f(\boldsymbol{p}, t) \sim \exp(-t/\tau). \tag{18.4}$$

La magnitud $\tau = \tau(\boldsymbol{p})$ lleva el nombre de *tiempo de relajación*. La aproximación de éste tiempo es verosímil, pero en cada caso concreto requiere fundamentación teórica.

La ecuación cinética que describe un proceso estacionario, en la aproximación del tiempo de relajación, toma la forma

$$\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + e\boldsymbol{E}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = -\frac{\delta f}{\tau(\boldsymbol{p})}. \tag{18.5}$$

Si el campo eléctrico es débil, o sea, que los efectos no lineales no se manifiestan en la conductividad, la ecuación (18.5) puede simplificarse sometiéndola a la linealización. Sustituyendo la función de distribución $f = f_0(\boldsymbol{p}) + \delta f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ en la ecuación (18.5), retendremos en ella sólo dos sumandos lineales según $\boldsymbol{E}$ o bien según δf. Si consideramos que la función equilibrada de distribución $f_0(\boldsymbol{p})$ no depende de las coordenadas, la ecuación cinética linealizada tomará el aspecto

$$\mathbf{v}\frac{\partial \delta f}{\partial \boldsymbol{r}} + e\boldsymbol{E}\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}} = -\frac{\partial f}{\tau(\boldsymbol{p})}. \tag{18.6}$$

En esta última no entra ahora el sumando $\dfrac{\partial \delta f}{\partial \boldsymbol{p}}\, e\boldsymbol{E}$ que describe la desviación de la ley de Ohm.

Sea que en el espacio el campo $\boldsymbol{E}$ es homogéneo. Entonces la adición de no equilibrio δf tampoco dependerá de las coordenadas, $\partial\delta f/\partial \boldsymbol{r} = 0$, y la ecuación (18.6) se resolverá con facilidad:

$$\delta f = -e(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{E})\,\tau\frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}}. \tag{18.7}$$

La densidad de corriente determinada por esta adición de no equilibrio a la función de distribución se expresa como una integral por todos los valores del impulso:

$$j = e\int \mathbf{v}\delta f(\boldsymbol{p})d^3p = -e^2\int \tau \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{E})\frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}}d^3p =$$

$$= -e^2\int \tau\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{E})}{v}\frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}}dSd\mathscr{E}. \qquad (18.8)$$

Aquí, la magnitud dS es un elemento de la superficie de la energía constante en el espacio de impulso. Cuando la ligazón entre la energía y el impulso de las partículas portadoras de la carga eléctrica es la misma que la de las partículas libres, es decir, $\mathscr{E}(\boldsymbol{p}) = p^2/2m$, tendremos

$$dS = 2^{1/2}m^{3/2}\mathscr{E}^{1/2}d\Omega_p.$$

Con frecuencia, en los sólidos la ligazón $\mathscr{E}(\boldsymbol{p})$ se complica debido a la interacción de las partículas con la red cristalina. Entonces, la magnitud dS será determinada por la dependencia concreta $\mathscr{E}(\boldsymbol{p})$.

De (18.8) se desprende que el coeficiente de proporcionalidad σ llamado conductividad, que enlaza la densidad de corriente j y la intensidad del campo $\boldsymbol{E}$, es un tensor:

$$\sigma_{\alpha\beta} = -e^2\int \tau(\boldsymbol{p})\frac{v_\alpha v_\beta}{v}\frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{F}}dS\,d\mathscr{F}. \qquad (18.9)$$

Al calcular las integrales en (18.9) es más cómodo tomar primero la integral por la superficie de la energía constante y, después, por todas las energías. De la manera más sencilla la integral (18.9) se calcula para los metales. En los últimos, la función de equilibrio de distribución es una función de Fermi, cuya derivada por la energía es cercana a la función delta y se distingue de cero sólo para $\mathscr{E} = \mathscr{E}_F$ que es la energía de Fermi. Tomando en consideración que

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}} = -\delta(\mathscr{E} - \mathscr{E}_F),$$

obtenemos

$$\sigma_{\alpha\beta} = e^2\int \tau(\boldsymbol{p})\frac{v_\alpha v_\beta}{v}\,dS.$$

La integral en esta fórmula se toma por la superficie de Fermi.

Suponiendo que el tiempo de relajación τ sólo depende del módulo del impulso p, la fórmula hallada se simplifica y adquiere el aspecto

$$\sigma_{\alpha\beta} = e^2\int \tau(p)\frac{v_\alpha v_\beta}{v}\,dS. \qquad (18.10)$$

La fórmula (18.10) puede ser incluso aplicable a tales metales en los que la superficie de Fermi no es esférica. Esto se debe a que la geometría de la superficie de Fermi se determina, fundamentalmente, por la interacción de los electrones de conducción con los átomos de la red cristalina dispuestos de modo regular, mientras que el carácter de la dependencia $\tau(p)$ se determina por los procesos de dispersión de los electrones, p. ej., en las impurezas situadas de manera caótica. Pero, a pesar de todo, hay que recordar que en ciertos casos la independencia de τ del sentido del vector p puede resultar ser una realidad no adecuada (no equivalente).

La expresión (18.10) determina un tensor simétrico que puede ser diagonal. Al considerar cristales cúbicos los tres componentes diagonales del tensor de conductividad coinciden, de manera que el tensor $\sigma_{\alpha\beta}$ se convierte en escalar y puede escribirse así

$$\sigma = {}^1/_3 e^2 \int v\tau(p)\, dS. \tag{18.11}$$

En el más sencillo caso de la superficie esférica de Fermi

$$\sigma = {}^4/_3 \pi e^2 p_F^3 \tau(p_F)/m.$$

En esta expresión la magnitud ${}^4/_3\pi p_F^3$ es un volumen en el espacio de impulsos contenido dentro de la superficie de Fermi. Si el volumen corriente es igual a uno, en los estados que corresponden al volumen de fase obtenido de este modo, con la estadística de Fermi, se encontrarán n partículas así que la última fórmula tomará la sencilla forma:

$$\sigma = e^2 n\tau(p_F)/m.$$

Al tratarse de semiconductores o de otros sistemas subordinados a la estadística clásica, en (18.9) habrá de tomarse como función f_0 la distribución de Maxwell. En este caso (suponiendo como antes que el tiempo de relajación es isótropo), es cómodo escribir la fórmula (18.9) del siguiente modo

$$\sigma = \frac{e^2}{3T} \int f_0 \tau v^2 d^3 p, \tag{18.12}$$

(T es la temperatura). Si la función de distribución se normaliza para la concentración de los portadores de corriente, es posible reescribir la última fórmula en la forma

$$\sigma = \frac{ne^2}{3T} \overline{(\tau v^2)}. \tag{18.13}$$

Aquí, $\overline{(\tau v^2)}$ es la media, según la distribución de Maxwell, del valor del producto $v^2\tau(v)$. Adoptando que $\tau = \text{const}$ (lo que, claro está, es una basta aproximación que no siempre es justa) y tomando en consideración que $\frac{1}{2}m\overline{v_2} = {}^3/_2 T$, (18.13) tendrá el aspecto

$$\sigma = ne^2\tau/m. \tag{18.14}$$

Ésta lleva el nombre de *fórmula de Drude* y puede también ser obtenida partiendo de un examen plenamente elemental.

La conductividad de los medios condensados se determina por la dispersión de los electrones en las impurezas y en los fonones, en tanto que la conductividad del plasma débilmente ionizado, por la dispersión de los electrones en los átomos neutrales.

De hecho, con el fin de alcanzar una descripción satisfactoria de los experimentos para medir la conductividad de los medios en un extenso intervalo de valores de los parámetros de ellos, hay que tener en cuenta múltiples sutiles singularidades de la estructura de las integrales de colisión en las ecuaciones cinéticas. Este estudio es el objeto de la cinética física.

§ 19. Sustancia piezo y ferroeléctrica

19.1. Efecto piezoeléctrico. De acuerdo con el § 15, P. II las tensiones internas y, por lo tanto, el tensor de tensiones $\sigma_{\alpha\beta}$ en un dieléctrico isótropo dependen del campo eléctrico de manera cuadrática. Esto se debe a que en los líquidos la variación $\delta\varepsilon$ de la constante dieléctrica está sólo condicionada por el cambio de la densidad del líquido en el punto dado. En los cuerpos cristalinos rígidos la deformación de éstos y la variación correspondiente de las constantes dieléctricas pueden transcurrir sin el cambio de la densidad del medio. Entonces, es posible que las tensiones internas en el medio sean proporcionales a la primera potencia del campo. Los medios en los que la deformación depende de modo lineal del campo aplicado (o en los que durante la deformación del medio surge polarización eléctrica lineal según la deformación) reciben el nombre de *sustancia piezoeléctrica*.

El medio es piezoeléctrico cuando el vector de inducción eléctrica $\boldsymbol{D}$ depende no sólo de $\boldsymbol{E}$, sino de $\sigma_{\alpha\beta}$. Con otras palabras, en las sustancias piezoeléctricas*)

$$D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}E_\beta + 4\pi\gamma_{\alpha\beta\varepsilon}\sigma_{\beta\varepsilon}. \tag{19.1}$$

El tensor de III rango $\gamma_{\alpha\beta\varepsilon}$ recibe el nombre *piezoeléctrico*. Como el tensor de tensiones $\sigma_{\beta\varepsilon}$ es simétrico, el tensor $\gamma_{\alpha\beta\varepsilon}$ es asimismo simétrico por los dos últimos signos.

Establezcamos la ligazón entre la deformación del cuerpo y el campo eléctrico aplicado a él. Con este fin escribimos la diferencial de la energía libre (partiendo de la unidad de volumen) para el caso cuando el cuerpo cristalino está deformado y sobre él se aplica un campo eléctrico. En lugar de (14.6) tendremos

$$dF = -SdT + \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{D} + \sigma_{\alpha\beta}du_{\alpha\beta} \tag{19.2}$$

*) En algunos tipos de cristales en el segundo miembro de (19.1) pueden entrar los componentes del vector continuo $D_{0\alpha}$.

donde el tensor de deformación $u_{\alpha\beta}$, como sabemos de la mecánica de medios continuos, con pequeñas deformaciones tiene la forma

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right).$$

Aquí u_α es el vector de desplazamiento de los elementos del medio con la deformación.

Eligiendo como derivadas independientes T, E y $\sigma_{\alpha\beta}$, en lugar de la energía libre es cómodo introducir el potencial termodinámico

$$\Phi(T, E, \sigma_{\alpha\beta}) = F - \frac{1}{4\pi} ED - \sigma_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta}. \tag{19.3}$$

Combinando (19.3) y (19.2), tendremos

$$d\Phi = -S\,dT - \frac{1}{4\pi} D\,dE - u_{\alpha\beta} d\sigma_{\alpha\beta}. \tag{19.4}$$

De aquí se deduce la ligazón entre $u_{\alpha\beta}$ y el potencial termodinámico Φ:

$$u_{\alpha\beta} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{\alpha\beta}}\right)_{T,E}. \tag{19.5}$$

Integrando (19.4), teniendo en cuenta (19.1), obtenemos

$$\Phi = \Phi_0(T, \sigma_{\alpha\beta}) - \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{\alpha\beta} E_\alpha E_\beta - \gamma_{\alpha\beta\varepsilon} E_\alpha \sigma_{\beta\varepsilon}. \tag{19.6}$$

Aquí, en forma explícita se han destacado los términos dependientes del campo eléctrico. Diferenciando (19.6) por $\sigma_{\alpha\beta}$, hallamos

$$u_{\alpha\beta} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} + \gamma_{\varepsilon\alpha\beta} E_\varepsilon.$$

El último sumando determina la deformación del medio surgida a expensas de la superposición del campo eléctrico:

$$u^{(E)}_{\alpha\beta} = \gamma_{\varepsilon\alpha\beta} E_\varepsilon. \tag{19.7}$$

19.2. Sustancias ferroeléctricas. Hasta el momento hemos tratado sustancias que se polarizaban por el efecto del campo eléctrico exterior o bien por la deformación mecánica del medio. No obstante, también hay sustancias que se polarizan de manera espontánea en cierto intervalo de temperaturas. Ellas reciben el nombre de *sustancias* (materiales) *ferroeléctricas*. Podemos considerar estas sustancias análogas eléctricas de los materiales ferromagnéticos. Las sustancias ferroeléctricas se distinguen por su elevada constante dieléctrica y por tener bucle (ciclo) de histéresis dieléctrica. Los materiales ferroeléctricos, cuya polarización espontánea se conserva por todo el intervalo de temperaturas son llamados materiales *piroeléctricos*.

La transición de la sustancia ferroeléctrica del estado en el que no hay polarización espontánea (de la fase paraeléctrica) al estado con polarización espontánea no igual a cero (a la fase piroeléctrica) puede ser transición de fase de I o bien de II orden. Indiferentemente del tipo de transición de fase, la temperatura con la que ésta transcurre lleva la denominación de *temperatura ferroeléctrica de Curie*.

El sentido del vector de polarización espontánea puede variarse al aplicar el campo exterior. Para semejante reorientación de la dirección de polarización de la sustancia ferroeléctrica es posible que sea necesario un campo de valor finito. La correspondiente magnitud es llamada *fuerza coercitiva*. A una temperatura inferior a la de Curie Θ, siendo nulo el campo exterior, la sustancia ferroeléctrica puede ser dividida en regiones con dirección inversa de la polarización que suelen denominarse *dominios*. Esto se debe a que en un cuerpo de un sólo dominio de dimensiones finitas, fuera del cristal aparece un campo eléctrico que se ha adoptado llamar *depolarizador*. Al dividir la sustancia ferroeléctrica en dominios, dicho campo disminuye en alto grado. La partición en dominios transcurre de forma que la energía del campo depolarizador y la energía superficial de las cargas límites alcanzan un mismo orden. El límite entre los dominios con orientación antiparalela (opuesta) del vector es, por regla, fino (en las sustancias ferroeléctricas es de un orden de varias distancias atómicas; en las ferromagnéticas, el grosor de la región de transición entre los dominios, mucho mayor).

Examinemos la conducta de una sustancia ferroeléctrica unidimensional de un dominio a una temperatura cerca de la de Curie, sin tomar en consideración las tensiones internas. Comencemos por el caso cuando la transición de la fase paraeléctrica a la piroeléctrica es una transición de fase de II orden. La densidad de energía adicional de la sustancia, relacionada con la aparición de la polarización espontánea, puede representarse en forma de una serie por potencias del vector de polarización

$$F = \frac{\alpha}{2} P^2 + \frac{\beta}{4} P^4 + \ldots \tag{19.8}$$

El desarrollo de la función F transcurre por las potencias pares de la polarización, ya que la energía libre no depende del sentido del vector $\boldsymbol{P}$.

La polarización con la que la energía libre es extremal, se determina de la ecuación

$$\partial F(P)/\partial P = 0 \tag{19.9}$$

que, teniendo en cuenta (19.8), toma el aspecto

$$\alpha P + \beta P^3 = P(\alpha + \beta P^2) = 0. \tag{19.10}$$

El extremo de la energía libre será, precisamente, mínimo si la segunda derivada de F por la polarización es positiva, a lo que corresponde la desigualdad

$$\alpha + 3\beta P^2 > 0. \tag{19.11}$$

Cuando la temperatura T es mayor que la de Curie Θ, la polarización de una sustancia ferroeléctrica es nula. Por esto, como sigue de (19.11), $\alpha > 0$ si $T > \Theta$. Para $T < \Theta$

$$P^2 = -\alpha/\beta, \tag{19.12}$$

con la particularidad de que α y β tienen diferentes signos. Sustituyendo (19.12) en (19.11) nos cercioramos de que $\alpha < 0$. Correspondientemente, $\beta > 0$. Así, pues, junto a la transición el coeficiente α depende de la temperatura de modo que al pasar por la temperatura (punto) de Curie varía su signo. Por dicha razón, junto al punto $T = \Theta$ el coeficiente α puede descomponerse en la serie de Taylor por las potencias de $T - \Theta$, dejando en el desarrollo sólo el término lineal:

$$\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial T}\Bigg|_{T=\Theta} \cdot (T - \Theta) = \alpha'_{\Theta}(T - \Theta). \tag{19.13}$$

De aquí

$$P^2 = \frac{\alpha'_{\Theta}}{\beta}(\Theta - T) \qquad \text{para} \qquad T < \Theta. \tag{19.14}$$

La forma de la función F a temperaturas próximas a la de Curie Θ se ofrece en la fig. 19.1. En ésta y de la fórmula (19.14) sigue que la polarización espontánea surge en el punto de Curie y que el cuadrado de esta polarización crece linealmente al disminuir T siendo pequeña la diferencia $\Theta - T$.

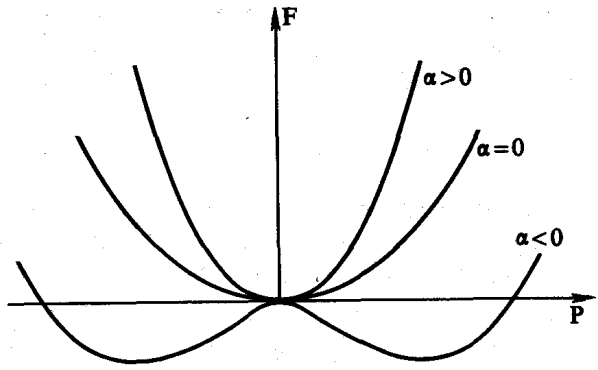

Fig. 19.1

Con el fin de comprender cómo se comporta la constante dieléctrica de la sustancia ferroeléctrica junto al punto de transición, ella debe ubicarse en un campo eléctrico. La densidad de energía libre de la sustancia se escribe, en tal caso, en la forma

$$F = F_0 + \tfrac{1}{2}\alpha P^2 + \tfrac{1}{4}\beta P^4 - PE. \tag{19.15}$$

Aquí F_0 es la energía libre de la sustancia en la fase paraeléctrica. La energía libre F es extremal cuando

$$\alpha P + \beta P^3 - E = 0. \tag{19.16}$$

El valor mínimo de la energía libre F será asegurado si se cumple la desigualdad

$$\alpha + 3\beta P^2 > 0, \tag{19.17}$$

que por su forma coincide con la desigualdad $\partial F/\partial P > 0$. Para $T > \Theta$ y en campos débiles la ecuación (19.16) puede reescribirse así

$$E = \alpha P. \tag{19.18}$$

Por consiguiente, α^{-1} es la susceptibilidad dieléctrica de la sustancia que se encuentra en la fase paraeléctrica. Como $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha^{-1}$, en estas condiciones la constante dieléctrica de la sustancia

$$\varepsilon(T) \approx \frac{4\pi}{\alpha'_\Theta(T - \Theta)} = \frac{T_c}{T - \Theta}. \tag{19.19}$$

La fórmula (19.19) es la expresión matemática de la *ley de Curie — Weiss*, la *constante* $T_c = 4\pi/\alpha'_\Theta$ recibe el nombre de *Curie — Weiss*. El orden del valor de la constante T_c para diversas sustancias ferroeléctricas constituye $10^3 \ldots 10^5$ K.

De (19.19) se desprende que para $T \to \Theta$ la constante dieléctrica de la sustancia se hace muy grande. En nuestra deducción no se tuvieron en cuenta las pérdidas de energía con la polarización de la sustancia, por ello para $T \to \Theta$, de acuerdo con (19.19), la constante dieléctrica tiende al infinito. En realidad $\varepsilon(T)$, cuando $T \to \Theta$, debe mostrar un máximo muy expresivo. Para $T < \Theta$

$$E = \alpha P + \beta P^3,$$

con la particularidad de que P consta de dos partes: la polarización espontánea P_{esp} y la polarización P_{ind} inducida por el campo eléctrico. Si el campo es débil y podemos considerar que $P_{esp} \gg P_{ind}$ y $P_{esp} = -\alpha/\beta$, entonces

$$P_{ind} = -\frac{1}{2\alpha} E. \tag{19.20}$$

Así, pues, en el caso de la fase piroeléctrica la magnitud ε también crece fuertemente cuando $\Theta - T \to 0$. A esa misma distancia de la temperatura de Curie la constante dieléctrica de la sustancia que se encuentra en la fase paraeléctrica, es dos veces mayor que en la piroeléctrica.

La fórmula $E = \alpha P + \beta P^3$ nos proporciona la dependencia entre la polarización y el campo, si de ella hallamos $P = P(E)$. Dicha dependencia está representada en la fig. 19.2. El sector *ab* de la curva $P = P(E)$ corresponde al estado inestable. Como vemos en la figura, en dicho sector

$\partial P/\partial E < 0$, al mismo tiempo que el mínimo de energía libre corresponde a la desigualdad $\partial P/\partial E > 0$. En la figura vemos también que al disminuir el campo E y cambiar su signo, la polarización P varía el suyo no de inmediato, sino que sólo al alcanzar el campo determinado valor. A los respectivos valores del campo corresponden los puntos f y g en el eje de las abscisas. Los segmentos $0f$ y $0g$ son, precisamente, los que determinan la fuerza coercitiva. La variación del sentido de la polarización transcurre a salto (transición del punto a al d y del punto b al c).

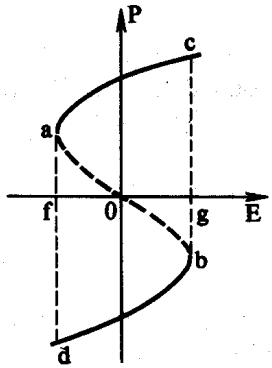

Fig. 19.2

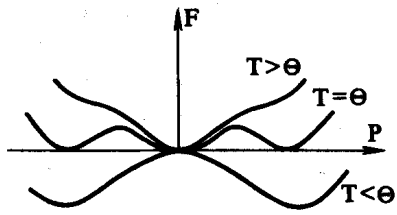

Fig. 19.3

En algunas sustancias ferroeléctricas, cuando la temperatura se aproxima a la de Curie, la polarización espontánea surge a salto y no crece gradualmente. Esto significa que en el caso descrito la transición del estado paraeléctrico al piroeléctrico es una transición de fase de I orden. Para describir de manera suficientemente correcta la transición, el desarrollo F en una serie por las potencias de P (en ocasiones este *desarrollo* se llama *de Guinsburg — Dewonshir*) debe ser continuado hasta el término proporcional P^6:

$$F = F_0 + \frac{\alpha}{2}P^2 + \frac{\beta}{4}P^4 + \frac{\gamma}{6}P^6 - PE. \qquad (19.21)$$

Como se deduce de la fig. 19.3, si $T = \Theta$ surgen dos mínimos de la energía libre, lo que corresponde a la existencia simultánea de las fases para y piroeléctricas. Siendo $T < \Theta$ sólo queda la fase piroeléctrica. La coincidencia para $T = \Theta$ de la energía libre de las dos fases quiere decir que en tal caso

$$\alpha + \tfrac{1}{2}\beta P_{esp}^2 + \tfrac{1}{3}\gamma P_{esp}^4 = 0. \qquad (19.22)$$

Pero, por otro lado, la condición cuando F es extremal conduce a la ecuación

$$\alpha + \beta P_{esp}^2 + \gamma P_{esp}^4 = 0. \qquad (19.23)$$

Las ecuaciones (19.22) y (19.23) deben realizarse al mismo tiempo. Multipliquemos (19.23) por 1/3 y sustrayamos de ella (19.22). Entonces los términos que contienen P_{esp}^4 se reducen y obtenemos

$$P_{esp}^2 = -4\alpha/\beta. \tag{19.24}$$

Sustituyendo en (19.23) el valor del cuadrado de la polarización espontánea P_{esp}^2 hallado de tal modo, determinamos que los coeficientes α, β, γ están ligados mediante la relación

$$\alpha\gamma = {}^3/_{16}\beta^2. \tag{19.25}$$

De (19.24) se desprende que α y β deben tener diversos signos y de (19.25) que los signos de los coeficientes α y γ han de coincidir. El coeficiente $\alpha > > 0$, lo que sigue de que para $T = \Theta$ uno de los mínimos de la energía libre F se produce para $P = 0$, es decir, $\beta < 0$ y $\gamma < 0$.

La susceptibilidad dieléctrica cerca del punto de la transición de fase de I orden puede hallarse de la expresión

$$E = \alpha P + \beta P^3 + \gamma P^5 \tag{19.26}$$

que se deduce en directo del desarrollo de Guinsburg — Dewonshir. La polarización $P = P_{esp} + P_{ind}$. Por encima del punto de transición $P_{esp} = 0$ y en el caso de un campo débil (19.26) toma el aspecto $E = \alpha P$, de forma que

$$k\,|_{T>\Theta} = 1/\alpha. \tag{19.27}$$

Debajo del punto de transición

$$E = \alpha(P_{esp} + P_{ind}) + \beta(P_{esp} + P_{ind})^3 + \gamma(P_{esp} + P_{ind})^5.$$

En un campo débil $P_{esp} \gg P_{ind}$ así que la última fórmula puede escribirse

$$E = (\alpha + 3\beta P_{esp}^2 + 5\gamma P_{esp}^4)P_{ind},$$

de donde

$$k\Big|_{T<\Theta} = \frac{1}{\alpha + 3\beta P_{esp}^2 + 5\gamma P_{esp}^4}.$$

Tomando en consideración (19.24) y (19.25), tendremos

$$k\Big|_{T<\Theta} = 1/4\alpha. \tag{19.28}$$

De lo expuesto queda claro que con la transición de fase de primer orden tanto la polarización espontánea, como la susceptibilidad dieléctrica (y asimismo la constante dieléctrica) sufren un salto en el punto de transición; la primera en un valor igual a $\sqrt{{}^3/_8(\beta/\gamma)}$ y la segunda, a ${}^3/_4\alpha$.

En la exposición ofrecida hemos supuesto que el medio no experimenta deformación. La deformación del medio conduce a la complicación de las propiedades dieléctricas de las sustancias ferroeléctricas.

Capítulo III. Campo magnético continuo en medios

§ 20. Clasificación de los materiales magnéticos

Los medios cuya permeabilidad magnética μ se distingue de la unidad reciben el nombre de *materiales magnéticos*. En tales medios el campo magnético $\boldsymbol{H}$ y la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ no coinciden entre sí. La ligazón entre $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{B}$ puede ser no sólo lineal. En ciertos materiales magnéticos (en primer lugar, en los ferromagnéticos) ella puede ser no lineal e, incluso, no unívoca. Además de la permeabilidad magnética μ, con frecuencia se usa otra característica de los materiales magnéticos, es decir, la susceptibilidad magnética χ. Ésta liga la densidad del momento magnético $\boldsymbol{M}$ y la intensidad del campo magnético $\boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{M} = \chi \boldsymbol{H} \tag{20.1}$$

y está enlazada con la permeabilidad magnética μ mediante la relación

$$\chi = (\mu - 1)/4\pi. \tag{20.2}$$

Para diferentes materiales magnéticos la susceptibilidad magnética puede ser una magnitud positiva o negativa. Si $\chi > 0$ tales sustancias se llaman *paramagnéticas*. Los metales alcalinos y el oxígeno molecular son ejemplos de medios paramagnéticos. El orden del valor de la susceptibilidad magnética molar de dichos medios es de $\chi \sim 10^{-3} \ldots 10^{-6}$. El paramagnetismo está condicionado por la orientación mediante el campo exterior de los momentos magnéticos propios de los elementos estructurales, que constituyen la sustancia, que también existen al no haber campo magnético exterior.

Son llamadas *diamagnéticas* aquellas sustancias cuya susceptibilidad magnética es negativa. En semejante medio la susceptibilidad molar $\chi \sim -10^{-6}$. Los gases inertes son ejemplo de medios diamagnéticos. El diamagnetismo es un fenómeno universal y propio de todos los cuerpos sin excepción*). Pero dicho fenómeno se observa, por regla, cuando los átomos o moléculas con $\boldsymbol{H} = 0$ no tienen momento magnético propio, ya que el paramagnetismo, por ser más fuerte, camufla, generalmente, el efecto diamagnético.

La tercera clase de materiales magnéticos está constituida por los medios en los que hay momento magnético macroscópico incluso al no haber campo exterior. Su representante típico son las sustancias ferromagnéticas. Además de éstas pueden asimismo existir las sustancias antiferromagnéti-

*) Como ejemplo aducimos los valores de la susceptibilidad diamagnética molar de una serie de gases inertes. Para el helio χ constituye $-1{,}9 \cdot 10^{-6}$ cm^3/mol, neón $-7{,}2 \cdot 10^{-6}$, argón $-19{,}4 \cdot 10^{-6}$, criptón $-28 \cdot 10^{-6}$, xenón $-43 \cdot 10^{-6}$. La susceptibilidad diamagnética molar de ciertos iones en los cristales tiene el mismo orden. Para el ion F^- $-9{,}4 \cdot 10^{-6}$, Li^+ $-0{,}7 \cdot 10^{-6}$, Ca^{2+} $-10{,}7 \cdot 10^{-6}$, Ba^{2+} $-29 \cdot 10^{-6}$, I^- $-50 \cdot 10^{-6}$.

cas en las que existen cadenas de átomos, con momentos magnéticos dirigidos en sentidos opuestos, que surgen de modo espontáneo. También pueden existir otras estructuras magnéticas.

§ 21. Campo magnético continuo en un medio condicionado por corrientes

Las ecuaciones de Maxwell que describen el campo magnético continuo, tienen la forma

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}_{\text{ext}}, \tag{21.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{21.2}$$

La última ecuación se satisface idénticamente con la relación

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}. \tag{21.3}$$

Las ecuaciones (21.1) y (21.2) deben ser completadas con ecuaciones materiales:

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \tag{21.4a}$$

o bien

$$\boldsymbol{M} = \chi \boldsymbol{H}, \tag{21.4b}$$

con la particularidad de que, por regla, $\boldsymbol{M} = \frac{1}{4\pi} (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{H})$.

Elijamos la calibración $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$. Entonces de (21.1) y (21.3), obtenemos:

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \right) = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}_{\text{ext}}. \tag{21.5}$$

Al resolver esta ecuación podemos hallar el potencial vectorial $\boldsymbol{A}$ según la distribución prefijada de las corrientes extrañas. En un medio espacialhomogéneo la ecuación (21.5) se simplifica y toma el aspecto

$$\Delta \boldsymbol{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \boldsymbol{j}_{\text{ext}}. \tag{21.6}$$

Por esto, en un medio homogéneo e isótropo

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{c} \int \frac{\boldsymbol{j}_{\text{ext}}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dV'. \tag{21.7}$$

De la última fórmula y de (21.3) se deduce que, para $\boldsymbol{j}_{\text{ext}}$ prefijada, $\boldsymbol{H}$ resulta ser el mismo que si no hubiese medio de ninguna clase.

Cuando entre los medios hay límite brusco de separación de (21.1) y (21.2) podemos obtener con facilidad las condiciones de frontera:

$$B_{1n} = B_{2n}, \qquad H_{1\tau} - H_{2\tau} = \frac{4\pi}{c} i_{\text{ext}}, \tag{21.8}$$

donde i_{ext} es la densidad superficial de las corrientes extrañas. Si resolvemos la ecuación (21.5), al haber un límite brusco de separación es preciso formular la condición de frontera para el potencial vectorial A. Las singularidades que podrían surgir al haber corrientes superficiales pueden ser estimadas escribiendo la aportación de A_s en el potencial vectorial A por parte de las corrientes superficiales en la forma

$$A_S = \frac{\mu}{c} \int \frac{i_{ext} dS}{|r - r'|}. \tag{21.9}$$

La integración se realiza por la superficie de separación. Dividamos en dos esta región de integración. Una de ellas estará situada dentro de la circunferencia de pequeño radio descrita en torno del punto en el que buscamos A_S, la segunda, fuera de la circunferencia. Esta última no puede conducir a singularidades en el integrando de la fórmula (21.9). La región dentro de la circunferencia requiere un examen especial, ya que en este caso el denominador puede anularse. Estimemos la aportación en A_S de esta región del modo siguiente:

$$|A_S| = \frac{\mu}{c} |i_0| \int_0^{R_0} \frac{r' dr'}{r'} = \frac{\mu |i_0| R_0}{c}.$$

Aquí R_0 es el radio de la circunferencia elegida. Al tender R_0 a cero el valor de $|A_S|_{R_0}$ también tiende a cero. Así, pues, cuando hay un límite brusco de seraparación entre los medios, todos los componentes del potencial vectorial son función continua de las coordenadas.

§ 22. Relaciones termodinámicas para los materiales magnéticos en el campo magnético

El campo magnético de por sí no efectúa trabajo. Esto se debe a que la parte de la fuerza de Lorentz, condicionada por el campo magnético, es siempre perpendicular a la velocidad de las partículas del medio. Pero la variación del campo magnético está ligada con el trabajo sobre el medio. Dicha variación induce en el medio un campo eléctrico que en el tiempo Δt efectúa sobre el medio el trabajo

$$\Delta t \int j \cdot E \, dV. \tag{22.1}$$

Sustituyendo aquí el valor de $j = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} H$, obtenemos

$$\frac{c\Delta t}{4\pi} \int E \operatorname{rot} H \, dV = \frac{c\Delta t}{4\pi} \int H \operatorname{rot} F \, dV =$$

$$= \frac{c\Delta t}{4\pi} \int H \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \right) dV = -\frac{1}{4\pi} \int H \delta B \, dV.$$

Aquí $\delta \boldsymbol{B}$ es la variación de la inducción magnética en el lapso Δt. Ahora podemos escribir el segundo principio de la termodinámica del modo siguiente

$$\delta U = T\delta S + \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{H}\cdot\delta\boldsymbol{B}\,dV. \tag{22.2}$$

La variación de la energía libre, referida a la unidad de volumen, toma la forma

$$dF = -S\,dT + \zeta d\tau + \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{B}. \tag{22.3}$$

En esta fórmula se ha tomado en consideración la dependencia de la energía de la densidad τ de la sustancia, la magnitud ζ es el potencial químico. Al describir los fenómenos magnéticos también se hace uso de los potenciales

$$\tilde{U} = U - \frac{\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}}{4\pi} \quad \text{y} \quad \tilde{F} = F - \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}. \tag{22.4}$$

Para el potencial $\tilde{F}$ introducido de esta manera son variables independientes la temperatura T, la densidad τ y el campo magnético $\boldsymbol{H}$, con ello

$$d\tilde{F} = -S\,dT + \zeta d\tau - \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{H}. \tag{22.5}$$

Al existir la ligazón lineal $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$, tendremos

$$U = U_0(S,\tau) + \frac{\boldsymbol{B}^2}{8\pi\mu}, \qquad F = F_0(T,\tau) + \frac{\boldsymbol{B}^2}{8\pi\mu}, \tag{22.6}$$

$$\tilde{U} = U_0(S,\tau) - \frac{\mu H^2}{8\pi}, \qquad \tilde{F} = F_0(T,\tau) - \frac{\mu H^2}{8\pi}.$$

También puede ser cómodo el potencial

$$f = F - H^2/8\pi \tag{22.7}$$

para el que son variables independientes T, τ y la imantabilidad $\boldsymbol{M}$

$$df = -S\,dT + \zeta d\tau + \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{M}. \tag{22.8}$$

El incremento del potencial $\tilde{f} = \tilde{F} + H^2/8\pi$ tiene el aspecto

$$d\tilde{f} = -S\,dT + \zeta d\tau - \boldsymbol{M}\,d\boldsymbol{H}. \tag{22.9}$$

El trabajo $\frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{H}\delta\boldsymbol{B}\,dV$ sobre el "campo" por parte de la fuerza extraña que asegura la existencia de las corrientes también puede ser repre-

sentado de otra forma

$$\frac{1}{4\pi}\int H\delta B\,dV = \frac{1}{4\pi}\int H\,\mathrm{rot}\,\delta A\,dV = \frac{1}{4\pi}\int \delta A\,\mathrm{rot}\,H\,dV = \frac{1}{c}\int j\delta A\,dV. \quad (22.10)$$

Por fin, introduzcamos un potencial, con relación al cual la variable independiente sería aquel campo magnético H_e que existiría al no haber medio:

$$\mathcal{F} = \int (F + H_e^2/8\pi)\,dV, \quad (22.11)$$

de forma que

$$d\mathcal{F} = \int dV\left(-S\,dT + \zeta\,d\tau - \frac{1}{4\pi}B\delta H + \frac{H_e\delta H_e}{4\pi}\right).$$

Transformemos de la manera siguiente los términos que contienen en forma explícita el campo magnético:

$$-\frac{1}{4\pi}\int dV(B\delta H - H_e\delta H_e) = -\frac{1}{4\pi}\int dV\{(H - H_e)\delta H_e + B\delta(H - H_e) +$$
$$+ (B - H)\delta H_e\} = -\frac{1}{4\pi}\int dV\{(H - H_e)\,\mathrm{rot}\,\delta A_e +$$
$$+ \mathrm{rot}\,A\delta(H - H_e) + (B - H)\delta H_e\}.$$

Aquí, el segundo miembro consta de tres integrales. El integrando de la primera integral lo representaremos en el aspecto

$$\mathrm{div}\,[(H - H_e) \times \delta A_e] + \delta A_e \cdot \mathrm{rot}\,(H - H_e).$$

La integral por el volumen de la divergencia es igual a cero. También es nulo $\mathrm{rot}\,(H - H_e)$ si consideramos que la corriente extraña no varía al aparecer el medio. Del mismo modo se transforma el integrando de la segunda integral al ser evidente que ella es asimismo nula. Así, pues, sólo no es igual a cero la integral

$$-\frac{1}{4\pi}\int (B - H)\delta H_e\,dV = -\int M\delta H_e\,dV.$$

Por esta causa, la variación del potencial termodinámico $\mathcal{F}$ puede escribirse del modo siguiente

$$d\mathcal{F} = -S\,dT + \zeta\,d\tau - M\,dH_e. \quad (22.12)$$

En el caso lineal, cuando $B = \mu H$, es posible hallar no sólo $d\mathcal{F}$, sino también $\mathcal{F} = \mathcal{F}(M, H_e)$:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0(T, \tau) - \frac{1}{8\pi}\int (H \cdot B - H_e^2)\,dV. \quad (22.13)$$

La parte de esta fórmula dependiente de manera explícita del campo magnético, es posible escribirla en la forma

$$-\frac{1}{8\pi}\int(H\cdot B - H_e^2)dV = \int(H - H_e)(B + H_e)dV + \int H_e\cdot(B - H)dV. \tag{22.14}$$

Al integrando de la primera de las integrales en el segundo miembro le daremos la forma

$$(H - H_e)(B + H_e) = (H - H_e)\,\mathrm{rot}\,(A + A_e) =$$
$$= \mathrm{div}\,[(H - H_e)\times(A + A_e)] + (A + A_e)\,\mathrm{rot}\,(H - H_e).$$

Como es regla, la integral de la divergencia se anula y $\mathrm{rot}\,(H - H_e) = 0$. Por ello, (22.13) tomará el aspecto

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0(T, \tau) - \tfrac{1}{2}M\cdot H_e. \tag{22.15}$$

§ 23. Desimantación adiabática

Como ejemplo de lo que nos puede proporcionar el enfoque termodinámico aplicado a la descripción de las propiedades magnéticas del medio, examinemos el problema de la variación de la temperatura de un medio paramagnético cuando transcurre la desimantación del cuerpo calorífugo. Semejante desimantación adiabática se utiliza para obtener temperaturas ultrabajas. En este caso la sucesividad de acciones es la siguiente. Primero, el material paramagnético se imanta en un proceso isotérmico. A continuación, se produce su desimantación adiabática. Al obrar así, veremos que el material paramagnético se enfriará.

En nuestro ejemplo haremos uso de sustancias paramagnéticas ideales. Llamamos ideal el medio paramagnético cuya imantabilidad sólo depende de la razón entre la intensidad del campo magnético H y la temperatura del medio T

$$M = f(H/T). \tag{23.1}$$

En particular, como veremos en el § 24, la fórmula (23.1) puede tomar la forma

$$M = \chi H, \qquad \text{donde} \qquad \chi = C/T.$$

La última relación lleva el nombre de *ley de Curie*.

Elijamos la temperatura T y la imantabilidad M como variables independientes. La singularidad característica de una sustancia paramagnética ideal consiste en la independencia de su energía interna de la intensidad del campo magnético. De esto podemos cerciorarnos de la manera siguiente. De acuerdo con la fórmula (22.8) del parágrafo anterior, tenemos:

$$dU = TdS + HdM. \tag{23.2}$$

En esta expresión las magnitutes extensivas son consideradas específicas. De (23.2) se desprende que

$$\left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T + H\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T. \tag{23.3}$$

De la anterior fórmula asimismo sigue que

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H + H\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H. \tag{23.4}$$

Difirenciemos (23.3) por T y (23.4) por H. Como resultado obtenemos dos relaciones:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial H} = T\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial H} + H\frac{\partial^2 M}{\partial T \partial H} + \left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial H \partial T} = T\frac{\partial^2 S}{\partial H \partial T} + H\frac{\partial^2 M}{\partial H \partial T} + \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H.$$

Comparando los miembros primero y segundo de las dos últimas fórmulas, hallaremos que

$$\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H. \tag{23.5}$$

Ahora, retornemos a la fórmula (23.3). Con ayuda de (23.5), el primer sumando en el segundo miembro puede reescribirse de manera que la fórmula (23.3) tome el aspecto

$$\left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_T = T\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H + H\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T. \tag{23.6}$$

Si es conocida la dependencia de M respecto a T y H, mediante la fórmula (23.6) es posible juzgar acerca del carácter de la energía U del campo magnético a temperatura constante. Como al tratar sustancias paramagnéticas ideales la dependencia de M respecto a T y H se determina con ayuda de una relación del tipo (23.1)

$$\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H = -\frac{H}{T^2}\frac{\partial f}{\partial (H/T)}, \quad \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T = \frac{1}{T}\frac{\partial f}{\partial (H/T)}. \tag{23.7}$$

Sustituyendo (23.7) en (23.6) nos cercioramos de que

$$\left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_T = 0. \tag{23.8}$$

La práctica confirma que la dependencia entre la temperatura y la energía interna de una sustancia paramagnética ideal es próxima a la siguiente:

$$U = \alpha T^4, \qquad \alpha > 0. \tag{23.9}$$

Durante la imantación isotérmica que es la primera etapa del procedimiento de obtención de temperaturas ultrabajas según el método que examinamos, de acuerdo con (23.8) y (23.9), la energía interna no varía. Por ello,

$$dQ = -H dM \qquad \text{y} \qquad Q = -\int_0^{H_1} H df\left(\frac{H}{T}\right).$$

Cuando la función f es lineal, es decir, si se cumple la ley de Curie

$$Q = -\frac{C}{T_1}\int_0^{H_1} H dH = -\frac{CH_1^2}{2T_1}. \tag{23.10}$$

Aquí T_1 es la temperatura a la que se realiza el proceso isotérmico y a la que comienza a descender la temperatura con la desimantación adiabática.

Ahora ya es posible calcular la entropía específica S del medio paramagnético. La variación de ésta

$$dS = \frac{1}{T}(dU - H dM) = 4\alpha T^2 dT - C\frac{H}{T} d\left(\frac{H}{T}\right), \tag{23.11}$$

por lo tanto la propia entropía

$$S = {}^4/_3\alpha T^3 - {}^1/_2 C\left(\frac{H}{T}\right)^2 + \text{const.} \tag{23.12}$$

Pasemos, a continuación, a la segunda etapa del proceso: a la desimantación adiabática en esencia. En este caso la intensidad del campo magnético variará de H_1 a 0 a tal velocidad que no hay intercambio de calor y el valor de la entropía se conserva. No obstante, a cuenta de la desaparición del campo magnético

$$S = {}^4/_3\alpha T_2^3 + \text{const.} \tag{23.13}$$

Igualando (23.12) a (23.13) obtenemos la expresión que determina la temperatura al final del proceso de desimantación adiabática:

$$T_2^3 = T_1^3 - \frac{3C}{8\alpha}\left(\frac{H_1}{T_1}\right)^2. \tag{23.14}$$

Como $\alpha > 0$ y $C > 0$, $T_2 < T_1$. Con pequeños valores del campo

$$\Delta T = T_2 - T_1 = -\frac{CH_1^2}{8\alpha T_1^4}. \tag{23.15}$$

Ésta es aquella disminución de la temperatura que surge durante la desimantación adiabática. El denominador del segundo miembro de la fórmula (23.15) indica la pequeña variable T_1 a bajas temperaturas. Precisamente

por ello, la desimantación adiabática es un eficaz método de reducir la temperatura. Si la temperatura inicial es ya muy cercana a 0 K, la fórmula (23.15) puede predecir el enfriamiento del material paramagnético hasta una temperatura menor que 0 K. La explicación de este fenómeno radica en que a temperaturas bajas hasta el límite ya no existen sustancias paramagnéticas ideales. Un sistema de espines que no están en interacción puede ser ejemplo de sustancia paramagnética ideal. Pero a las temperaturas más bajas, incluso una pequeñísima energía de interacción entre los espines puede ser sustancial en el sentido de que a tales temperaturas la sustancia paramagnética ya no puede considerarse ideal.

§ 24. Teorema de Bohr — Van Lenven

En los parágrafos anteriores el magnetismo y los fenómenos que lo acompañan fueron descritos a nivel fenomenológico, lo que no es casual. En el presente parágrafo será mostrado que es imposible hacer una descripción consecutiva de los fenómenos de imantación en los márgenes de física clásica. Esta afirmación es el contenido del teorema de Bohr — Van Lenven que puede ser formulado de la forma siguiente: el momento magnético del medio, condicionado por el movimiento de las cargas en el campo magnético, de acuerdo con las leyes de física clásica es igual a cero en estado estacionario.

El teorema se demuestra del modo que sigue. De acuerdo con (22.12)

$$M = -\partial \mathcal{F}/\partial H_e. \tag{24.1}$$

De acuerdo con la estadística clásica, el potencial $\mathcal{F}$ se determina mediante la integral estadística

$$Z = \int \exp(-\mathcal{H}/T)(dq\,dp), \tag{24.2}$$

donde $\mathcal{H}$ es la función de Hamilton del sistema en el campo magnético exterior, $(dq\,dp)$, el producto de las diferenciales de las coordenadas generalizadas y de los impulsos de todas las partículas.

En la teoría no relativista clásica la función de Hamilton tiene la forma

$$\mathcal{H} = \sum_{a=1}^{N} \frac{(p_a + Ae_a/c)^2}{2m_a} + U \tag{24.3}$$

(la suma por a indica la adición por todas las partículas, U es la energía potencial de las partículas en interacción). Tomando esto en consideración, la integral estadística (24.2) puede escribirse así

$$Z = \int (dq\,dp) \exp\left\{-\frac{1}{T}\left(\sum_{a=1}^{N} \frac{(p_a + Ae_a/c)^2}{2m_a} + U\right)\right\}, \tag{24.4}$$

donde la integración se lleva a cabo por todo el espacio de fase.

Sustituyamos en (24.4) las variables $p + \frac{e}{c} A \to P$. Después de esto el potencial vectorial A y, por consiguiente, el campo magnético ya no entra en el exponente. Tampoco entra en el jacobiano de transformación $J = |\partial p_\alpha / \partial P_\beta|$ que con frecuencia es igual a la unidad. Entonces,

$$Z = \int (dq\, dp) \exp\left\{-\frac{1}{T}\left(\sum_{a=1}^{N} \frac{P_a^2}{2m_a} + U\right)\right\}, \tag{24.5}$$

y la integral estadística Z resulta ser una magnitud que no depende del campo magnético. Por eso, $M = -\partial \mathcal{F} / \partial H_e = 0$. Así, pues, en correspondencia con la teoría clásica, la imantabilidad de cualquier sustancia es igual a cero.

Al analizar la polarización de los dieléctricos en el campo eléctrico hicimos uso, de manera sustancial, de la relación (que es un caso particular del teorema fluctuativo-disipativo) que liga la constante dieléctrica del medio con la fluctuación media cuadrática de la polarización del medio cuando no hay campo exterior. Por esto, es de esperar que una relación de semejante género, que enlace la susceptibilidad magnética del medio con la fluctuación media cuadrática del momento magnético de la sustancia al no haber campo magnético, podría ser la base de la descripción microscópica de las propiedades magnéticas del medio. Tal relación tiene en realidad lugar, pero como sigue del teorema de Bohr — Van Lenven, es de carácter sustancialmente cuántico. En lo que atañe a la consideración clásica, que a veces se aplica para estimar el valor del efecto de imantación, contiene obligatoriamente (aunque en forma no explícita) tales afirmaciones que no pueden ser demostradas sólo en los márgenes de la física clásica. Como ejemplo de esta última afirmación podemos aducir las estimaciones de la susceptibilidad magnética basadas en el enfoque clásico.

Primero apreciemos el valor de la susceptibilidad magnética en las sustancias diamagnéticas. En cada átomo ubicado en el campo magnético exterior los electrones sufren precesión, lo que es equivalente a su rotación adicional a velocidad angular ω_L alrededor de un eje que pasa por el centro del átomo y dirigido en paralelo al campo magnético H. De acuerdo con el teorema de Larmor (§ 12, P. I) dicha frecuencia $\vec{\omega}_L = -eH/2mc$. La precesión larmoriana condiciona la aparición en cada electrón de la velocidad adicional

$$\mathbf{v} = \vec{\omega}_L \times r,$$

lo que conduce al surgimiento del momento magnético

$$M = \frac{1}{2c}\int r \times j\, dV = \frac{1}{2c}\int \rho r \times (\vec{\omega}_L \times r) dV =$$

$$= \frac{1}{2c}\int \rho[\vec{\omega}_L r^2 - r(\vec{\omega}_L \cdot r)] dV.$$

Dirijamos el eje z a lo largo del campo magnético. El componente del vector M dirigido a lo largo del eje z, será

$$\frac{1}{2c}\int \rho[\omega_L r^2 - z(\omega_L z)]dV = \frac{1}{2c}\int \rho(x^2 + y^2)\omega_L dV.$$

El valor medio de este componente según el tiempo

$$\bar{M}_z = \frac{\omega_L}{2c}\int \overline{\rho(x^2 + y^2)}dV \approx \frac{\overline{Ze(x^2 + y^2)}}{2c}\omega_L, \tag{24.6}$$

con la particularidad de que el vector $\vec{\omega}_L$ está dirigido en sentido opuesto al campo. Por esto, la imantación de la unidad de volumen

$$M = -\frac{NZe^2a^2}{4mc^2}H. \tag{24.7}$$

Aquí N es el número de átomos por unidad de volumen, Z el número de electrones en el átomo (número atómico), $a^2 = \overline{(x^2 + y^2)}$. Así, la susceptibilidad de una sustancia diamagnética tiene un valor del siguiente orden*):

$$\chi = -\frac{NZe^2a^2}{4mc^2}. \tag{24.8}$$

Semejante análisis clásica conduce a un valor de la susceptibilidad, cuyos orden y signo coinciden con los obtenidos en el experimento. En el examen realizado nos hemos permitido la suposición de que $a^2 = \overline{(x^2 + y^2)}$ puede ser una magnitud estacionaria al promediarla respecto del período de rotación de los electrones. Tal suposición no puede justificarse quedando en los márgenes de mecánica clásica.

Si los átomos tienen momentos magnéticos propios distintos de cero (la fundamentación de la existencia de tales momentos estacionarios requiere la aplicación de la mecánica cuántica), por regla, el diamagnetismo se camufla con el paramagnetismo. Examinemos un gas de átomos paramagnéticos. La proyección media del momento magnético de cada uno de los átomos sobre la dirección del campo magnético puede hallarse mediante la fórmula

$$(M_a)_H = M_a\int e^{-U/T}\cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta / \int e^{-U/T}\operatorname{sen}\theta\, d\theta, \tag{24.9}$$

donde $U = -\boldsymbol{M}_a\cdot\boldsymbol{B}$, $\theta = \widehat{(\boldsymbol{M}_a, \boldsymbol{B})}$. Resolviendo las integrales de (24.9), obtenemos

$$(M_a)_H = M_a\left(\operatorname{cth}\frac{M_aB}{T} - \frac{T}{M_aB}\right). \tag{24.10}$$

La expresión entre paréntesis se denomina función de Langevin que vamos a designar con el símbolo $L(M_aB/T)$.

---

*) En el caso de un medio enrarecido la fórmula (24.8) es precisa si a^2 se calcula por los métodos de la mecánica cuántica.

En campos magnéticos débiles, cuando $M_a B/T \ll 1$, la función de Langevin

$$L\left(\frac{M_a B}{T}\right) \to \frac{M_a B}{3T}$$

y la imantación específica

$$M = \frac{NM_a^2}{3T} B. \tag{24.11}$$

De (24.11) se deduce que en este caso, para la susceptibilidad paramagnética, es característica la existencia de una dependencia de la temperatura de la forma

$$\chi = C/T. \tag{24.12}$$

La dependencia (24.12) lleva el nombre de ley de Curie. En los campos magnéticos fuertes y a bajas temperaturas, siendo $M_a B > T$, como sigue de (24.10), la imantación cesa de depender de T y $\boldsymbol{B}$ y tiende al límite

$$M = NM_a B/B. \tag{24.13}$$

Con otras palabras, aquí observamos la saturación de la imantación.

§ 25. Efectos de transporte en el campo magnético

El campo magnético influye sobre el flujo de cargas eléctricas y de calor que surgen en el medio a expensas del campo eléctrico y el gradiente de temperatura. Como fue indicado en el § 17, P. II. en un medio isótropo ellos pueden ser escritos del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{j} &= (\sigma T)\left(\frac{\boldsymbol{E}}{T}\right) - (\beta T^2)\nabla \frac{1}{T}, \\ \boldsymbol{q} &= (\gamma T)\left(\frac{\boldsymbol{E}}{T}\right) - (\zeta T^2)\nabla \frac{1}{T}. \end{aligned} \tag{25.1}$$

Las magnitudes delante de las "fuerzas" onsagéricas $\boldsymbol{E}/T$ y $\nabla(1/T)$ son coeficientes cinéticos. Las fórmulas (25.1) asimismo se escriben con frecuencia en la forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \rho \boldsymbol{j} + \alpha \nabla T, \\ \boldsymbol{q} &= \beta \boldsymbol{j} - k \nabla T, \end{aligned} \tag{25.2}$$

con la particularidad de que los coeficientes

$$\rho = \sigma^{-1}, \qquad \alpha = \frac{-\beta}{\sigma}, \qquad \beta = \frac{\gamma}{\sigma} \qquad \text{y} \qquad k = \frac{\gamma\beta}{\sigma} + \zeta.$$

Al conectar el campo magnético de una intensidad $\boldsymbol{H}$, los coeficientes ρ, α, β, y k comienzan a depender de $\boldsymbol{H}$. Si el campo magnético es débil estos coeficientes pueden desarrollarse en una serie por las potencias de $\boldsymbol{H}$. En

una aproximación lineal por H el campo magnético que es un vector axial, sólo puede entrar en (25.2) en forma del producto vectorial de H por un vector polar de modo que el vector resultante sea de la clase de los polares, a la que pertenecen los vectores E y q en el primer miembro de la ecuación (25.2). Así, pues, reteniendo en el desarrollo de E y q por los potenciales de H los sumandos de orden nulo y de los primeros órdenes de pequeñez, obtenemos

$$E = \rho_0 j - \alpha_0 \nabla T + RH \times j + NH \times \nabla T, \tag{25.3a}$$

$$q = \beta_0 j - k_0 \nabla T + NTH \times j + LH \times \nabla T. \tag{25.3b}$$

El subíndice nulo de los coeficientes ρ, α, β y k quiere decir que sus valores se toman cuando no hay campo magnético. El hecho de que delante de los productos vectoriales $H \times \nabla T$ y $H \times j$ están los coeficientes que se expresan unos por otros, es resultado del principio de simetría de los coeficientes cinéticos de Onsager generalizado para el caso de la presencia del campo magnético. En mecánica estadística se demuestra que tal generalización del principio de Onsager conduce a la conclusión de que los coeficientes antes de los productos $H \times \nabla T$ y $H \times j$ deben diferenciarse en el factor T.

El sumando $RH \times j$ en (25.3a) describe el efecto de la influencia del campo magnético sobre la corriente. En correspondencia con esta expresión, el campo magnético lleva a la aparición de una corriente perpendicular al campo eléctrico y proporcional a la intensidad del campo magnético. Este fenómeno lleva la denominación de *efecto Hall*. De (25.3a) también se desprende que el efecto Hall conduce al surgimiento de un campo eléctrico perpendicular a la corriente y proporcional al campo magnético y a la corriente. El coeficiente R es llamado constante de Hall y puede ser tanto positivo, como negativo.

El último sumando en (25.3a) describe la influencia del campo magnético sobre la fuerza termoelectromotriz, es decir, el llamado *efecto Nernst*. El tercer sumando de (25.3b), que contiene el producto $H \times j$, describe la influencia del campo magnético sobre el efecto Peltier, denominado *efecto Ettingshausen*. Para acabar, el sumando con el coeficiente L describe la influencia del campo magnético sobre la conductividad térmica y recibe el nombre de *efecto Righi — Leduc*.

§ 26. Ferromagnetismo

Las sustancias ferromagnéticas son representantes típicos de los materiales magnéticos no lineales. El rasgo externo más sencillo de las sustancias ferromagnéticas es la existencia de saturación de la imantabilidad que se produce incluso en campos comparativamente débiles (desde la unidad hasta centenas de erstedios). Otra importante característica consiste en que en las sustancias ferromagnéticas la imantación puede también existir sin que haya campo exterior. Esta imantabilidad espontánea depende de la

temperatura y desaparece a una temperatura superior a la característica para cada sustancia ferromagnética. Ella recibe el nombre de temperatura de Curie. Ésta llega a alcanzar un orden de 1000 K. Esto significa que entre los electrones con orientación de los momentos magnéticos capaz de crear imantabilidad espontánea deben actuar fuerzas de origen eléctrico.

La orientación prevalente de los momentos magnéticos de los electrones, a cuenta de las interacciones magnéticas, no puede asegurar una temperatura de Curie del orden de 0,1 eV (aquí la temperatura está expresada en unidades energéticas). La interacción magnética es más débil en tres órdenes, a lo que corresponde la temperatura de Curie $T_c \approx 1$ K. De estos mismos razonamientos queda claro que en el interior de una sustancia imantada espotáneamente existe un campo magnético de alta intensidad $H \sim 10^7$ E. Este campo es más notorio que los campos exteriores corrientes. La causa que conduce a la aparición de la orientación prevalente de los momentos magnéticos de los electrones a cuenta de la interacción electrón-electrónica, lo mismo que el mecanismo de otros fenómenos magnéticos, sólo puede ser comprendida mediante la mecánica cuántica. Por ello, en el presente parágrafo sólo se aducirá la más sencilla descripción de algunas de las propiedades fundamentales de sustancias ferromagnéticas ilimitadas de carácter fenomenológico y basada en la noción del campo eficaz.

Sea que una sustancia ferromagnética contiene n electrones por unidad de volumen, cada uno de los cuales tiene momento magnético μ_0. Como sabemos de la mecánica cuántica, la proyección del momento magnético propio del electrón en la dirección destacada sólo puede tener dos valores. De modo convencional denominémoslas proyecciones "derecha" e "izquierda". Supongamos que en el momento dado hay r proyecciones derechas por unidad de volumen del sistema. Entonces, el número de proyecciones izquierdas será $l = n - r$. La razón entre la imantación y aquella que existiría durante la saturación, es

$$M/M_0 = y = (r - l)/n. \tag{26.1}$$

Con estas designaciones

$$r/n = \tfrac{1}{2}(1 + y), \qquad l/n = \tfrac{1}{2}(1 - y).$$

La ecuación magnética de estado $M = M(H, T)$ se obtiene partiendo de la condición del mínimo de energía libre $F = U - TS$. Si no hay campo exterior ($H = 0$) y la energía interna de la sustancia magnética U no depende de y, la parte de la energía libre que depende de y se reduce a $-TS$, con la particularidad de que, en correspondencia con la fórmula de Boltzmann, la entropía $S = k_B \ln W$. Aquí $W = n!/r!l!$ es el número de procedimientos de realización del estado con el valor prefijado de la imantabilidad de manera que

$$S = k_B \ln \frac{N!}{r!l!}. \tag{26.2}$$

Teniendo ahora en cuenta la fórmula de Stirling, $\ln n! \approx n(\ln n - 1)$, obtendremos que la energía libre

$$F = -TS = \tfrac{1}{2}nk_BT[(1 + y)\ln(1 + y) + (1 - y)\ln(1 - y)]. \qquad (26.3)$$

De la condición del mínimo de esta función se obtiene que $y = 0$ y, por lo tanto, entonces no habrá imantabilidad espontánea. Sin embargo, ella aparecerá si suponemos que la energía interna U depende de y. Vamos a considerar que esa dependencia es cuadrática de manera que U no depende de la dirección de imantación. Esta suposición corresponde a la representación introducida por Weiss del campo eficaz:

$$U = -nJy^2. \qquad (26.4)$$

El coeficiente de proporcionalidad J tiene la dimensión de la energía y $J > 0$; así, pues, a la saturación ($y^2 = 1$) corresponde el mínimo de la función U. Ahora, la energía libre

$$F = \tfrac{1}{2}nk_BT[(1 + y)\ln(1 + y) + (1 - y)\ln(1 - y)] - nJy^2. \qquad (26.5)$$

El carácter mínimo de esta función nos proporciona;

$$\frac{4J}{k_BT}y = \ln\frac{1 + y}{1 - y}, \qquad (26.6)$$

o bien

$$y = \text{th}\left(\frac{\Theta}{T}y\right). \qquad (26.7)$$

Aquí Θ tiene la dimensión de la temperatura y es igual a $2J/k_B$.

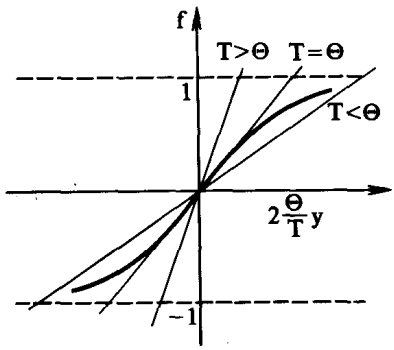

Fig. 26.1

La solución de la ecuación trascendente (26.7) puede ser obtenida de manera gráfica como el punto de intersección de la recta $f = 2(\Theta/T)y$ y la curva $\ln[(1 + y)/(1 - y)]$. En la fig. 26.1 vemos que el número de raíces de la ecuación (26.6) depende sustancialmente de T. Si $T > \Theta$ la ecuación sólo puede tener solución trivial, $y = 0$. Cuando $T < \Theta$ surge una solución adicional de valores finitos de y^2, a lo que corresponde la aparición de la

imantabilidad espontánea (con ello $\partial^2 F/\partial y^2 > 0$). Para $T < \Theta$ el punto $y = 0$ corresponde no al mínimo, sino que al máximo de la función F. El orden de la magnitud $J \approx 0{,}1$ eV (para $k_B\Theta \sim 1000$ K). La función $y = y(T/\Theta)$ obtenida de este modo da una descripción cualitativamente correcta de la dependencia de la temperatura de la imantabilidad espontánea de la sustancia ferromagnética. La desviación máxima de la curva $y = y(T/\Theta)$ de la del experimento se observa en la región de bajas temperaturas, donde diversos efectos cuánticos son en particular notorios.

La existencia del campo magnético exterior puede tomarse en consideración introduciendo en la energía libre un sumando adicional igual a $-n\mu_0 yH$. La minimización de semejante energía libre conduce a la ecuación

$$y = \text{th}\left(\frac{\Theta}{T}y + \frac{\mu_0 H}{kT}\right) = \text{th}\left[\frac{\mu_0}{k_B T}\left(\frac{k_B\Theta}{\mu_0}y + H\right)\right]. \qquad (26.8)$$

El sumando $(k_B\Theta/\mu_0)y$ recibe el nombre de *campo molecular de Weiss*. Este campo es proporcional al grado de imantación $M_0 y$ con el coeficiente $k_B\Theta/(M_0\mu_0)$ que lleva el nombre de *coeficiente del campo molecular*. Por regla, él es mucho mayor que $4/3\pi$ por lo que es posible despreciar la corrección de Lorentz para el campo eficaz en las sustancias ferromagnéticas.

La fórmula (26.8) puede ser asimismo escrita en la forma

$$M = n\mu_0 L\left(\mu_0 \frac{H + wM}{k_B T}\right). \qquad (26.9)$$

Con el símbolo w hemos designado aquí el coeficiente del campo molecular y con $L(x)$, la función de Langevin

$$L(x) = \text{cth}\, x - 1/x, \qquad (26.10)$$

con la que también se tropieza en la teoría de electromagnetismo. Cuando las imantabilidades son pequeñas y a altas temperaturas (es decir, siendo pequeñas x) de (26.9) y (26.10) sigue que

$$M = C/(T - \Theta), \qquad (26.11)$$

donde $C = n\mu_0^2/3k_B$ es la constante de Curie — Weiss.

§ 27. Propiedades magnéticas de los superconductores

Los superconductores son un ejemplo de que modo tan radical pueden variar las ecuaciones materiales de electrodinámica a expensas de la interacción de las partículas del medio.

Las propiedades electrodinámicas fundamentales de un superconductor consisten en que su conductividad σ es infinita, en tanto que el vector de inducción magnética $\boldsymbol{B}$ se reduce a cero en el volumen de éste (efecto Meissner — Ochsenfeld). La conductividad infinita del superconductor al pasar

por él una corriente finita quiere decir que en el superconductor $E = 0$. Por esta razón, de la ecuación de Maxwell

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$$

se desprende que

$$\frac{\partial B}{\partial t} = 0 \text{ y } B = \text{const.}$$

Así, pues, en un conductor ideal, en el que la conductividad es infinita, el vector de la inducción magnética debe tener el valor que tenía al pasar el medio al estado de superconductividad. El hecho de que B no sea una simple constante, sino una constante igual a cero, significa lo siguiente: por un lado, en el momento cuando el medio pasa al estado de superconductividad de él se expulsa el campo magnético; por otro lado, el conductor ideal y el superconductor son dos nociones diferentes.

De la condición $B = 0$ y de la condición de frontera $B_{1n} = B_{2n}$ sigue que el campo magnético fuera del superconductor junto a su superficie, es tangente a ésta. Teniendo en cuenta la fórmula (10.18) para el tensor de tensiones en un campo magnético, obtenemos que la densidad superficial de la fuerza que actúa por parte del campo magnético sobre un superconductor en el vacío, será

$$f_{\text{sup}} = \frac{1}{4\pi}[H(H\cdot n) - \tfrac{1}{2}H^2 n].$$

Como el campo magnético junto a la superficie de un superconductor sólo tiene componente tangencial, $H\cdot n = 0$ y

$$f_{\text{sup}} = -nH^2/8\pi.$$

Así, que, sobre la superficie del superconductor actúa una presión magnética de compresión igual, por el valor a la densidad de la energía del campo.

De la ecuación de Maxwell

$$\operatorname{rot} B = \frac{4\pi}{c} j \tag{27.1}$$

se deduce que en la región fundamental ocupada por el superconductor, en la que $B = 0$, no puede pasar la corriente eléctrica, es decir, $j = 0$. Toda la corriente que fluye por el superconductor es superficial y sólo existe en aquella región del medio a la que aún penetra algún campo magnético. Las corrientes superficiales también existen en el metal normal ubicado en un campo magnético. En dicho metal, la corriente condicionada por el campo magnético $j = c \operatorname{rot} M$, con la particularidad de que $M = (4\pi)^{-1}(B - H)$. Por esto, la ecuación (27.1) tomará el aspecto

$$\operatorname{rot}(B - 4\pi M) = 0.$$

Si $\boldsymbol{B} \neq 0$ se reducirá, precisamente, a cero rotor de la diferencia $\boldsymbol{B} - 4\pi\boldsymbol{M}$. Con esto $\boldsymbol{M} \neq 0$ y hay una corriente tal que $\int \boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{S}$ es nula por cualquier sección del conductor. Cuando $\boldsymbol{B} = 0$, como sucede en el superconductor, la ecuación (27.1) tendrá la forma

$$-4\pi \operatorname{rot} \boldsymbol{M} = 0.$$

Por consiguiente, si a pesar de todo en el superconductor hay corriente éste no puede ser expresado como $\boldsymbol{j} = c \operatorname{rot} \boldsymbol{M}$, debido a lo que el valor de $\int \boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{S}$ no es, obligatoriamente, igual a cero. Más adelante veremos que la ligazón entre la corriente y el campo magnético tiene, en realidad, en un superconductor forma extraordinaria.

Ahora, en cierto sentido, tratemos de "explicar", apoyándonos en H. y F. London, las propiedades electromagnéticas de los superconductores sin salir de los márgenes de física clásica. Estudiemos el movimiento de los electrones en el campo electromagnético; la ecuación de movimiento de semejante electrón, será

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m}\left[\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{v} \times \boldsymbol{B}\right]. \tag{27.2}$$

Puesto que

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\,\operatorname{grad})\mathbf{v},$$

$$(\mathbf{v}\,\operatorname{grad})\mathbf{v} = \operatorname{grad}\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v},$$

a la ecuación (27.2) podemos darle la forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) - \frac{e}{m}\boldsymbol{E} = \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} + \frac{e}{mc}\,\mathbf{v} \times \boldsymbol{B}. \tag{27.3}$$

Tomemos el rotor de los dos miembros de esta ecuación y, teniendo en cuenta la primera ecuación de Maxwell, obtendremos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{rot} \mathbf{v} + \frac{e}{mc}\,\boldsymbol{B}\right) = \operatorname{rot}\left[\mathbf{v} \times \left(\operatorname{rot} \mathbf{v} + \frac{e}{mc}\,\boldsymbol{B}\right)\right]. \tag{27.4}$$

Introduzcamos la designación

$$\boldsymbol{w} = \operatorname{rot} \mathbf{v} + \frac{e}{mc}\,\boldsymbol{B}; \tag{27.5}$$

por lo que es posible escribir la ecuación de movimiento de este modo

$$d\boldsymbol{w}/dt = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \boldsymbol{w}). \tag{27.6}$$

Esta ecuación posee una importante propiedad. Si en cierto momento de tiempo el valor de $\boldsymbol{w}$ se anula la derivada $\partial \boldsymbol{w}/\partial t$ en ese mismo lapso será

asimismo igual a cero, por lo que el valor de w será también nulo en los posteriores momentos de tiempo. A continuación, si

$$w = \operatorname{rot} \mathbf{v} + \frac{e}{mc} \boldsymbol{B} = 0 \tag{27.7}$$

también

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) - \frac{e}{m} \boldsymbol{E} = 0 \tag{27.8}$$

en todos los momentos de tiempo.

Claro está que $w = 0$ es un caso muy especial de movimiento de electrones sin rozamiento por un solo campo electromagnético. En un conductor ideal corriente para el que están escritas las ecuaciones (27.2) y (27.6), el valor de w no debe ser obligatoriamente nulo y la física clásica no ofrece la posibilidad de explicar por qué debe realizarse este caso tan especial $w = 0$. Semejante explicación proporciona la teoría cuántica. No obstante, como será demostrado más adelante, es precisamente el caso $w = 0$ al que corresponde aquel conductor ideal que, además, también es superconductor.

Estudiemos con más detalle las ecuaciones (27.7) y (27.8). Como $\boldsymbol{j} = ne\mathbf{v}$ la ecuación (27.7) puede escribirse

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{j} = -\frac{e^2 n}{mc} \boldsymbol{B}. \tag{27.9}$$

La ecuación (27.8) tendrá el aspecto

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} = \frac{e^2 n}{m} \boldsymbol{E}. \tag{27.10}$$

(Aquí hemos despreciado el sumando que contiene v^2 considerando la velocidad pequeña.) Las (27.9) y (27.10) reciben el nombre de *ecuaciones de los London*. Además de la conductividad ideal, ellas describen también el efecto Meissner — Ochsenfeld.

La ecuación (27.9) es particularmente importante. Puede considerarse como ecuación material que, en el caso de superconductores determina las ecuaciones de Maxwell. Vemos que ella no puede ser reducida ni a la ecuación $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$, ni a la $\boldsymbol{j} = c \operatorname{rot} \boldsymbol{M}$.

Ahora resolvamos la ecuación de Maxwell $\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}$ junto con la ecuación material (27.9). Sustituyendo en la ecuación

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \boldsymbol{j}$$

el segundo miembro de la relación londoniana (27.9), obtenemos

$$\Delta \boldsymbol{B} = \frac{4\pi e^2 n}{mc^2} \boldsymbol{B}. \tag{27.11}$$

En el caso de una geometría plana esta ecuación toma la forma

$$\frac{d^2B}{dz^2} = \frac{4\pi ne^2}{mc^2} B.$$

Su solución será

$$B = A_1 e^{z/\delta} + A_2 e^{-z/\delta},$$

donde

$$\delta = c/\omega_p = \sqrt{mc^2/4\pi ne^2}.$$

En el semiespacio ocupado por el superconductor ($z > 0$)

$$B = B_0 \exp(-z/\delta). \tag{27.12}$$

Esta solución describe precisamente el efecto Meissner — Ochsenfeld. De (27.12) sigue que la profundidad a la que penetra el campo magnético, es igual a

$$\delta = \sqrt{mc^2/4\pi ne^2} = c/\omega_p. \tag{27.13}$$

El valor típico de esta magnitud $\delta \approx 5 \cdot 10^{-6}$ cm.

Las ecuaciones de los London son locales en el sentido de que expresan la densidad de corriente j mediante el valor de B en aquel punto del espacio donde fue determinada j. Ellas describen las propiedades electrodinámicas de los superconductores reales en una estrecha región de temperatura próxima a aquella temperatura de transición del superconductor al metal normal, cuando el campo magnético en la superficie del superconductor varía con suficiente lentitud. Con la variación espacial rápida del campo magnético junto a la superficie, la ecuación londoniana local (el llamado caso pippardiano) debe ser sustituida por la no local.

Capítulo IV. Ondas electromagnéticas en medios

§ 28. Ondas electromagnéticas planas en medios isótropos. Ondas longitudinales y transversales

Cuando las ondas son monocromáticas las ecuaciones de Maxwell se simplifican si la intensidad del campo se representa en forma compleja

$$E(t) = E(\omega)e^{-i\omega t}, \qquad B(t) + B(\omega)e^{-i\omega t},$$
$$H(t) = H(\omega)e^{-i\omega t}, \qquad \vec{\mathcal{D}}(t) + \vec{\mathcal{D}}(\omega)e^{-i\omega t},$$

de modo que las magnitudes a medir puedan ser escritas por las partes reales de las intensidades complejas escritas. En tal caso, las ecuaciones de Maxwell en el medio donde no hay cargas y corrientes extrañas pueden presentarse así

$$\operatorname{rot} E(\omega) = j\frac{\omega}{c} B(\omega), \qquad \operatorname{rot} B(\omega) = -j\frac{\omega}{c} \vec{\mathcal{D}}(\omega). \tag{28.1}$$

Las otras dos ecuaciones del sistema de Maxwell

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \qquad \operatorname{div} \vec{\mathscr{D}} = 0 \tag{28.2}$$

no deben ser tomadas en consideración para la descripción de las ondas electromagnéticas, ya que ellas se desprenden de las ecuaciones (28.1). De esto es fácil cerciorarse aplicando el operador de divergencia a las ecuaciones (28.1). Con ello, los primeros miembros de las ecuaciones se reducen y de (28.1) se deducen de inmediato las ecuaciones (28.2).

De (28.1) es posible obtener una ecuación que sólo contenga el vector $\boldsymbol{E}$. Si tenemos en cuenta, que

$$\vec{\mathscr{D}}(\boldsymbol{k}, \omega) = \hat{\varepsilon}(\boldsymbol{k}, \omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega)$$

al calcular el rotor de los miembros primero y segundo de las ecuaciones (28.1) y eliminando $\operatorname{rot} \boldsymbol{B}(\omega)$ con ayuda de la segunda ecuación, hallaremos

$$\Delta \boldsymbol{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{E} + \hat{\varepsilon} \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{E} = 0. \tag{28.3}$$

La designación de la constante dieléctrica $\hat{\varepsilon}$ utilizada aquí indica que al tomar en consideración la dispersión espacial, la magnitud $\hat{\varepsilon}$ sigue siendo un tensor, incluso en un medio isótropo. El segundo sumando en (28.3), hablando en general, no es igual a cero inclusive en medios espacial-homogéneos, a pesar de la existencia de la ecuación $\operatorname{div}(\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}) = 0$. Incluso cuando es posible despreciar la dispersión espacial de la ecuación

$$\operatorname{div}(\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}) = 0$$

aún no se desprende que la magnitud $\operatorname{div} \boldsymbol{E}$ también es nula. En un medio espacial-homogéneo y sin tener en cuenta la dispersión espacial, de esta ecuación sólo sigue que

$$\varepsilon(\omega) \operatorname{div} \boldsymbol{E}(\omega) = 0,$$

de modo que $\operatorname{div} \boldsymbol{E}$ puede no ser cero a frecuencias para las que se anula la constante dieléctrica.

En una onda plana todos los vectores del campo dependen de las coordenadas como $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$, por ello la ecuación (28.3) puede representarse en la forma

$$k^2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}) = (\omega/c)^2\hat{\varepsilon}(k, \omega)\boldsymbol{E}. \tag{28.4}$$

Como en un medio isótropo espacial-homogéneo la constante dieléctrica tiene el aspecto (4.5), la anterior ecuación puede escribirse de la manera siguiente

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{\mathrm{tr}}\right)\boldsymbol{E} - \left[1 + \left(\frac{\omega}{ck}\right)^2(\varepsilon^{l} - \varepsilon^{\mathrm{tr}})\right]\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}) = 0. \tag{28.5}$$

Proyectemos esta ecuación sobre un eje dirigido a lo largo del vector de onda $\boldsymbol{k}$. De la forma más sencilla esto se puede hacer multiplicando la

ecuación escalar (28.5) por el vector de onda $\boldsymbol{k}$. Como resultado, la ecuación (28.5) toma la forma

$$(\omega/c)^2\varepsilon^l(\boldsymbol{k}, \omega)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}) = 0. \tag{28.6}$$

La intensidad del campo eléctrico determinada con esta ecuación es distinta de cero si para $\omega \neq 0$

$$\varepsilon^l(k, \omega) = 0. \tag{28.7}$$

Así, pues, resulta que el componente longitudinal del campo eléctrico no depende del transversal, con la particularidad de que la frecuencia del campo eléctrico longitudinal se determina mediante la ecuación (28.7) como una función de su vector de onda. Las ecuaciones que enlazan la frecuencia y el vector de onda suelen ser llamadas *ecuaciones de dispersión*. De este modo, la (28.7) es la ecuación de dispersión de las oscilaciones longitudinales del campo eléctrico en un medio. La ecuación de dispersión (28.7) puede tener por lo menos varias raíces. Es posible hallar la solución de más alta frecuencia si recordamos la expresión (3.14) para la asintótica de alta frecuencia de la constante dieléctrica. En tal caso, la ecuación de dispersión toma el aspecto

$$1 - \omega_p^2/\omega^2 = 0. \tag{28.8}$$

De aquí sigue que las oscilaciones longitudinales del campo eléctrico se producen en toda ocasión a una frecuencia que coincide con la llamada frecuencia de plasma ω_p. Al escribir la fórmula (28.8) no hemos tenido en cuenta la dispersión espacial. Si ésta se toma en consideración, esto conducirá a que la frecuencia de las oscilaciones longitudinales del campo eléctrico dependerá del vector de onda, pero con todos los vectores de onda no muy grandes ella no se distingue mucho de ω_p.

Pero la primera solución de (28.5) que hemos obtenido ha resultado ser tal que no tiene análogos al tratar los fenómenos electromagnéticos en el vacío, donde, como sabemos, no pueden existir ondas longitudinales. La aparición de nuevos modos de oscilaciones del campo electromagnético en un medio es el rasgo característico de la electrodinámica de los medios. Pero, además de nuevos modos, como es natural, hay asimismo soluciones que, en cierto sentido, son la generalización de otras ya conocidas en la primera parte del libro. En particular, en un medio, como en el vacío, pueden existir ondas transversales. Suponiendo que en (28.5) $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} = 0$, hallamos

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon^{\mathrm{tr}}\right)\boldsymbol{E} = 0. \tag{28.9}$$

Esto significa que la ecuación de dispersión para el modo transversal de las oscilaciones electromagnéticas en un medio, tiene el aspecto

$$\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k, \omega) = (ck/\omega)^2. \tag{28.10a}$$

A la ecuación (28.10) puede dársele una forma tal, en la que en lugar de la constante dieléctrica transversal ε^{tr}, en la ecuación de dispersión para el modo transversal de las oscilaciones electromagnéticas, entrarán otras dos características del medio ε y μ. Con ayuda de (4.9) obtenemos con facilidad de (28.10):

$$\varepsilon\mu = (ck/\omega)^2. \tag{28.10b}$$

A bajas frecuencias, cuando podemos despreciar la dispersión temporal de la constante dieléctrica, la ecuación de dispersión (28.10) se convierte en la ecuación

$$\omega = ck\sqrt{\varepsilon^{tr}} \tag{28.11}$$

que en el límite $\varepsilon^{tr} \to 1$ se transforma en una solución corriente en el vacío. De (28.11) sigue que la llamada *velocidad de fase* de una onda de baja frecuencia en la sustancia determinada como

$$v_{fase} = \omega/k \tag{28.12}$$

y que muestra a que velocidad se desplaza por el espacio la superficie equifásica de una onda plana monocromática, está ligada con la velocidad de la luz en el vacío mediante la relación

$$v_{fase} = c/\sqrt{\varepsilon^{tr}}. \tag{28.13}$$

La magnitud $\sqrt{\varepsilon^{tr}}$ recibe el nombre de *índice de refracción*

$$n = \sqrt{\varepsilon^{tr}}. \tag{28.14}$$

Con estas designaciones la ecuación de dispersión (28.11) adquiere la forma

$$\omega = ck/n. \tag{28.15}$$

La fórmula (28.15) puede asimismo escribirse para el caso de altas frecuencias, pero entonces el índice de refracción se convierte en función de la frecuencia $n = n(\omega)$, de manera que la sencilla dependencia lineal entre ω y k ya no tendrá lugar. Dirigiéndonos de nuevo al valor asintótico (3.14) de la constante dieléctrica, que es válido a muy altas frecuencias, de (28.15) obtenemos que, a tales frecuencias, la ligazón entre ω y k en forma explícita puede ser escrita como

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2. \tag{28.16}$$

A pesar de que en semejante caso tropezamos con ondas transversales, la ecuación de dispersión (28.16) se diferencia en alto grado de la ecuación de dispersión para las ondas en el vacío.

La constante dieléctrica es una magnitud compleja. Por esto, las soluciones de las ecuaciones (28.7) y (28.10) es posible que sean complejas. Con otras palabras, al ser el vector de onda $\boldsymbol{k}$ real, la frecuencia ω puede resultar compleja. Y a la inversa, para la frecuencia ω real, el vector de onda $\boldsymbol{k}$ será

complejo. Qué es lo que debemos considerar magnitud real, la frecuencia o bien el vector de onda, depende fundamentalmente de las condiciones de excitación de las ondas. Si una onda electromagnética monocromática incide en un medio del vacío su frecuencia no varía. Pero el vector de onda sí. Esto conduce, primero, a que la longitud de onda en el medio ya no será la misma que en el vacío y, segundo, a la presencia de la parte imaginaria del vector de onda corresponderá la aparición del amortiguamiento en el espacio de la onda a medida que ella se propaga por el interior del medio. En lo que atañe a los casos cuando las condiciones de excitación provocan la creación de ondas estacionarias (fijas), la longitud de onda y con el vector de onda (ligados por medio de la relación $\lambda = 2\pi/k$), pueden considerarse magnitudes reales, en tanto que la frecuencia será compleja. Esto último significa que la intensidad de las ondas se amortiguará o bien crecerá con el tiempo. En particular, las frecuencias complejas surgen en el problema del amortiguamiento del campo electromagnético dado en un medio después de desconectar las fuentes que los mantenían.

Al ser el vector de onda complejo puede haber dos casos: cuando las partes real e imaginaria $\boldsymbol{k}'$ y $\boldsymbol{k}''$ del vector de onda son paralelas entre sí y cuando $\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{k}'' \neq k'k''$. En este último la onda es plana sólo en cierto sentido convencional. Con ello, los planos perpendiculares al vector $\boldsymbol{k}'$ son planos de fase constante, mientras que los planos de amplitud constante son perpendiculares a $\boldsymbol{k}''$. En general, las superficies de valor constante de los vectores de intensidad del campo pueden no ser planos. Semejantes *ondas* llevan el nombre de *planas no homogéneas*.

Señalemos que la magnitud $\boldsymbol{k}''$ (como la parte imaginaria del índice de refracción) describe el fenómeno de disipación o de crecimiento de la energía del campo de la onda. El índice de refracción también puede ser imaginario en el caso de una constante dieléctrica real si $\varepsilon' < 0$. Con esto, en el volumen del medio es imposible que la onda se propague y la que incide sobre la superficie del medio penetra en ésta sólo a una profundidad del orden de la longitud de onda y se refleja de nuevo al vacío*).

Es posible expresar las partes real e imaginaria del índice de refracción $n = n' + ik$ por ε' y ε'' (en algunos ocasiones la magnitud k recibe el nombre de *factor de absorción del medio*). De la igualdad $n' + ik = \sqrt{\varepsilon}$ se

---

*) De ejemplo de semejante fenómeno sirve la reflexión de una onda del plasma siendo $\omega < \omega_p$. De la ecuación de dispersión (28.16) sigue que para semejante reflexión el vector de onda es puramente imaginario: $k = \frac{i}{c}\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$. Esto significa que en el interior del plasma una onda de frecuencia ω no puede propagarse. Si la onda incide del vacío de modo normal al plano de separación brusca plasma — vacío, ella penetra en el plasma a una profundidad $l \approx c/\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$, con la particularidad de que la intensidad del campo de la onda en el plasma disminuirá según la ley $\exp\left(-\frac{z}{c}\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}\right)$. (Al plasma corresponden los valores de la coordenada $z > 0$ normal a la superficie.)

desprende que $n'^2 - k^2 + 2in'k = \varepsilon' + i\varepsilon''$ y que

$$n' = \sqrt{\frac{\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}}{2}}, \quad k' = \sqrt{\frac{-\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}}{2}}. \tag{28.17}$$

En el vacío los valores de las intensidades de los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética transversal son, como sabemos, iguales. En lo que respecta a un medio, ellos pueden diferenciarse en alto grado. P. ej., examinemos una onda transversal de baja frecuencia en un metal.

En los metales a baja frecuencia $\varepsilon'' \gg \varepsilon'$ y $\varepsilon'' = 4\pi\sigma/\omega$ (véase la fórmula (3.11)). Por consiguiente, en (28.17) es posible despreciar la magnitud ε' al compararla con ε'' y

$$n' = k = \sqrt{2\pi\sigma/\omega}. \tag{28.18}$$

Esto significa que en los metales las ondas de baja frecuencia se amortiguan en una largura de un orden de la longitud de onda.

De la primera ecuación de Maxwell sigue que en las ondas transversales los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ están ligados mediante la relación

$$\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k}\right) \times \boldsymbol{E} = \frac{1}{n}\boldsymbol{B}. \tag{28.19}$$

El vector $\boldsymbol{k}/k$ es unitario. Por consiguiente, el valor absoluto de las intensidades del campo $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ está ligado por la relación $n\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}$. Representado el índice complejo de refracción n en la forma

$$\sqrt{n'^2 + k^2}\exp\left[i\operatorname{arctg}\frac{k}{n'}\right]$$

obtenemos que el vector de inducción magnética es por su módulo $\sqrt{n'^2 + k^2}$ veces mayor que el del vector $\boldsymbol{E}$. Además, en caso de medios buenos conductores, estos vectores están desfasados en $\pi/4$.

§ 29. Ondas electromagnéticas en medios anisótropos

En los medios anisótropos la constante dieléctrica compleja $\hat{\varepsilon}$ es un tensor cuya forma es determinada por la estructura del medio. En tal caso, la ecuación que determina el campo tiene el aspecto (28.4), pero tensor $\hat{\varepsilon}$ ya no puede ser ahora presentado en la forma (4.5). En los medios isótropos, en los que la constante dieléctrica se calcula con la fórmula (4.5), el sentido destacado es sólo uno, el del vector de onda. En los medios anisótropos aparecen direcciones destacadas inherentes de la propia sustancia o de los campos exteriores (incluidas las ondas electromagnéticas) en los que la sustancia puede encontrarse. Por ello, el cambio del tensor $\varepsilon_{\alpha\beta}$ al variar la dirección de propagación de la onda respecto de los ejes de simetría del medio, por regla, es más sustancial que la dependencia entre $\varepsilon_{\alpha\beta}$ y el módulo del vector $\boldsymbol{k}$. En correspondencia con el § 7, P. II, el tensor $\varepsilon_{\alpha\beta}$ del medio

sin pérdidas es hermitiano: $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^*_{\beta\alpha}$. El tensor hermitiano puede resultar real y, por lo tanto, simétrico ($\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha}$), pero en principio también es posible que tenga parte imaginaria. Los medios con tensor real simétrico $\varepsilon_{\alpha\beta}$ llevan el nombre de *anisótropos*, en tanto que los medios con tensor hermitiano complejo $\varepsilon_{\alpha\beta}$, *girótropos*. La girotropía es un tipo más complicado de anisotropía. En este parágrafo vamos a examinar sólo medios anisótropos y los girótropos los estudiaremos en el § 35.

Proyectemos la ecuación (28.4) sobre la dirección α. Entonces tendremos una ecuación que determinará los componentes del vector $\boldsymbol{E}$:

$$k^2 E_\alpha - k_\alpha k_\beta E_\beta = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta. \tag{29.1}$$

Puesto que al índice α se le pueden dar diferentes valores desde 1 hasta 3, (29.1) es en realidad un sistema de tres ecuaciones. Éste es homogéneo por lo que la condición de compatibilidad de las ecuaciones de este sistema consiste en anular el determinante constituido por los coeficientes al no ser conocidos los componentes del vector del campo eléctrico:

$$\det = \left| k^2 \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{\alpha\beta} \right| = 0. \tag{29.2}$$

Ésta es una ecuación de dispersión que define la frecuencia ω (que entra en el último sumando directamente y en forma del argumento de la magnitud ($\varepsilon_{\alpha\beta}$) como función del vector de onda $\boldsymbol{k}$. Introduzcamos en lugar de vector $\boldsymbol{k}$ un nuevo vector $\boldsymbol{n}$ ligado con el primero mediante la relación

$$\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c} \boldsymbol{n}. \tag{29.3}$$

Con ello la ecuación de dispersión adquiere el aspecto

$$\left| n^2 \delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta - \varepsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{n}, \omega) \right| = 0. \tag{29.4}$$

La forma de la ecuación de dispersión es en particular sencilla en un sistema de coordenadas en el que el tensor $\hat{\varepsilon}$ es diagonal. En tal sistema de coordenadas la ecuación (29.4) se escribe así

$$\begin{aligned} &n^2(\varepsilon_{xx} n_x^2 + \varepsilon_{yy} n_y^2 + \varepsilon_{zz} n_z^2) - [n_x^2 \varepsilon_{xx}(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + \\ &+ n_y^2 \varepsilon_{yy}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) + n_z^2 \varepsilon_{zz}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})] + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} = 0. \end{aligned} \tag{29.5}$$

La (29.5) suele llamarse *ecuación fundamental de óptica de vidrio* o bien *ecuación de Fresnel*.

No obstante, hay que tomar en consideración que el medio anisótropo no es siempre un cristal. También se observa la anisotropía en un medio que inicialmente era isótropo y se encontraba en campos exteriores; claro está, que a semejantes medios es asimismo aplicable la ecuación de Fresnel. Generalmente, es cómodo resolver esta ecuación hallado con ella $\boldsymbol{n}$ como función de ω. Esto está ligado con el hecho de que la frecuencia puede entrar de un modo bastante complicado en la ecuación por intermedio de

las magnitudes ε_{xx}, ε_{yy} y ε_{zz}. En lo que atañe al vector $\boldsymbol{n}$, despreciando la dispersión espacial, entra en (29.5) de modo explícito. Cuando la frecuencia ω y el sentido del vector $\boldsymbol{n}$ están prefijados, la ecuación de Fresnel define la magnitud n^2. Respecto de n^2 ella es cuadrática. Por esta razón, a cada valor de $\boldsymbol{n}/n$ corresponden dos valores de la magnitud n^2. Con otras palabras, en cada dirección se propagarán simultánemente dos ondas de una misma frecuencia, pero con diferentes vectores de onda.

De la ecuación (28.4) escrita

$$n^2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{nE}) = \boldsymbol{D} \tag{29.6}$$

sigue que en un medio anisótropo el vector $\boldsymbol{D}$ siempre es perpendicular al vector de onda. En efecto, multiplicando de manera escalar (29.6) por $\boldsymbol{n}$, obtenemos que el primer miembro de ésta después de la multiplicación se reduce a cero, así que $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D} = 0$. También es perpendicular al vector $\boldsymbol{n}$ el de la inducción magnética, lo que directamente vemos de la ecuación de Maxwell $\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -(1/c)\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ escrita en la forma $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}$. En lo que se refiere a la perpendicularidad del vector $\boldsymbol{E}$ al vector $\boldsymbol{n}$, ésta no se desprende de ninguna ecuación. De la ecuación $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}$ sólo sigue que $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{B}$. Como al vector $\boldsymbol{B}$ son perpendiculares los vectores $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{D}$ sólo podemos afirmar que el vector $\boldsymbol{E}$ yace en el plano formado por los vectores $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{D}$. De otro modo, en el caso general el vector $\boldsymbol{E}$ de una onda electromagnética en un medio anisótropo no es transversal ni longitudinal, de lo que se deduce que la polarización de las ondas en medios anisótropos se determina con mayor comodidad mediante el vector $\boldsymbol{D}$.

Con el fin de definir el carácter de la polarización de las ondas electromagnéticas es cómodo introducir un sistema de coordenadas en el que uno de los ejes esté dirigido a lo largo del vector $\boldsymbol{n}$. Proyectemos sobre los ejes de dicho sistema la ecuación (29.6). Las proyecciones sobre los ejes perpendiculares a $\boldsymbol{n}$ tendrán la forma

$$n^2E_\alpha = D_\alpha. \tag{29.7}$$

Eliminemos de esta ecuación $\boldsymbol{E}$ usando la ecuación material $E_\alpha = \varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}D_\beta$. Entonces, (29.7) será así

$$D_\alpha = n^2\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}D_\beta. \tag{29.8}$$

Aquí, los índices α y β pueden tomar dos valores. Por lo tanto (29.8) es un sistema de dos ecuaciones homogéneas con relación a las magnitudes desconocidas, es decir, los componentes del vector $\boldsymbol{D}$. Lo mismo que el tensor inicial $\varepsilon_{\alpha\beta}$ el inverso $\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}$ es simétrico. Designemos con los índices 1 y 2 las direcciones que coinciden con los ejes principales del tensor bidimensional $\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}$, designando sus valores principales por ε^{-1}_{11} y ε^{-1}_{22}. En los ejes principales del tensor $\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}$ el sistema (29.8) adquiere el aspecto

$$\begin{aligned}(1/n^2 - \varepsilon^{-1}_{11})D_1 &= 0,\\ (1/n^2 - \varepsilon^{-1}_{22})D_2 &= 0.\end{aligned} \tag{29.9}$$

Si $1/n^2 = \varepsilon_{11}^{-1}$ el paréntesis de la primera de las ecuaciones (29.9) se anula, por lo que $D_1 \neq 0$. En lo que atañe al paréntesis en la segunda de las ecuaciones (29.9), éste es distinto de cero, lo que quiere decir que $D_2 = 0$. Para $1/n^2 = \varepsilon_{22}^{-1}$, al contrario, $D_1 = 0$ y $D_2 \neq 0$.

De aquí sigue que en los medios anisótropos con cada uno de los dos posibles valores de n^2, la onda estará por completo polarizada rectilíneamente según el vector $\boldsymbol{D}$ en un plano determinado. Estos dos planos coinciden con los ejes principales del tensor bidimensional $\varepsilon_{\alpha\beta}^{-1}$. Estos ejes de cualquier tensor simétrico son perpendiculares entre sí. Por ello, los planos en los que se disponen los vectores $\boldsymbol{D}_1$ y $\boldsymbol{D}_2$ también lo son.

Un caso de frecuencia de un medio anisótropo, importante y relativamente sencillo, es un medio en el que dos de los tres valores principales del tensor $\varepsilon_{\alpha\beta}$ coinciden entre sí. En óptica de vidrio semejantes medios llevan el nombre de *cristales uniaxiales*.

Si aceptamos que $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_\perp$ y $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_\parallel$ la ecuación de Fresnel (29.5) adquirirá el aspecto

$$(n^2 - \varepsilon_\perp)[\varepsilon_\parallel n_z^2 + \varepsilon_\perp (n_x^2 + n_y^2) - \varepsilon_\parallel \varepsilon_\perp] = 0. \tag{29.10}$$

Con otras palabras, ella se divide en dos ecuaciones

$$n^2 = \varepsilon_\perp, \tag{29.11}$$

$$n_z^2/\varepsilon_\perp + (n_x^2 + n_y^2)/\varepsilon_\parallel = 1. \tag{29.12}$$

De (29.11) sigue que una de las dos ondas posibles en los medios anisótropos en nada se diferencia de la onda que se propagaría en un cristal isótropo con índice de refracción $n = \sqrt{\varepsilon_\perp}$. En el caso de la onda, cuya conducta se determina por la ecuación (29.12), la magnitud $1/n^2$ depende del ángulo θ entre el vector $\boldsymbol{n}/n$ y el eje óptico (o sea, la dirección del eje z):

$$1/n^2 = \operatorname{sen}^2\theta/\varepsilon_\parallel + \cos^2\theta/\varepsilon_\perp. \tag{29.13}$$

La onda del primer tipo se llama *ordinaria*, la del segundo *extraordinaria*.

§ 30. Propagación de ondas en un medio no homogéneo. Ondas superficiales. Efecto pelicular.

En los medios no homogéneos las ondas se describen mediante la misma ecuación (28.3), pero en ella la constante dieléctrica depende de las coordenadas. Además de la ecuación

$$\Delta \boldsymbol{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} + \hat{\varepsilon}\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{E} = 0, \tag{30.1}$$

en la que sólo entra la intensidad $\boldsymbol{E}$ del campo eléctrico, a veces es cómodo operar con una ecuación en la que sólo entra el campo magnético. En los medios no homogéneos tal ecuación será

$$\Delta \boldsymbol{H} + \hat{\varepsilon}\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{H} + \frac{1}{\hat{\varepsilon}}\operatorname{grad}\hat{\varepsilon} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = 0. \tag{30.2}$$

30.1. Ondas superficiales. La más importante singularidad de los medios no homogéneos consiste en que éstos pueden proporcionar nuevas soluciones de las ecuaciones (30.1) y (30.2) que no pueden existir al tratar medios espacial-homogéneos. Tienen la forma más sencilla y físicamente transparente los nuevos modos de las oscilaciones electromagnéticas en el importante caso extremo del límite de separación nítido de dos medios o bien del medio y el vacío. Vamos a examinar este último caso y mostraremos que la existencia del límite de separación conduce a la aparición de una nueva onda llamada *superficial* que resulta estar localizada junto a la región de no homogeneidad brusca del medio y la amplitud de la cual decrece a medida que se aleja de esta región.

Hablando en general, la existencia de las ondas superficiales es sabida de hidrodinámica. Éstas son las ondas formadas por los buques en movimiento bien conocidas por todos. La velocidad de propagación de semejantes ondas y otras características de éstas difieren de las ondas volumétricas de las que en hidrodinámica pueden ser ejemplo las ondas acústicas (sonoras) que se propagan por las capas del agua. Si la velocidad de propagación es para el modo volumétrico de un orden de kilómetros por segundo, para el superficial, kilómetros o decenas de kilómetros por hora. En no menor grado se diferencian también las propiedades de los modos superficiales y volumétricos de las oscilaciones electromagnéticas.

Así, pues, examinemos el límite de separación plano de un medio con constante dieléctrica $\varepsilon(\omega)$ con el vacío. Consideraremos que el límite de separación es nítido. Elegimos el sistema de coordenadas de manera que el eje z esté dirigido a lo largo de la normal al límite de separación, su dirección, al interior del medio. Respectivamente la onda superficial se propagará por el plano xy. Busquemos una solución de las ecuaciones (30.1) y (30.2) con la que el vector $\boldsymbol{H}$ (para simplificar consideramos que el medio no es magnético, o sea, $\mu = 1$) se halle en la superficie (plano) de separación. Sea, p. ej., que el vector $\boldsymbol{H}$ está dirigido paralelamente al eje y. Entonces, la ecuación (30.2) en todas los puntos dentro del medio toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial H_m}{\partial z}\right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{q^2}{\varepsilon}\right)H_m = 0. \tag{30.3}$$

El índice m quiere decir que éste es un campo magnético en el medio. El campo magnético en el vacío será designado con el símbolo H_v. Con la letra q designamos aquí el vector de onda dispuesto en la superficie de separación.

La ecuación para el campo magnético válida en todos los puntos del vacío, es la siguiente

$$\frac{\partial^2 H_v}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - q^2\right)H_v = 0. \tag{30.4}$$

Las soluciones de las ecuaciones (30.3) y (30.4) deben estar fijadas en la superficie de separación con ayuda de las condiciones de frontera

$$H_{v\tau}|_s = H_{m\tau}|_{s'}, \qquad E_{v\tau}|_s = E_{m\tau}|_{s'}, \qquad D_{mn}|_s = D_{vn}|_s. \tag{30.5}$$

Buscamos las soluciones de las ecuaciones (30.3) y (30.4) para H_v y H_m en la forma

$$H_v = H_{v0} \exp(iqx + k_v z), \tag{30.6}$$

$$H_m = H_{m0} \exp(iqx - k_m z) \tag{30.7}$$

de forma que H_v y H_m tiendan a cero con $z \to \mp\infty$, respectivamente. Con otras palabras, buscamos precisamente los modos superficiales de las ondas electromagnéticas. Sustituyendo (30.6) y (30.7) en las ecuaciones (30.3) y (30.4), obtenemos

$$k_v^2 H_v + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - q^2\right) H_v = 0,$$

$$\frac{k_m^2}{\varepsilon} H_m + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{q^2}{\varepsilon}\right) H_m = 0.$$

De la primera de estas ecuaciones obtenemos

$$k_v = \sqrt{q^2 - \omega^2/c^2}, \tag{30.8}$$

de la segunda

$$k_m = \sqrt{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon}. \tag{30.9}$$

Pasemos a la fijación de las soluciones en el límite de separación. De la igualdad de los componentes tangenciales H_v y H_m sigue que $H_{v0} = H_{m0} = H_0$. La igualdad de los componentes tangenciales del campo eléctrico proporciona

$$\frac{\partial H_v}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial H_m}{\partial z}\Big|_{z=0'},$$

de donde se obtiene

$$k_v = -\frac{k_m}{\varepsilon} \qquad \text{o bien} \qquad \sqrt{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = -\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon}. \tag{30.10}$$

Esta igualdad puede realizarse sólo si $\varepsilon(\omega) < 0$. De la condición de frontera $D_{mn}|_s = E_{vn}|_s$ se desprende que

$$\frac{\partial H_v}{\partial x}\Big|_{z=0} = \frac{\partial H_m}{\partial x}\Big|_{z=0}.$$

De modo que esta última condición no nos da nada nuevo.

Resolviendo la ecuación (30.10) respecto de q^2 obtenemos la siguiente ecuación de dispersión para nuestra onda superficial:

$$q^2 = \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega) + 1}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2. \tag{30.11}$$

En esta ecuación $\varepsilon(\omega) < 0$. La fórmula (30.11) nos proporciona en forma no explícita la ligazón entre la frecuencia de las oscilaciones electromagnéticas superficiales y el vector de onda. Pasando de (30.10) a (30.11) hacemos la suposición de que es posible despreciar la dispersión espacial. Sólo en tal caso podemos resolver de modo explícito la ecuación de dispersión respecto de q^2. Si no despreciamos la dispersión espacial la fórmula (30.11) será válida, pero, con ello, hay que recordar que $\varepsilon = \varepsilon(q, \omega)$ de manera que el vector de onda entrará tanto en el primero como en el segundo miembro de la ecuación. En (30.10) las dos raíces cuadradas deben ser reales, sólo en tal caso k_m y k_v serán reales y positivos y la onda será en realidad superficial. De la realidad de las indicadas raíces cuadradas siguen las desigualdades

$$(qc/\omega)^2 > 1 \qquad \text{y} \qquad (qc/\omega)^2 > \varepsilon.$$

Combinando la primera de estas desigualdades con la ecuación de dispersión escrita en la forma

$$(cq/\omega)^2 = \varepsilon/(\varepsilon + 1)$$

obtenemos

$$\varepsilon/(\varepsilon + 1) > 1, \tag{30.12}$$

de donde sigue que $\varepsilon(\omega)$ debe ser, por lo menos, algo menor que la unidad.

Es útil analizar el límite de la ecuación de dispersión (30.11) cuando es posible despreciar el retardo electrodinámico. Esto se logra al satisfacer la longitud de la onda superficial la siguiente desigualdad

$$\lambda < cT,$$

es decir, la longitud de onda es menor que el recorrido de la luz durante el período de la oscilación del campo. Entonces, en (30.11) podemos considerar que la velocidad de la luz c es igual al infinito y la ecuación de dispersión adquirirá el aspecto

$$q^2[\varepsilon(\omega) + 1] = 0,$$

de donde obtenemos

$$\varepsilon(\omega) = -1. \tag{30.13}$$

De la última ecuación vemos que en el límite de las ondas electrostáticas superficiales (cuando $c \to \infty$) y despreciando la dispersión espacial, la frecuencia de la onda superficial no depende de su vector de onda. La raíz de más alta frecuencia de la ecuación (30.13) es fácil de hallar. Haciendo uso

de la asintótica de alta frecuencia $\varepsilon(\omega)$, obtenemos

$$1 - \omega_p^2/\omega^2 = -1$$

o bien

$$\omega = \omega_p/\sqrt{2}. \tag{30.14}$$

Las oscilaciones de este tipo reciben el nombre de *oscilaciones de plasma superficiales* (o con brevedad, *plasmones superficiales*). Como el vector H en semejante modo superficial yace en el plano de separación y es perpendicular al vector de onda q, la onda puede ser llamada *H-onda* transversal (abreviado, *TH-ondulatorio*).

La distribución del campo eléctrico en el espacio puede ser calculada por el campo magnético hallado con ayuda de la segunda ecuación de Maxwell

$$E = i\frac{c}{\omega\varepsilon}\operatorname{rot} H.$$

El rotor del campo magnético dirigido a lo largo del eje y y que depende de las coordenadas x y z, tiene dos componentes dirigidos a lo largo de los versores e_x y e_z. Esto quiere decir que la onda superficial, siendo transversal en relación con el campo magnético, respecto del campo eléctrico no es longitudinal ni transversal. El vector E se encuentra en el plano x, z, en tanto que su sentido varía de punto en punto a medida que cambia la coordenada x.

Cerciorémonos ahora de que la onda superficial transversal por el campo eléctrico (*TE*-onda) no puede existir. Adoptemos que $E = E_y$, $E_x = E_z = 0$. Buscaremos la solución de la ecuación (30.1) en la forma

$$E_v = E_{0v} \exp(iqx + k_v z), E_m = E_{m0} \exp(iqx - k_m z).$$

Sustituyendo estas funciones en la ecuación obtenemos expresiones para k_m y k_v que coinciden con (30.8) y (30.9). Fijando la solución en el límite de separación, obtenemos la ecuación

$$k_v = -k_m.$$

Esta relación no puede realizarse con valores positivos de las variables k_v y k_m, de donde sigue que la *TE*-onda superficial no existe.

La existencia de las ondas superficiales significa que la energía del campo electromagnético puede ser transmitida en la dirección elegida por la superficie de los guíaondas abiertos que pueden ser dieléctricos.

30.2. Efecto pelicular normal. Otro efecto relacionado con la existencia de superficies consiste en que si en el vacío, junto a un medio conductor, hay un campo electromagnético alternativo éste penetra en el medio conductor sólo a una profundidad finita. Este fenómeno lleva el nombre de *efecto pelicular*.

De la manera más sencilla el efecto pelicular se describe en el caso de campos de baja frecuencia. Aquí surgen dos circunstancias simplificadoras. La primera consiste en que las oscilaciones de baja frecuencia son de onda larga. La longitud de estas ondas en un medio es tal que supera en mucho la longitud del recorrido libre de los portadores de corriente en el medio. Así, pues, los portadores de corriente están en movimiento por el campo electromagnético que, aunque es alternativo según el tiempo, puede considerarse casi homogéneo en el espacio. Por esta razón, la ligazón entre la corriente y el campo es local. Con otras palabras, los efectos de la dispersión espacial en este caso no son sustanciales. La segunda circunstancia simplificadora está relacionada con la posibilidad de escribir las ecuaciones de Maxwell en el interior del conductor y en su entorno de manera simplificada.

Sea que las dimensiones caracterísitcas del conductor son iguales a L. Examinemos la primera ecuación de Maxwell.

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.$$

Como la frecuencia de variación del campo se considera conocida, tenemos planteado el problema de hallar sólo su distribución espacial. El segundo miembro de la ecuación, que contiene la derivada temporal, nos da información de la variación espacial del campo con las longitudes de un orden de cT, donde $T = 2\pi\omega^{-1}$ es el período de las oscilaciones del campo. En lo referente al primer miembro de la ecuación, éste debe ofrecer información acerca de su distribución espacial por la longitud L del orden de las dimensiones del medio conductor. Si la frecuencia $\omega = 2\pi T^{-1}$ es tan pequeña que

$$L \ll cT \tag{30.15}$$

la infomación sobre la distribución espacial del campo contenida en el primer miembro de la primera ecuación de Maxwell es más detallada que la información en el segundo miembro. Esto se refiere asimismo a la segunda ecuación de Maxwell en el vacío. Así, pues, el campo electromagnético en el vacío a distancias no muy grandes del conductor, tales que

$$\lambda \gg L \tag{30.16}$$

(aquí $\lambda = 2\pi c/\omega = cT$ es la longitud de onda del campo electromagnético en el vacío, L, las dimensiones características y la distancia desde el conductor hasta el punto de observación) puede describirse con las ecuaciones

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0, \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0. \end{aligned} \tag{30.17}$$

Las ecuaciones que determinan el campo electromagnético dentro del medio deben, claro está, contener las características del medio que determi-

nan su respuesta al campo exterior. Cuando los conductores son buenos a bajas frecuencias, la conductividad estática σ es, precisamente, esa característica. Por ello, la segunda ecuación de Maxwell en un medio debe escribirse en la forma

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \boldsymbol{E}. \tag{30.18}$$

En esta ecuación la corriente de desplazamiento puede ser despreciada. En el segundo miembro de (30.18) el campo $\boldsymbol{E}$ puede ser por sí mismo pequeño, pero se multiplica por la magnitud grande σ, por lo que es considerable. Por esta causa, en la primera ecuación de Maxwell en el metal debe dejarse la derivada temporal con el fin de tomar en consideración, en correspondencia con la ley de Faraday, la posible generación del campo eléctrico mediante un campo magnético alternativo:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \tag{30.19}$$

Las demás ecuaciones de Maxwell tienen la forma

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0. \tag{30.20}$$

La última ecuación es homogénea, ya que las cargas inducidas por el campo en el conductor se disipan en transcurso de un tiempo del orden de ω_p^{-1}. Para $\omega \ll \omega_p$ y durante los tiempos T el conductor es cuasineutral. Las ecuaciones (30.17) — (30.20) describen el campo electromagnético, como suele decirse, en la aproximación cuasiestacionaria.

Eliminando en (30.18) y (30.19) el campo eléctrico se llega a obtener una ecuación de segundo orden para el campo magnético en un medio

$$\Delta \boldsymbol{H} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}. \tag{30.21}$$

Teniendo en cuenta (30.20) y excluyendo de estas ecuaciones el campo magnético $\boldsymbol{H}$, obtenemos la ecuación

$$\Delta \boldsymbol{E} = \frac{4\pi}{c^2} \sigma\mu \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{30.22}$$

Ahora, apoyándonos en las ecuaciones obtenidas, examinemos el problema de la penetración de un campo electromagnético de frecuencia ω en un metal que ocupa el semiespacio $z > 0$.

Vamos a considerar que el campo transversal incide sobre la superficie del metal de manera normal, de modo que el campo eléctrico sólo tiene el componente x, mientras que el magnético, el componente H_y. La ecuación (30.22) para el campo eléctrico, escrita así

$$\frac{d^2E}{dz^2} = -\frac{4\pi i\omega\sigma\mu}{c^2} E, \tag{30.23}$$

proporciona la solución

$$E = E_0 \exp(\pm kz). \tag{30.24}$$

Sustituyendo (30.24) en la ecuación (30.23), obtenemos

$$k^2 = -\frac{4\pi i\omega\sigma\mu}{c^2} = 4\pi\omega\sigma\mu c^{-2} \exp(-i\pi/2).$$

Así, pues,

$$k = c^{-1} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{4\pi\omega\sigma\mu} = (1-i)\frac{\sqrt{2\pi\sigma\omega\mu}}{c}$$

de manera que la solución de la ecuación para el campo en un metal será la siguiente

$$E = E_0 \exp(-i\omega t) \exp\left[\pm\frac{\sqrt{8\pi\sigma\omega\mu}}{2c} z \mp i\frac{\sqrt{8\pi\omega\sigma\mu}}{2c} z\right]. \tag{30.25}$$

En esta solución debe dejarse el término que en la infinidad se reduce a cero. De este modo, además de la parte oscilante, en la solución (30.25) tenemos el factor $\exp\left[-\frac{1}{c}\sqrt{2\pi\sigma\omega\mu}z^2\right]$ que asegura la localización del campo en el conductor junto a la superficie. El grosor característico de esta capa superficial de corriente

$$\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega\mu}. \tag{30.26}$$

Como vemos esta capa es tanto más fina cuanto más alta sea la frecuencia del campo y la conductividad del medio. Recordemos que la fórmula (30.26) es justa si se cumplen las desigualdades $l \ll \delta$ (que aseguran la posibilidad de despreciar la dispersión espacial) y $\omega\tau \ll 1$ (aquí τ es el tiempo característico de colisión de los electrones en el conductor). La última desigualdad corresponde al desprecio de la dispersión temporal y asegura la posibilidad de hacer uso de la conductividad estática σ. En un metal el campo magnético decrece según la misma ley que el eléctrico.

Hallemos ahora la relación entre los valores de las intensidades de los campos magnético y eléctrico en la superficie del conductor. De (30.18), (30.24) y (30.26) sigue que los vectores E y H están ligados entre sí por la relación

$$E = (1-i)\frac{c}{4\pi\sigma\delta} H \times n, \tag{30.27}$$

donde $n = \bar{k}/k$ es un vector unitario dirigido a lo largo del eje z. La correlación (30.27) es justa para cualquier punto del medio, así como para la superficie. La variable

$$\zeta = (1-i)\frac{c}{4\pi\sigma\delta} = (1-i)\sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} \tag{30.28}$$

que enlaza los vectores E y H recibe el nombre de *impedancia superficial*.

La correlación (30.27) puede emplearse como condición de frontera para hallar el campo electromagnético fuera del conductor. Como muestran los anteriores resultados el campo dentro del conductor varía de modo sustancial en una longitud δ, fuera de él, en una longitud L del orden de las dimensiones del cuerpo conductor (suponemos que $L \ll \lambda$). Con una conductividad eléctrica suficientemente grande $\delta \ll L$. Esta desigualdad asegura la pequeñez de las derivadas tangenciales de las intensidades del campo dentro del conductor, en comparación con la derivada por la normal a la superficie. Esto significa que con cualquier carácter de la incidencia de la onda electromagnética sobre la superficie del conductor, el campo dentro de él tendrá el mismo carácter que con la incidencia normal y que será válida la fórmula (30.27).

Debido a la continuidad de los componentes tangenciales de los vectores del campo en el límite de separación, la correlación (30.27) es asimismo válida para los campos en el lado exterior de la superficie del conductor. Por ello, la relación

$$E_t = \zeta H_t \times n \tag{30.27a}$$

puede considerarse y emplearse como condición de frontera que permite hallar el campo fuera del conductor sin examinar los campos en el interior del medio. Lleva el nombre de *condición de frontera de Leontóvich*.

De las estimaciones aducidas más arriba queda claro que la condición de Leontóvich (30.27a) es también válida para la superficie no plana del conductor si el radio local de su curvatura es grande en comparación con δ.

30.3. Efecto pelicular anormal. Al crecer la frecuencia ω varía el carácter del efecto pelicular. Esto está ligado con el hecho de que la capa superficial de corriente disminuye con el crecimiento de la frecuencia y con ciertas frecuencias características el grosor de dicha capa δ puede hacerse comparable con la longitud del recorrido libre l de los electrones del conductor. De (30.26) se deduce que el grosor de la capa superficial de corriente δ se hace comparable con l cuando $c/\sqrt{\sigma\omega} \approx l$ de lo que sigue que la frecuencia característica ω_a, con la que transcurre el paso del efecto pelicular normal al anormal, tiene el orden

$$\omega_a \approx c^2/\sigma l^2. \tag{30.29}$$

La conductividad σ puede considerarse durante la estimación igual a $\sigma = ne^2\tau/m$ y la longitud del recorrido libre en los metales $l = v_F\tau$ (donde v_F es la velocidad de los electrones por la superficie de Fermi, τ, el tiempo entre las colisiones de los electrones). Así, pues,

$$\omega_a \approx \frac{c^2 p_F}{ne^2 l^3}. \tag{30.30}$$

Aquí, p_F es el impulso de los electrones en la superficie de Fermi, n, la concentración de los electrones de conducción. Vemos que la frecuencia ω_a de-

pende sustancialmente de la variable l y con los valores característicos de l para los metales, al crecer la frecuencia la condición $\delta \approx l$ se alcanza antes que la condición $\omega\tau \sim 1$. En este caso (y más aún cuando $\delta \ll l$), los electrones se mueven en un campo que no podemos considerar homogéneo, por lo que hay que tomar en consideración la dispersión espacial. En lo que se refiere a la dispersión temporal con $\omega\tau < 1$ aún no existe. El *efecto pelicular* cuando $\delta \lesssim l$ y es preciso tener en cuenta la dispersión espacial, lleva el nombre de *anormal*.

En comparación con el efecto pelicular normal, con el anormal varía la relación entre la densidad de corriente inducida en el metal y la intensidad del campo eléctrico E. Con el fin de hallar esta relación escribamos la ecuación cinética para la función de distribución de los electrones de un metal

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial \delta f}{\partial r} + eE\frac{\partial f_0}{\partial p} = -\nu\delta f,$$

en la que f_0 es una función de distribución en equilibrio de Fermi y δf, el desplazamiento de la función de distribución de la de equilibrio condicionado por la penetración del campo en el metal. Considerando que, como en el caso del efecto pelicular normal, el campo incide sobre el metal del vacío en la dirección del eje z normal a la superficie y dirigido a la profundidad del metal, la ecuación cinética puede escribirse

$$\frac{d\delta f}{dz} + \frac{\nu - i\omega}{v_z}\delta f = -\frac{eE(z)}{v_z}\frac{\partial f_0}{\partial p_x}. \tag{30.31}$$

Vamos a considerar que el campo eléctrico está dirigido a lo largo del eje x. La ecuación (30.31) es cómodo reescribirla en la forma

$$\frac{d\delta f}{dz} + A\delta f = BE(z). \tag{30.32}$$

De la comparación de (30.31) y (30.32) sigue que

$$A = \frac{1 - i\omega\tau}{\tau v_z}, \qquad B = -\frac{e}{v_z}\frac{\partial f_0}{\partial p_x}. \tag{30.33}$$

La solución de una ecuación homogénea correspondiente a la ecuación (30.32), será

$$\delta f = Ce^{-Az},$$

donde C es una constante. Escribimos la solución de la ecuación no homogénea (30.32) del modo

$$\delta f = C(z)e^{-Az},$$

lo que corresponde a la más sencilla variante del método de variación de constantes arbitrarias. La sustitución de la última fórmula en (30.32) pro-

porciona

$$C(z) = \int^{z} BE(z')e^{Az'}dz' + C_1$$

así, que

$$\delta f = \{B \int^{z} E(w)e^{Aw}dw + C_1\}e^{-Az}. \tag{30.34}$$

La función δf debe poseer la propiedad

$$\delta f(z, v_z < 0)|_{z=\infty} = 0. \tag{30.35}$$

La condición $v_z < 0$ en el argumento de la función δf en la fórmula asintótica (30.35) significa que se trata de una función de distribución de los electrones en movimiento hacia la superficie. De la condición asintótica (30.35) puede ser determinada la constante C_1, que entra en la solución de (30.34), para $\delta f(v_z < 0)$. De la comparación de (30.34) y (30.35) sigue que

$$\delta f(z, v_z < 0) = \frac{e}{v_z}\frac{\partial f_0}{\partial p_x}\exp\left(-\frac{1 - i\omega\tau}{\tau v_z}z\right) \times$$

$$\times \int_{z}^{\infty} E(w)\exp\left(\frac{1 - i\omega\tau}{\tau v_z}w\right)dw. \tag{30.36}$$

De esta manera, la función de distribución de los electrones que se mueven hacia el límite de separación se determina por el valor del campo eléctrico en todo el espacio desde z hasta ∞.

La forma de la función $\delta f(z, v_z > 0)$, que describe los electrones que se alejan del límite de separación, se determina por el carácter de la dispersión de los electrones en dicho límite. Hay dos casos límites de dispersión de los electrones en el límite de separación: la dispersión especular y la dispersión difusa. Claro está, en realidad se verifica cierta situación intermedia. El efecto pelicular se describe matemáticamente del modo más sencillo con la reflexión especular de los electrones en el límite de separación. Teniendo asimismo en cuenta que la singularidad más importante, es decir, el decrecimiento no exponencial del campo a medida que penetra al interior del metal, ya se manifiesta con la reflexión especular de los electrones en el límite de separación, vamos a detenernos en el último caso.

Durante la dispersión especular de los electrones en el límite de separación

$$\delta f^{(+)}(v_x, v_y, v_z, z = 0) = \delta f^{(-)}(v_x, v_y, -v_z, z = 0). \tag{30.37}$$

En esta condición de frontera la función $\delta f^{(+)}$ se refiere a los electrones que se alejan de la superficie, en tanto $\delta f^{(-)}$, a los electrones que acercan a ella.

De (30.37), tomando en consideración (30.36), tendremos

$$\delta f^{(+)}(v_x, v_y, v_z, z = 0) = -\frac{e}{v_z}\frac{\partial f_0}{\partial p_x}\int_0^\infty E(w)\exp\left(-\frac{1-i\omega\tau}{\tau v_z}w\right)dw. \tag{30.38}$$

En esta fórmula la integral es una variable que sólo depende de ω, τ y v_z. Por ello, de la solución general de (30.34), escrita en la forma

$$\delta f = \exp\left(-\frac{1-i\omega\tau}{\tau v_z}z\right)\left\{C_1 - \frac{e}{v_z}\frac{\partial f_0}{\partial p_x}\int_0^z E(w)\exp\left(\frac{1-i\omega\tau}{\tau v_z}w\right)dw\right\},$$

obtenemos

$$\partial f^{(+)}(z) =$$

$$= -\frac{e}{v_z}\frac{\partial f_0}{\partial p_x}\exp\left(-\frac{1-i\omega\tau}{\tau v_z}z\right)\left[\int_0^\infty E(w)\exp\left(-\frac{1-i\omega\tau}{\tau v_z}w\right)dw + \right.$$

$$\left. + \int_0^z E(w)\exp\left(\frac{1-i\omega\tau}{\tau v_z}w\right)dw\right]. \tag{30.39}$$

La fórmula (30.36) nos proporciona la solución de la ecuación cinética para la función $\delta f^{(-)}$, la fórmula (30.39), para la función $\delta f^{(+)}$. Estas funciones satisfacen las condiciones de frontera y asintótica planteadas. Con su ayuda, del modo corriente, se calcula la densidad de corriente inducida: $j(z) = e\int v_x \delta f d^3v$. Sustituyendo en esta fórmula las funciones $\delta f^{(+)}$ y $\delta f^{(-)}$ e introduciendo las coordenadas polares (v, θ, α) en el espacio de velocidades, obtendremos

$$j(z) = \frac{e^2}{m}\int_0^\infty dv v^2 \frac{\partial f_0}{\partial v}\left\{\int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \operatorname{sen}\theta \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{v_x}{v_z}\frac{\partial v}{\partial v_x}\times\right.$$

$$\times \int_z^\infty dw E(w)\exp\left(\frac{1-i\omega\tau}{\tau v\cos\theta}(w-z)\right) - \int_0^{\pi/2} d\theta \operatorname{sen}\theta \int_0^{2\pi} d\alpha \times$$

$$\times \frac{v_x}{v_z}\frac{\partial v}{\partial v_x}\left[\int_0^\infty dw E(w)\exp\left(-\frac{1-i\omega\tau}{\tau v\cos\theta}(z+w)\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \int_0^z dw E(w)\exp\left(\frac{1-i\omega\tau}{\tau v\cos\theta}(w-z)\right)\right]\right\}. \tag{30.40}$$

La integración por α puede realizarse aquí de inmediato, ya que el integrando no depende de α. Los integrandos en las integrales por θ son funciones impares de θ, por lo que es posible representar (30.40) en el aspecto

$$j(z) = -\frac{e^2}{m}\int_0^\infty dv v^2 \frac{\partial f_0}{\partial v}\int_0^{\pi/2} d\theta \operatorname{sen}\theta \frac{v_x}{v_z}\frac{\partial v}{\partial v_x}\times$$

$$\times\left\{\int_0^\infty dw E(w)\exp\left[-\frac{1-i\omega\tau}{\tau v\cos\theta}(z+w)\right]+\right.$$

$$+\int_0^z dw E(w)\exp\left[\frac{1-i\omega\tau}{\tau v\cos\theta}(w-z)\right]+$$

$$\left.+\int_z^\infty dw E(w)\exp\left[-\frac{1-i\omega\tau}{\tau v\cos\theta}(w-z)\right]\right\}. \qquad (30.41)$$

Las dos últimas integrales entre llaves

$$\int_0^z dw E(w)\exp\left[\frac{1-i\omega\tau}{\cos\theta}\frac{w-z}{l}\right]+\int_z^\infty dw E(w)\exp\left[-\frac{1-i\omega\tau}{\cos\theta}\frac{w-z}{l}\right]=$$

$$=\int_0^\infty dw E(w)\exp\left[-\frac{1-i\omega\tau}{\cos\theta}\left|\frac{z-w}{l}\right|\right]. \qquad (30.42)$$

Aquí $l = \tau v$ es la longitud del recorrido libre de los electrones. Así, pues, obtenemos la siguiente expresión para la densidad de corriente:

$$j(z) = \int_0^\infty E(w)\mathcal{K}\left(\frac{z+w}{l}\right)dw + \int_0^\infty E(w)\mathcal{K}\left(\left|\frac{z-w}{l}\right|\right)dw, \qquad (30.43)$$

donde $\mathcal{K}$ es el núcleo de la ligazón integral entre la intensidad del campo eléctrico en el punto con coordenada z igual a w y la corriente en un punto arbitrario con coordenada z que tiene la forma

$$\mathcal{K}(s) = -\frac{e^2}{m}\int_0^\infty dv v^2 \frac{\partial f_0}{\partial v}\int_0^{\pi/2} d\theta \operatorname{sen}\theta \frac{v_x}{v_z}\frac{\partial v}{\partial v_x}\exp\left[-\frac{1-i\omega\tau}{\cos\theta}s\right]. \qquad (30.44)$$

El carácter integral de la fórmula (30.43) quiere decir que tropezamos con la dispersión espacial. Sustituyendo (30.43) en la ecuación

$$\frac{d^2E}{dz^2}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E = \frac{4\pi i\omega}{c}j$$

obtenemos la ecuación fundamental de la teoría del efecto pelicular anormal

$$\frac{d^2E}{dz^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E = \frac{4\pi i\omega}{c}\left[\int_0^\infty \mathcal{K}\left(\frac{z+w}{l}\right)E(w)dw + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \mathcal{K}\left(\left|\frac{z-w}{l}\right|\right)E(w)dw\right] \qquad (30.45)$$

que determina el campo eléctrico en el medio. El campo en el vacío se considera prefijado o bien puede hallarse con una ecuación de onda corriente, cuya solución debe fijarse en el límite de separación metal — vacío con la solución de la ecuación integro-diferencial (30.45) que determina el campo en el medio con ayuda de las condiciones de frontera habituales:

$$E_{n_1} = E_{n_2} \qquad \text{y} \qquad E_{\tau_1} = E_{\tau_2}.$$

La ecuación íntegro-diferencial (30.45) puede resolverse mediante el siguiente procedimiento. En la primera integral del segundo miembro de la ecuación (30.45) realizaremos el cambio de la variable $w \to -w'$, después de lo cual dicha integral tomará la forma

$$\int_{-\infty}^0 \mathcal{K}\left(\frac{z-w}{l}\right)E(-w)dw. \qquad (30.46)$$

Ahora, de manera formal, continuemos la solución de la ecuación (30.45) en la región $z < 0$. Es posible realizar semejante continuación plenamente de modo arbitrario. Lo más sencillo es considerar que el campo E continuado de este modo es par (respecto del plano $z = 0$) o bien impar e incluso nulo. La solución definitiva del problema no dependerá del procedimiento de la continuación. Para mayor determinación elijamos la continuación par, es decir, vamos a considerar que

$$E(-z) = E(z). \qquad (30.47)$$

Entonces la ecuación (30.45), teniendo en cuenta (30.46), tomará la forma

$$\frac{d^2E}{dz^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E = \frac{4\pi i\omega}{c}\int_{-\infty}^\infty \mathcal{K}\left(\left|\frac{z-w}{l}\right|\right)E(w)dw. \qquad (30.48)$$

En esta ecuación $z > 0$ y determina el campo dentro del metal, con la particularidad de que con la continuación formal de la solución de esta ecuación en la región $z < 0$ se cumple la condición (30.47). Por su estructura matemática la ecuación (30.48) es mucho más sencilla que la ecuación inicial (30.45), ya que en (30.48) el núcleo del término integral sólo tiene argumento de diferencias. Esto ofrece la posibilidad de resolver la ecuación (30.48) mediante las trasnformaciones de Fourier.

Hallemos la imagen de Fourier de la ecuación (30.48). Con este fin la ecuación (30.48) debe ser multiplicada por $\exp(-ikz)$ e integrada por todo el espacio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ikz)\frac{d^2E}{dz^2}\,dz + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E(k) =$$

$$= \frac{4\pi i\omega}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} dwE(w)\int_{-\infty}^{+\infty} dz\exp(-ikz)\mathcal{K}\left(\left|\frac{z-w}{l}\right|\right). \qquad (30.49)$$

En esta relación el primer sumando ha de ser integrado dos veces por partes. Después de la primera integración, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ikz)\frac{d^2E}{dz^2}\,dz = \exp(-ikz)\frac{dE}{dz}\Bigg|_{-\infty}^{-0} +$$

$$+ \exp(-ikz)\frac{dE}{dz}\Bigg|_{+0}^{+\infty} + ik\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-ikz)\frac{dE}{dz}\,dz =$$

$$= E'(-0) - E'(+0) + ik\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-ikz)\,\frac{dE}{dz}\,dz. \qquad (30.50)$$

Puesto que la función $E(z)$ es par, el producto de ésta en el punto $z = 0$ puede sufrir discontinuidad, así que $E'(-0) = -E'(+0)$. Con ello, en el punto $z = 0$, la propia función $E(z)$ es continua, así que, $E(-0) - E(+0) = 0$. Tomando en consideración esta circunstancia y después de la segunda integración por partes, el primer sumando de la ecuación (30.49) tendrá el aspecto

$$-2E'(+0) - k^2E(k).$$

El segundo miembro de (30.49) puede escribirse en la forma

$$\frac{4\pi i\omega}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} dwE(w)\int_{-\infty}^{+\infty} dz\exp(-ikz)\mathcal{K}\left(\left|\frac{z-w}{l}\right|\right) =$$

$$= \frac{4\pi i\omega l}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} dwE(w)\exp(-ikw)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{l}\exp\left[-ikl\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{z-w}{l}\right)\right]\mathcal{K}\left(\left|\frac{z-w}{l}\right|\right) = \frac{4\pi i\omega l}{c}\mathcal{K}(kl)E(k).$$

De este modo, la imagen de Fourier de la ecuación (30.48), será la siguiente

$$-2E'(+0) - k^2E(k) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E(k) = \frac{4\pi i\omega l}{c}\,\mathcal{K}(kl)E(k), \qquad (30.51)$$

de forma que

$$E(k) = \frac{2E'(+0)}{\omega^2/c^2 - k^2 - (4\pi i\omega l/c)\mathcal{K}(kl)}. \qquad (30.52)$$

Con ayuda de la imagen de Fourier hallada encontramos el campo eléctrico buscado:

$$E(z) = \frac{E'(+0)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk\exp(ikz)}{\omega^2/c^2 - k^2 - (4\pi i\omega l/c)\mathcal{K}(kl)}. \qquad (30.53)$$

La función $E(z)$ tiene sentido físico para $z > 0$. El factor $E'(+0)$ se determina por la intensidad y la longitud de onda de la emisión electromagnética que incide sobre la superficie del metal. La singularidad fundamental de la función $E(z)$, obtenida de este modo, consiste en que ella no tiene forma exponencial. La estimación de la integral en (30.53), cuyos detalles no se aducen, nos da que la profundidad de penetración del campo en el metal con el efecto pelicular anormal tiene un valor del siguiente orden;

$$\delta \approx \left(\frac{c^2\hbar^3}{\omega e^2 p_F^2}\right)^{1/3}. \qquad (30.54)$$

La dependencia entre δ y ω tiene el aspecto $\omega^{1/3}$, o sea, es algo más débil que en el caso del efecto pelicular normal.

30.4. Efecto pelicular con altas frecuencias. Con el posterior aumento de la frecuencia el carácter del efecto pelicular cambia de nuevo. Este hecho está condicionado porque en el problema del efecto pelicular, hablando en general, figuran no dos, sino tres longitudes características. Hasta el momento tomábamos en consideración la presencia de dos longitudes características: la profundidad de la capa superficial de corriente δ y la longitud del recorrido libre l de los electrones. Pero no se indicaba que existe una longitud característica más, es decir, el recorrido l_T que pasa el electrón durante un período T de variación del campo. Cuando las frecuencias son aquellas con las que se produce el efecto pelicular normal, la longitud $l_T = v_F/\omega$ era mucho mayor que la profundidad de la capa superficial de corriente δ y, aún más, que la longitud del recorrido libre de los electrones l, por lo que la magnitud l_T no era sustancial. Con el efecto pelicular anormal tanto l como l_T son mayores que δ, con la particularidad de que en la teoría expuesta en el p. 30.3 la relación entre l y l_T fue tomada arbitrariamente. Solo tenía importancia que δ era la menor de todas las longitudes características.

Con el aumento de la frecuencia disminuyen los valores tanto de δ como l_T (claro está que l no depende de ω), pero el valor de l_T disminuye con mayor rapidez que δ. En efecto, de acuerdo con (30.54), $l_T/\omega \sim \omega^{-2/3}$ de forma que con frecuencias suficientemente altas $l_T < \delta$.

Si $l_T \ll \delta$, al igual que en el caso del efecto pelicular normal, los electrones se moverán de nuevo en un campo eléctrico casi homogéneo y, en este sentido, el efecto pelicular a altas frecuencia recuerda dicho normal, pero, no obstante, con la diferencia de que el papel de la variable l comienza a ser desempeñado por la magnitud l_T. Con otras palabras, el efecto pelicular con altas frecuencias puede ser considerado normal, pero en tal caso es sustancial la dispersión temporal.

De la condición $\delta \gg l_T$, que puede ser reescrita en la forma $\omega \gg v_F/\delta$, se desprende que de los dos primeros sumandos en el primer miembro de la ecuación cinemática, proporciona la mayor aportación la derivada temporal de la función de distribución, ya que $\partial\delta f/\partial t \gg \mathbf{v}\partial\delta f/\partial r$. De la desigualdad $l \gg l_T$, escrita en la forma $\omega \gg v_F/l$, obtenemos

$$\frac{\partial\delta f}{\partial t} \gg \frac{\partial f}{\tau} = \frac{\partial f v_F}{l}.$$

Así, pues, con altas frecuencias la ecuación cinemática puede tomar el aspecto

$$\frac{\partial\delta f}{\partial t} + e\boldsymbol{E}\cdot\mathbf{v}\frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}} = 0. \tag{30.55}$$

El vector de onda $\boldsymbol{k}$ en esta ecuación no entra, por ello con altas frecuencias la dispersión espacial tampoco es sustancial como con bajas. La solución de la ecuación cinemática (30.55) tiene la forma

$$\delta f = i\frac{e\mathbf{v}\boldsymbol{E}}{\omega}\frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}}. \tag{30.56}$$

La función de distribución δf depende de la frecuencia ω de variación del campo, por consiguiente, la dispersión temporal debe tomarse obligatoriamente en consideración.

La densidad de corriente condicionada por la función de distribución obtenida, será igual a

$$\boldsymbol{j} = i\frac{e^2}{\omega}\int \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{E})\frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}}d^3p.$$

En el caso isótropo el vector $\boldsymbol{j}$ está dirigido a lo largo del vector $\boldsymbol{E}$, así, que,

$$\boldsymbol{j} = i\frac{e^2}{\omega}\boldsymbol{E}\int v^2\frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}}\cos^2\theta d^3p, \tag{30.57}$$

donde $\theta = (\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{E}})$. De este modo $j = \sigma E$, con ello

$$\sigma = i\frac{e^2}{\omega}\int v^2 \frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}} \cos^2\theta d^3p. \tag{30.58}$$

La integral en (30.58) se calcula con facilidad:

$$\sigma = -\frac{4\pi i e^2 p_F^3}{3m\omega(2\pi\hbar)^3}.$$

El orden de esta variable constituye $(\mathscr{E}_F/\hbar)(\mathscr{E}_F/\hbar\omega)$. Sustituyendo (30.57) en la ecuación para el campo, tendremos:

$$\frac{d^2E}{dz^2} + \frac{1}{c^2}\left[\omega^2 - e^2\int v^2 \frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}} \cos^2\theta d^3p\right]E = 0. \tag{30.59}$$

Esta ecuación tiene la solución $E = E_0 \exp(-z/\delta)$, con esto

$$\delta^{-2} = -\frac{1}{c^2}\left(\omega^2 - e^2\int v^2 \frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}} \cos^2\theta d^3p\right). \tag{30.60}$$

De acuerdo con la estimación aducida para el caso de la superficie esférica de Fermi, el segundo sumando entre paréntesis en la fórmula (30.60) tiene el orden $(\mathscr{E}_F/\hbar)^2$. Por ello, con $\hbar\omega < \mathscr{E}_F$, la magnitud δ es real.

Así, pues, con frecuencias mayores que aquellas con las que δ se hace de un orden igual o mayor que l_T (estas frecuencias yacen en la región infrarroja lejana del espectro), pero menores que $\mathscr{E}_F/\hbar$, el campo disminuye de modo exponencial a medida que penetra en la profundidad del metal, con la particularidad de que la profundidad de la capa superficial de corriente

$$\delta \approx c/\sqrt{(\mathscr{E}_F/\hbar)^2 - \omega^2}. \tag{30.61}$$

La frecuencia $\mathscr{E}_F/\hbar$, que entra en esta fórmula, por el orden de su valor corresponde, por regla, a las zonas óptica de ondas cortas o bien ultravioleta cercana del espectro. La frecuencia $\omega < \mathscr{E}_F/\hbar$, ya que para $\omega \to \mathscr{E}_F/\hbar$, además del propio efecto pelicular comienzan a manifestarse otros fenómenos físicos (como, p. ej., el efecto fotoeléctrico), que han de ser tomados en consideración al calcular la distribución espacial del campo. Por ello, en realidad $\delta \sim c\hbar/\mathscr{E}_F$.

§ 31. Ondas electromagnéticas en guíaondas

Ha sido adoptado denominar *guíaondas* un tubo metálico de longitud infinita de sección arbitraria y, hablando en general, de forma arbitraria. El guíaondas puede ser asimismo de longitud finita, pero en tal caso el tubo debe tener orificios en los extremos por los que en el tubo entra el campo electromagnético, así como sale de él. Como es lógico, los problemas de los

guíaondas se solucionan con los métodos de electrodinámica. Sin embargo, gran cantidad de cuestiones ligadas con la descripción de la propagación de las ondas electromagnéticas por semejantes sistemas tienen carácter aplicado. Por esta razón, en el parágrafo presente sólo prestaremos atención a un problema de fundamental importancia, o sea, el de los tipos de ondas que pueden propagarse en el guíaondas más sencillo recto cilíndrico de forma arbitraria, cuyas paredes son conductores en absoluto. Vamos a considerar que el interior del guíaondas no está relleno de un dieléctrico. Esto da la posibilidad de mostrar que, incluso en el vacío, las ondas electromagnéticas no son obligatoriamente transversales si la región por las que ellas se propagan linda con las superficies conductores.

Para el guíaondas son válidas las ecuaciones de Maxwell:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{H}, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{E}. \tag{31.1}$$

Puesto que las paredes del guíaondas se consideran conductoras ideales, en sus paredes $E_\tau = 0$. Tomemos el primer componente de la ecuación (31.1) normal en cierto punto a la superficie del guíaondas. La proyección del vector $\operatorname{rot} \boldsymbol{E}$ sobre esta normal contiene las derivadas espaciales de los componentes tangenciales del campo eléctrico por las coordenadas también tangenciales. Como $E_\tau = 0$ en todo punto de la superficie, $\operatorname{rot}_n \boldsymbol{E} = 0$, de donde sigue de inmediato que el valor de H_n en la superficie del guíaondas es asimismo igual a cero. Así, pues, las fórmulas

$$E_\tau = 0 \qquad \text{y} \qquad H_n = 0$$

pueden considerarse como las condiciones de frontera para las ecuaciones (31.1). Eliminando en (31.1) el campo magnético obtenemos la ecuación para hallar el campo eléctrico

$$\Delta \boldsymbol{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{E} = 0 \tag{31.2}$$

con la condición adicional $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$.

Elijamos el sistema de coordenadas de forma que el eje z está dirigido a lo largo del guíaondas. Cerciorémonos de que en el guíaondas puede propagarse una onda del tipo *TM*, es decir, que en él puede existir el componente z de campo eléctrico que depende de las coordenadas del siguiente modo: $E_z = \Pi(x, y) \exp(ikz)$. Aquí $\boldsymbol{k}$ es el vector de onda de la onda que se propaga a lo largo del guíaondas. La función desconocida $\Pi(x, y)$ satisface la ecuación bidimensional de Helmholtz:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \kappa^2 \Pi = 0, \tag{31.3}$$

donde

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2. \tag{31.4}$$

Proyectemos las ecuaciones (31.1) en los ejes x e y:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\frac{\omega}{c} H_x, \quad -\frac{\partial H_y}{\partial z} = -i\frac{\omega}{c} E_x,$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\frac{\omega}{c} H_y, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = i\frac{\omega}{c} E_y, \tag{31.5}$$

De aquí se desprende, que

$$E_x = \frac{ik}{\kappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}, \qquad E_y = \frac{ik}{\kappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial y},$$
$$H_x = -\frac{i\omega}{c\kappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \qquad H_y = \frac{i\omega}{c\kappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}. \tag{31.6}$$

De estas relaciones se deduce que resolviendo la ecuación (31.1) y, hallando de este modo E_z, mediante este componente del campo eléctrico es posible expresar todos los demás componentes de los campos eléctrico y magnético. Por lo tanto, todo el problema se reduce a la solución de una sola ecuación bidimensional (31.3) con la condición de frontera $\Pi(x, y)|_S = 0$. La solución de esta ecuación se obtiene con ayuda de los métodos de física matemática y depende de la forma del guíaondas. Pero con cualquier forma de éste, cuya sección es finita, la función $\Pi(x, y)$ es acotada y sólo satisface las condiciones de frontera con determinados valores de las variables κ^2 que forman un juego de los llamados valores propios. Hallando este juego podemos, mediante la fórmula (31.4), en cada problema concreto hallar la frecuencia de las oscilaciones:

$$\omega = c\sqrt{\kappa^2 + k^2}. \tag{31.7}$$

Esta frecuencia depende del vector de onda $\boldsymbol{k}$, pero no se anula con $k \to 0$. De (31.7) vemos que existe un valor mínimo de la frecuencia (determinado por el valor mínimo de $\kappa_{\text{mín}}$) con el que en el guíaondas puede aún propagarse una onda electromagnética. La magnitud $\kappa_{\text{mín}}$ es de un orden de $1/L$, donde L son las dimensiones transversales lineales del guíaondas, por consiguiente $\omega_{\text{mín}} \approx c/L$.

La velocidad de grupo de la onda en el guíaondas

$$v_g = \partial\omega/\partial k = ck/\sqrt{k^2 + \kappa^2}. \tag{31.8}$$

Para $k = 0$ $v_g = 0$, para $k \to \infty$ $v_g \to c$.

De forma análoga podemos cerciorarnos de que en el guíaondas pueden también propagarse las ondas del tipo *TE*. En este sentido el guíaondas se distingue de una superficie no cerrada que, de cierto modo, asimismo puede servir de guía de ondas (véase el § 30, P. II), pero a lo largo de la cual es imposible que se propaguen las ondas del tipo *TE*.

No es posible que las ondas transversales se propaguen simultáneamente por los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ en un guíaondas corriente simplemente conexo.

La causa cualitativa de este fenómeno se comprende si se tiene en cuenta que en correspondencia con la condición de frontera $H_n = 0$ las líneas de fuerza del campo magnético en el guíaondas deben cerrarse en el plano xy, lo que significa que rot H tiene un componente z. De acuerdo con la segunda de las ecuaciones (31.1) debe también existir el componente z del campo eléctrico. La situación varía si dentro del guíaondas hay un cilindro conductor más. Entonces el campo magnético puede cerrarse en torno de las corrientes inducidas en el cilindro interior. Por tal guíaondas más complicado se propagarán las ondas transversales.

Como ejemplo de aplicación de los principios expuestos a sistemas concretos, examinemos el problema de la búsqueda de posibles tipos de ondas y de sus frecuencias en un guíaondas simple rectangular con lados a y b, siendo $a > b$.

Por tales guíaondas pueden propagarse ondas de los tipos *TM* y *TE*.

Examinemos las ondas del tipo *TM*. A la ecuación (31.3) con condiciones de frontera $\Pi(0, y) = \Pi(a, y) = \Pi(x, 0) = \Pi(x, b) = 0$ le corresponde la solución

$$\Pi(x, y) = \Pi_0 \operatorname{sen}(\pi m x/a) \operatorname{sen}(\pi n y/b), \tag{31.9}$$

con la particularidad de que m y n son números enteros (distintos de cero). Como la ecuación (31.3) es homogénea la constante Π_0 se determina por las condiciones de generación de las ondas y puede tener cualesquiera valores. Sustituyendo (31.9) en (31.3) obtenemos la ligazón entre κ^2 y las magnitudes m y n:

$$\kappa^2 = (\pi m/a)^2 + (\pi n/b)^2. \tag{31.10}$$

De acuerdo con (31.7) el espectro de las posibles frecuencias tiene el aspecto

$$\omega = c\sqrt{k^2 + (\pi m/a)^2 + (\pi n/b)^2}.$$

La frecuencia mínima posible

$$\omega_{\min} = c\pi\sqrt{(a^2 + b^2)/a^2 b^2}.$$

El componente del campo eléctrico dirigido por el eje del guíaondas es igual a

$$E_z(x, y, z) = \Pi_0 \operatorname{sen}(\pi m x/a) \operatorname{sen}(\pi n y/b) \exp(ikz). \tag{31.11}$$

Los restantes componentes de los campos eléctrico y magnético son expresados mediante (31.11) con las fórmulas (31.6).

Examinemos las ondas del tipo *TE*. En este caso, $H_z = \Pi(x, y) \exp(ikz)$ y para la función Π determinada de esta forma serán válidas las ecuaciones (31.3) y (31.4). Para las ondas *TE* son análogos de (31.6) las ecuaciones

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{i\omega}{c\kappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}, & E_y &= -\frac{i\omega}{c\kappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ H_x &= \frac{ik}{\kappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}, & H_y &= \frac{ik}{\kappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}. \end{aligned} \tag{31.12}$$

La condición de frontera $H_n = 0$, en correspondencia con las dos segundas ecuaciones de las anteriores, puede ser escrita en la forma

$$\partial H_z/\partial n = 0. \tag{31.13}$$

Por esto, cuando se trata de ondas *TE* debe resolverse la ecuación del tipo (31.3) con las condiciones de frontera

$$\left.\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right|_{0,y} = \left.\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right|_{a,y} = \left.\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right|_{x,0} = \left.\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right|_{x,b} = 0. \tag{31.14}$$

La correspondiente solución es la siguiente

$$\Pi = \Pi_0 \cos(m\pi x/a)\cos(n\pi y/b), \tag{31.15}$$

además la ligazón entre κ^2 y las magnitudes m y n tiene la misma forma que para las ondas *TM*. Sin embargo, a diferencia de las ondas *TM*, uno de los números m o bien n puede ser nulo. Esto significa que la frecuencia mínima de la onda *TE* es menor que en el caso de una onda *TM* y es igual a

$$\omega_{\text{mín}} = c\pi/a. \tag{31.16}$$

El correspondiente modo de onda recibe el nombre de onda TE_{10}.

§ 32. Reflexión y refracción de ondas electromagnéticas volumétricas transversales en el límite de separación de los medios

El límite de separación de los medios no sólo condiciona la aparición de nuevos modos de las oscilaciones electromagnéticas, sino que influye sobre la propagación de los modos volumétricos corrientes. Tiene la mayor importancia la descripción de esta influencia sobre la propagación de ondas electromagnéticas transversales que tienen la posibilidad de cruzar el límite de separación y salir al vacío o bien generarse en el vacío e incidir sobre el límite de separación vacío — medio.

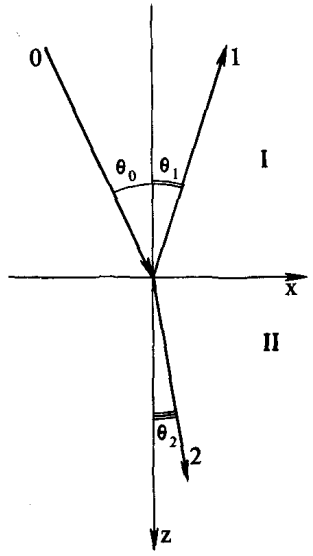

Fig. 32.1

Estudiemos la incidencia de una onda electromagnética transversal (fig. 32.1) de un medio transparente (en particular éste puede ser el vacío) sobre el límite de separación plano entre dicho medio (que designaremos con el índice I) y cualquier otro medio (cuya designación será II). Designemos la onda incidente con el índice 0, la reflejada, con 1, la refractada, con

2. En ángulo de incidencia de la onda sobre el límite, que se cuenta desde la normal al límite, designemos θ_0, el ángulo de reflexión, θ_1, el de refracción, θ_2. El plano de coordenadas xy lo disponemos en el plano de separación. Respecto de las coordenadas x e y el problema es espacial-homogéneo. Esto significa que los componentes tangenciales del vector de onda de las tres ondas — incidente, reflejada y refractada — son iguales. De las igualdades $k_{0x} = k_{1x} = k_{2x}$ sigue, que en el primer medio

$$k_{0z} = -k_{1z} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0 \qquad \text{y} \qquad \theta_0 = \theta_1. \tag{32.1}$$

Así, pues, la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión es un corolario directo de la conservación del componente tangencial del vector de onda de las ondas incidente y reflejada. En el segundo medio

$$k_{2z} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 - k_{0x}^2} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \operatorname{sen}^2\theta_0}. \tag{32.2}$$

Este componente del vector de onda en el medio absorbente puede ser una magnitud compleja. Si el segundo medio es transparente, de (32.1) y (32.2) siguen sencillas leyes que ligan los ángulos de incidencia, reflexión y refracción:

$$\theta_0 = \theta_1 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta_2/\operatorname{sen}\theta_0 = \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2} = n_1/n_2. \tag{32.3}$$

De las expresiones obtenidas es posible determinar la marcha de los rayos, pero estas fórmulas nada nos dicen sobre sus intensidades. Con el fin de hallarlas debemos tomar en consideración las condiciones de frontera en la superficie de separación.

Para empezar, examinemos el caso cuando el campo E_0 es perpendicular al plano de incidencia. Teniendo en cuenta las condiciones habituales de continuidad de los componentes tangenciales de las intensidades de los campos eléctrico y magnético hallamos que en la superficie de separación

$$E_0 + E_1 = E_2. \tag{32.4}$$

Es cómodo expresar la magnitud H mediante E con ayuda de la primera ecuación de Maxwell $\operatorname{rot} E = -(1/c)\partial H/\partial t$; p. ej., el componente H_x es igual a $-(c/\omega)k_z E_y$. Tomando esto en consideración, en la superficie de separación de los medios obtenemos

$$k_{0z}(E_0 - E_1) = k_{2z}E_2. \tag{32.5}$$

Hallando de las dos últimas ecuaciones las magnitudes E_1 y E_2, obtenemos

$$E_1 = \frac{k_{0z} - k_{2z}}{k_{0z} + k_{2z}} E_0, \qquad E_2 = \frac{2k_{0z}}{k_{0z} + k_{2z}} E_0. \tag{32.6}$$

Sustituyendo aquí (32.1) y (32.2), hallaremos

$$E_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0 - \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \operatorname{sen}^2\theta_0}}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \operatorname{sen}^2\theta_0}} E_0, \tag{32.7}$$

$$E_2 = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \operatorname{sen}^2\theta_0}} E_0. \tag{32.8}$$

Estas son las llamadas *ecuaciones de Fresnel*. Cuando los medios son transparentes y $\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2} = \operatorname{sen}\theta_2/\operatorname{sen}\theta_0$, dichas ecuaciones se simplifican:

$$E_1 = \frac{\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_0)}{\operatorname{sen}(\theta_2 + \theta_0)} E_0, E_2 = \frac{2\cos\theta_0 \operatorname{sen}\theta^2}{\operatorname{sen}(\theta_2 + \theta_0)} E_0. \tag{32.9}$$

Podemos cerciorarnos de que las condiciones de frontera para D_n y B_n no dan nuevos resultados.

Si el vector E yace en el plano de incidencia, lo más cómodo es trabajar con el campo magnético, cuyo vector de intensidad se encontrará en el plano de separación. Por un procedimiento análogo al anterior, obtenemos dos fórmulas más

$$H_1 = \frac{\varepsilon_1 k_{0z} - \varepsilon_1 k_{2z}}{\varepsilon_1 k_{2z} + \varepsilon_2 k_{0z}} \qquad H_0 = \frac{\varepsilon_2\cos\theta_0 - \sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \operatorname{sen}^2\theta_0)}}{\varepsilon_2\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \operatorname{sen}^2\theta_0)}} H_0. \tag{32.10}$$

$$H_2 = \frac{2\varepsilon_2 k_{0z}}{\varepsilon_1 k_{2z} + \varepsilon_2 k_{0z}} \qquad H_0 = \frac{2\varepsilon_2\cos\theta_0}{\varepsilon_2\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \operatorname{sen}^2\theta_0)}} H_0 \tag{32.11}$$

también obtenidas por Fresnel. En los medios transparentes ellas toman la forma

$$H_1 = \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2)} H_0, \qquad H_2 = \frac{\operatorname{sen} 2\theta_0}{\operatorname{sen}(\theta_0 + \theta_2)\cos(\theta_0 - \theta_2)} H_0. \tag{32.12}$$

Introduzcamos la noción de *factor de reflexión*. Vamos a determinarlo como la razón de los componentes z de los vectores de Poynting de las ondas reflejada e incidente:

$$R = \frac{|(\gamma_1)_z|}{|(\gamma_0)_z|}.$$

Si tener en cuenta la dispersión espacil y con un medio no magnético (las intensidades del campo se consideran magnitudes complejas)

$$R = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_1 |E_1|^2}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0 |E_0|^2}. \tag{32.13}$$

En el caso de la incidencia normal de las ondas, con ayuda de las fórmulas (32.7) y (32.8), obtenemos

$$R = \left| \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \right|^2. \tag{32.14}$$

Si el índice de refracción del medio $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2} = n'_2 + ik_2$, al incidir una onda sobre semejante medio, p. ej., del vacío ($\varepsilon_1 = 1$), tendremos

$$R = \frac{(n'_2 - 1) + \kappa_2^2}{(n'_2 + 1) + \kappa_2^2}. \tag{32.15}$$

Con la incidencia oblicua, en correspondencia con (32.9)

$$R_{\perp} = \frac{\operatorname{sen}^2(\theta_2 - \theta_0)}{\operatorname{sen}^2(\theta_2 + \theta_0)}, \qquad R_{\parallel} \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_2 - \theta_0)}{\operatorname{tg}^2(\theta_2 + \theta_0)}. \tag{32.16}$$

Aquí $R_{\perp}$ y $R_{\parallel}$ son los factores de reflexión de las ondas incidentes polarizadas, perpendicular y paralelamente al plano de incidencia, respectivamente.

Es notable el caso cuando la onda incide bajo tal ángulo que la suma de los ángulos de incidencia y refracción $\theta_0 + \theta_2 = \pi/2$. Designemos este ángulo de incidencia destacado θ_0 con el símbolo θ_p; este ángulo lleva el nombre de Brewster. Teniendo en cuenta la definición de θ_p y la de refracción (32.3), hallamos

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_p} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\theta_2}}{\operatorname{sen}\theta_p} = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta_p}}{\operatorname{sen}\theta_p} = \operatorname{ctg}\theta_p = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}.$$

Así, pues, el ángulo θ_p se determina por el valor de la razón $\varepsilon_1/\varepsilon_2$. Para $\theta_0 = \theta_p$

$$R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_2 - \theta_p)}{\operatorname{tg}^2(\theta_2 + \theta_p)} \to 0. \tag{32.17}$$

Por ello, con cualquier polarización de un haz de ondas electromagnéticas, incidente bajo el ángulo θ_p, las ondas reflejadas del medio 2 estarán polarizadas por completo en el plano perpendicular al de incidencia. En lo que atañe a las ondas refractadas, éstas no estarán polarizadas rectilíneamente.

Otro importante fenómeno que surge durante la incidencia de ondas electromagnéticas sobre la superficie de separación de dos medios es la reflexión interna total. Ésta surge con la reflexión de un medio ópticamente menos denso, o sea, con $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Cuando se produce la reflexión interna total, la onda refractada no penetra en el medio ópticamente menos denso; las magnitudes $R_{\perp}$ y $R_{\parallel}$ se reducen en este caso a la unidad. El correspondiente ángulo de incidencia $\theta_0 = \theta_r$, con el que transcurre la reflexión interna total se determina de la condición de que, con ello, $\theta_2 \to \pi/2$. Este ángulo límite θ_r es determinado por la fórmula

$$\theta_r = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}. \tag{32.18}$$

Para $\theta_0 > \theta_r$ toda la energía del campo electromagnético incidente se refleja de nuevo al primer medio.

§ 33. Constante dieléctrica del plasma y de medios cuasiplásmicos con frecuencias finitas

33.1. Cálculo de la función $\varepsilon(k, \omega)$ del gas electrónico con k y ω finitas. En los anteriores parágrafos considerábamos, fundamentalmente, la propagación de las ondas electromagnéticas desde los enfoques de electromagnética macroscópica. El estudio más detallado de estos procesos requiere el

conocimiento de la forma explícita de la dependencia funcional entre la constante dieléctrica y la frecuencia y el vector de onda.

Como importante ejemplo práctico y relativamente sencillo de cálculo de $\varepsilon(k, \omega)$, hallemos la constante dieléctrica de un gas electrónico isótropo espacial-homogéneo en la aproximación sin colisiones. Semejante aproximación estará justificada cuando la frecuencia de las oscilaciones del campo ω es grande en comparación con la de las colisiones ν o bien si los procesos que se describen transcurren a distancias características, mucho menores que la longitud del recorrido libre de los electrones. En calidad de tal distancia puede figurar, en particular, el recorrido que pasa el electrón durante el período de variación del campo. Como fue mostrado en el § 6, P. II, en semejante caso, la constante dieléctrica puede representarse como (véase (6.11))

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi e^2}{\omega} \int d^3p \frac{v_\alpha \partial f_0 / \partial p_\beta}{\omega - k \cdot \mathbf{v}}, \tag{33.1}$$

donde $\delta_{\alpha\beta}$ es el símbolo de Kronecker, k, el vector de onda, ω, la frecuencia de variación del campo, $\mathbf{v}$ y p, la velocidad y el impulso de los electrones del medio.

En el § 6, P. II fue obtenido el valor límite de la constante dieléctrica para $\omega \to 0$. En el parágrafo presente ω será considerada distinta de cero. Siendo ω finita la integral en (33.1) deja de ser magnitud determinada, ya que (33.1) no contiene la regla de circulación del polo $\omega = k \cdot \mathbf{v}$. En correspondencia con esta regla, que fue establecida en el § 6, el denominador del integrando en (33.1) debe ser escrito en la forma $\omega - k \cdot \mathbf{v} + i\nu$, con ello $\nu \to 0$.

De acuerdo con (4.5) es posible representar la expresión (33.1) como la combinación de la constante dieléctrica longitudinal y transversal. De (4.5) y (33.1) sigue que si en el medio hay un campo eléctrico longitudinal el vector de la inducción eléctrica puede ser escrito así

$$\vec{\mathscr{D}} = E_\parallel + \frac{4\Pi e^2}{\omega} \int d^3p \frac{\mathbf{v}}{\omega - k \cdot \mathbf{v} + i\nu} \left(E_\parallel \frac{\partial f_0}{\partial p} \right) =$$
$$= \left[1 + \frac{4\pi e^2}{\omega k^2} \int d^3p \frac{k \cdot \mathbf{v}}{\omega - k \cdot \mathbf{v} + i\nu} \left(k \frac{\partial f_0}{\partial p} \right) \right] E_\parallel .$$

Por consiguiente,

$$\varepsilon^l = 1 + \frac{4\pi e^2}{\omega k^2} \int d^3p \frac{k \cdot \mathbf{v}}{\omega - k \cdot \mathbf{v} + i\nu} \left(k \frac{\partial f_0}{\partial p} \right). \tag{33.2}$$

De manera análoga es posible obtener la expresión para la constante dieléctrica transversal en un medio isótropo:

$$\varepsilon^{\mathrm{tr}} = 1 + \frac{2\pi e^2}{\omega} \int d^3p \frac{1}{\omega - k \cdot \mathbf{v} + i\nu} \left[\mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial p} - \frac{k \cdot \mathbf{v}}{k^2} \left(k \frac{\partial f_0}{\partial p_0} \right) \right]. \tag{33.3}$$

La derivada de la función de distribución de equilibrio puede ser transformada:

$$\frac{\partial f_0}{\partial p} = \frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial p} = \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}},$$

donde $\mathscr{E}$ es la energía del electrón. Tomando en consideración esta fórmula a las constantes dieléctricas longitudinal ε^l y transversal ε^{tr} se les puede dar la forma

$$\varepsilon^l = 1 + \frac{4\pi e^2}{\omega k^2} \int d^3p \frac{(\boldsymbol{k} \cdot \mathbf{v})^2}{\omega - \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{v} + i\nu} \frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}}, \tag{33.4}$$

$$\varepsilon^{tr} = 1 + \frac{2\pi e^2}{\omega k^2} \int d^3p \frac{(\boldsymbol{k} \times \mathbf{v})^2}{\omega - \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{v} + i\nu} \frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}}, \tag{33.5}$$

Al calcular las integrales en estas fórmulas, hay que hacer uso de una regla que simbólicamente se escribe del modo siguiente (véase Comp. IV. 25).

$$\frac{1}{\boldsymbol{k} \cdot \mathbf{v} - \omega - i\nu} = \mathscr{P} \frac{1}{\boldsymbol{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} + i\pi\delta(\boldsymbol{k} \cdot \mathbf{v} - \omega). \tag{33.6}$$

Aquí $\mathscr{P}$ es el símbolo del valor principal de la integral y la propia (33.6), es una relación operacional que se entiende en el sentido de que puede ser multiplicada por una función sin singularidades en una determinada región, después de la cual toda esta expresión se integra. Una importante característica de la constante dieléctrica consiste en que ella, no habiendo colisiones tiene, además de la parte real, parte finita imaginaria.

33.2. Oscilaciones longitudinales de un gas electrónico sin colisiones no degenerado. Aclaremos qué nuevos resultados (en comparación con los hallados en el § 28) respecto de las ondas electromagnéticas longitudinales pueden ser obtenidos si conocemos la forma explícita de la función $\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)$. Para simplificar, estudiemos el caso del plasma, cuya función de distribución de equilibrio tiene el aspecto de la distribución de Maxwell:

$$f_0 = \frac{N}{(2\pi mT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2mT}\right). \tag{33.7}$$

En esta distribución la magnitud N es la densidad de electrones, T, la temperatura del gas electrónico en unidades energéticas. Sustituyendo (33.7) en (33.4) y (33.5), hallaremos

$$\varepsilon^l = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x^2 \exp(-x^2/2)}{\omega - xk\sqrt{T/m} + i\nu}, \tag{33.8}$$

$$\varepsilon^{tr} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\exp(-x^2/2)}{\omega - xk\sqrt{T/m} + i\nu}. \tag{33.9}$$

Aquí hemos introducido la designación: $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{p} = xk\sqrt{T/m}$. Así, pues, las integrales por x corresponden a la integración por el componente longitudinal del impulso $\boldsymbol{p}$ (respecto de $\boldsymbol{k}$). En estas fórmulas la integración por el componente transversal del impulso $\boldsymbol{p}$ ya fue realizada.

La fórmula (33.8) se simplifica de manera sustancial en el caso límite de oscilaciones de onda larga. Con esto, en ellas es posible realizar el desarrollo por las potencias del pequeño parámetro $(k/\omega)\sqrt{T/m}$, después de lo cual (33.8) toma la forma

$$\varepsilon' = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{3Tk^2}{m\omega^2}\right) + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega\omega_p^2}{k^3}\left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\omega^2}{2k^2T}\right). \qquad (33.10)$$

Vemos que aquí la constante dieléctrica es una magnitud compleja. Su parte imaginaria está condicionada por la aportación en la integral (33.8) relacionada con la circulación del polo en el integrando de (33.8) (recordemos que la regla de circulación se determina por la presencia de una parte imaginaria infinitesimal en el denominador). Con pequeños $\boldsymbol{k}$ la parte imaginaria de la función ε' es exponencialmente pequeña y puede no tomarse en consideración. Entonces, de las condiciones de existencia de las ondas longitudinales, $\varepsilon'(k, \omega) = 0$, sigue la ligazón entre la frecuencia de éstas y el vector de onda $\boldsymbol{k}$:

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + \frac{3T}{m}k^2} = \omega_p + \frac{3}{2}\frac{k^2T}{m\omega_p}. \qquad (33.11)$$

De este modo, resulta que la frecuencia de las oscilaciones longitudinales del campo depende del vector de onda. Aunque la dependencia de la forma $\omega = \omega_p + ak^2$ podía haber sido escrita partiendo de razonamientos generales en la teoría fenomenológica, el conocimiento de la forma explícita de la constante dieléctrica nos ha permitido calcular el coeficiente a en la última fórmula. Podemos reescribir la relación (33.11) de manera algo diferente, expresando el coeficiente a por intermedio del radio de Debye r_D. De acuerdo con (6.13) dicho radio se determina con la fórmula

$$r_D^{-2} = -4\pi e^2 \int d^3p\, \frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}}.$$

Sustituyendo aquí la fórmula (33.7) y resolviendo la integral, obtenemos que en el gas electrónico con la función de distribución de Maxwell

$$r_D^{-2} = 4\pi e^2 N/T = m\omega_p^2/T. \qquad (33.12)$$

Teniendo en cuenta esta expresión para el radio de Debye, escribimos la fórmula (33.11) del siguiente modo

$$\omega = \omega_p[1 + {}^3/_2(kr_D)^2]. \qquad (33.13)$$

Vemos que para que sea posible considerar válida esta ecuación de dispersión, es preciso que la longitud de onda del campo sea mucho mayor que el radio de Debye de apantallamiento.

La parte imaginaria de la función $\varepsilon'(k, \omega)$ crece al aumentar el valor del vector de onda. Como en un medio isótropo es precisamente la parte imaginaria de la constante dieléctrica la que condiciona la disipación de la energía del campo, podemos llegar a la conclusión de que con el crecimiento del vector de onda aumentará el amortiguamiento de las oscilaciones longitudinales del campo. El amortiguamiento de las oscilaciones propias del campo puede ser descrito introduciendo la frecuencia compleja de las oscilaciones $\omega - i\gamma$, de manera que la variación del campo con el tiempo se escribirá así

$$\exp[-i(\omega - i\gamma)t] = \exp(-i\omega t)\exp(-\gamma t).$$

Aquí ω es la parte real de la frecuencia de las oscilaciones y γ, la parte imaginaria llamada *decremento* de las oscilaciones. Con esto, suponemos que $\gamma > 0$. Si, al contrario, la amplitud de las oscilaciones crece con el tiempo y $\gamma < 0$, hablamos del *incremento* de las oscilaciones.

Calculemos el decremento de las oscilaciones para las ondas longitudinales. Es posible hallarlo de la ecuación de dispersión

$$\varepsilon'(\omega - i\gamma, k) + i\varepsilon''(\omega - i\gamma, k) = 0, \qquad \varepsilon'' \ll \varepsilon'.$$

La última desigualdad permite considerar débil el amortiguamiento de las oscilaciones. Resolvamos la ecuación de dispersión

$$\varepsilon'(\omega - i\gamma, k) + i\varepsilon''(\omega - i\gamma, k) = 0 \tag{33.14}$$

por el método de las iteraciones. Con la aproximación nula, cuando se desprecia por completo el amortiguamiento, la ecuación se convierte en $\varepsilon'(\omega, k) = 0$.

Representemos la función $\varepsilon'(\omega - i\gamma, k)$ en la forma del desarrollo en una serie de Taylor por el parámetro pequeño γ/ω, dejando en él los términos nulo y lineal por γ. Entonces, (33.14) tendrá el aspecto

$$\varepsilon'(\omega, k) - i\gamma \left.\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega}\right|_{\gamma=0} + i\varepsilon''(\omega - i\gamma, k) = 0.$$

La magnitud γ puede ser despreciada en el sumando proporcional a la parte imaginaria de la constante dieléctrica. De por sí, la función ε'' es una magnitud de primer orden de pequeñez, por ello la conservación en su argumento de la magnitud γ correspondería a la toma en consideración de los términos de segundo orden de pequeñez por γ, los que en el desarrollo de la función ε' podrían despreciarse. Ahora, la ecuación de dispersión tomará el aspecto

$$\varepsilon'(\omega, k) - i\gamma \left.\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega}\right|_{\gamma=0} + i\varepsilon''(\omega, k) = 0.$$

Pero $\varepsilon^{l''}(\omega, k) = 0$, por lo que obtenemos que el decremento de las oscilaciones

$$\gamma = -\frac{\varepsilon^{l''}(\omega, k)}{\partial \varepsilon^{l'}(\omega, k)/\partial \omega}. \tag{33.15}$$

Sustituyendo en esta fórmula $\varepsilon^{l''}$ de (33.10) y calculando la correspondiente derivada en el denominador, hallaremos

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_p}{(kr_D)^3} \exp\left[-\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 \frac{1}{(kr_D)^2}\right] \tag{33.16}$$

o bien, tomando en consideración (33.11)

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_p}{(kr_D)^3} \exp\left[-\frac{1}{2(kr_D)^2} - \frac{3}{2}\right]. \tag{33.17}$$

El *amortiguamiento* descrito por esta fórmula lleva el nombre *de Landau*. De (33.17) se desprende que el amortiguamiento es pequeño con pequeños valores de k y crece con rapidez al aproximarse k al radio inverso de Debye.

El cuadro físico que conduce a la aparición del amortiguamiento de Landau puede representarse del modo siguiente. De (33.4) y (33.6) sigue que la parte imaginaria de la constante dieléctrica está relacionada con el cumplimiento de la condición $\boldsymbol{k} \cdot \mathbf{v} = \omega$. Como $\omega/k = v_{\text{fase}}$ es la velocidad de fase de la onda la condición indicada puede formularse así: $v_{\parallel} = v_{\text{fase}}$ (aquí $\mathbf{v}_{\parallel}$ es la proyección de la velocidad $\mathbf{v}$ de las partículas paralela al vector $\boldsymbol{k}$). Esto quiere decir, que la energía del campo pasa a aquellas partículas que se mueven de manera que todo el tiempo se hallan en el plano de una misma fase. Con ello, los electrones se encuentran largo tiempo en el campo de una onda de un solo signo y, a cuenta del campo, pueden recibir considerable energía. Los electrones, para los que la relación de fase formulada no se cumple, están en movimiento en un campo alternativo, por lo que, sucesivamente, bien reciben energía del campo, o bien la ceden a éste.

Indiquemos que la condición $\boldsymbol{k} \cdot \mathbf{v} = \omega$ corresponde al caso cuando los electrones pueden no sólo recibir energía del campo. Los electrones rápidos ceden la energía a éste, lo que acarrea la intensificación de las oscilaciones longitudinales. Pero, por regla, la función de distribución de los electrones, en un medio próximo al de equilibrio, es tal que en el medio hay más electrones lentos que rápidos. En correspondencia, las ondas longitudinales que se propagan en un medio termodinámicamente equilibrado siempre se amortiguan.

33.3. Oscilaciones transversales del gas electrónico sin colisiones no degenerado. El espectro de las ondas electromagnéticas transversales se determina con la ecuación de dispersión (28.10)

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{\text{tr}}(k, \omega) = 0.$$

Con pequeños k calculemos la constante dieléctrica transversal desarrollando (33.9) en una serie por las potencias de k. Con una precisón salvo los sumandos cuadráticos por k

$$\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{k^2 T}{m\omega^2}\right). \tag{33.18}$$

De aquí podemos obtener la ecuación de dispersión

$$\omega^2 = c^2k^2 + \omega_p^2\left(1 + \frac{k^2T/m}{\omega_p^2 + c^2k^2}\right) \tag{33.19}$$

de la que vemos que el efecto de la dispersión espacial, ligado con la existencia del movimiento térmico de los electrones, es pequeño para las ondas transversales. La ecuación de dispersión (33.19) que hemos obtenido, es muy próxima a la (28.16).

El amortiguamiento sin colisiones de las ondas transversales puede considerarse igual a cero. Esto está ligado con que la velocidad de fase v_{fase} de dichas ondas es, para todos k, mayor que la de la luz c, por lo que no hay electrones para los que pueda cumplirse la condición $v_{\mathrm{fase}} = v_{\parallel}$, con la que está relacionada la existencia de la parte imaginaria de la constante dieléctrica.

33.4. Oscilaciones iónico-acústicas. En los puntos anteriores de este parágrafo se tenía en cuenta que sólo pueden moverse los electrones, mientras que los iones quedaban inmóviles. Con altas frecuencias de las oscilaciones del campo los iones, incluso en el plasma gaseoso y más aún en un sólido, pueden considerarse inmóviles debido a su gran masa. Pero es posible que los iones del plasma gaseoso influyan de modo notorio sobre la propagación de las ondas de baja frecuencia, conduciendo incluso a la aparición de nuevos modos oscilatorios con bajas frecuencias. La constante dieléctrica de un plasma gaseoso de dos componentes, compuesto de electrones e iones, se distingue de la función ε del gas electrónico porque en los segundos sumandos de los segundos miembros de las fórmulas (33.4) y (33.5) debe encontrarse la suma por todos los componentes (en particular por la electrónica e iónica)

$$\varepsilon^{l} = 1 + \sum_j \frac{4\pi e_j^2}{\omega k^2}\int d^3p \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{v})^2}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\mathbf{v} + i\nu}\frac{\partial f_{0j}}{\partial \mathscr{E}}. \tag{33.20}$$

$$\varepsilon^{\mathrm{tr}} = 1 + \sum_j \frac{2\pi e_j^2}{\omega k^2}\int d^3p \frac{(\boldsymbol{k}\times\mathbf{v})^2}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\mathbf{v} + i\nu}\frac{\partial f_{0j}}{\partial \mathscr{E}}. \tag{33.21}$$

Designemos las masas de los electrones e iones por m_e y m_i, respectivamente, y las temperaturas, T_e y T_i. En las funciones electrónica e iónica, hablando en general, $T_e \neq T_i$.

Además de complicar las fórmulas para ε^l y ε^{tr}, la existencia de iones móviles conduce a la ecuación adicional

$$eN_e + e_i N_i = 0 \tag{33.22}$$

que expresa el hecho de la electroneutralidad del plasma. Para que el nuevo modo de las oscilaciones del campo, surgido gracias al movimiento de los iones, se amortigue débilmente, es preciso que la velocidad de fase de dicha onda esté lejos de las velocidades térmicas promedias tanto de los iones, como de los electrones, lo que es posible alcanzar si $T_e \gg T_i$ (lo que es posible en un sistema sin colisiones y $\sqrt{T_i/m_i} \ll v_{\text{fase}} \ll \sqrt{T_e/m_e}$. La aportación de los iones en la magntitud $\varepsilon^l - 1$ será determinada por la fórmula (33.10), en la que en lugar de las características electrónicas deben ponerse las iónicas. La aportación de los electrones en $\varepsilon^l - 1$ se obtiene de (33.20) desarrollándola en una serie por las potencias del pequeño parámetro $(\omega/k)\sqrt{m_e/T_e}$. Esta aportación, será

$$\frac{\omega_{p_e}^2}{kT_e/m_e}\left[1 - \frac{\omega^2 m_e}{k^2 T_e} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega}{k\sqrt{T_e/m_e}}\right]. \tag{33.23}$$

La parte imaginaria de la fórmula (33.23) es pequeña, ya que es proporcional al pequeño parámetro $(\omega/k)\sqrt{m_e/T_e}$. También es pequeño el segundo sumando entre corchetes y, en adelante, no lo tendremos en cuenta. Así, pues, para $\sqrt{T_i/m_i} \ll v_{\text{fase}} \ll \sqrt{T_e/m_e}$ la constante dieléctrica longitudinal

$$\varepsilon^l(k, \omega) = 1 + \frac{\omega_{p_e}^2 m_e}{kT_e}\left[1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega}{k}\sqrt{\frac{m_e}{T_e}}\right] - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}\left(1 + 3\frac{k^2 T_i}{\omega^2 m_i}\right). \tag{33.24}$$

La aportación exponencionalmente pequeña en la parte imaginaria de la función ε^l del componente iónico fue despreciada en comparación con la parte imaginaria de la función ε^l de origen electrónico. De la ecuación $\varepsilon^l(k, \omega) = 0$ obtenemos la ecuación de dispersión (despreciando el amortiguamiento pequeño):

$$\omega^2 = \frac{1 + 3k^2 r_{D_i}^2[1 + 1/(k^2 r_{D_e}^2)]}{1 + 1/(k^2 r_{D_e}^2)}\,\omega_{p_i}^2. \tag{33.25}$$

Al deducir esta ecuación se ha tenido en cuenta la relación (33.22).

La ecuación de dispersión se simplifica en particular cuando no sólo $kr_{D_i} \ll 1$, sino también con $kr_{D_e} \ll 1$. En tal caso (33.25) se convierte en

$$\omega = k\omega_{p_i} r_{D_e}. \tag{33.26}$$

El espectro de las oscilaciones resulta lineal por el vector de onda. Como esta misma propiedad es asimismo propia del espectro de las excitaciones acústicas, las ondas que estudiamos llevan el nombre de *iónico-acústicas*. De (33.26) sigue que la velocidad de fase de dichas ondas $v_{\text{fase}} \approx \sqrt{T_e/m_i}$. Ella se determina por la temperatura de los electrones, pero por la masa de

los iones. El decremento de las ondas iónico-acústicas

$$\gamma = \omega \sqrt{\frac{\pi m_e N_e}{8 m_i N_i}} \tag{33.27}$$

y está plenamente condicionada por los electrones.

Con longitudes de onda más cortas, cuando $r_{D_e}^{-1} \ll k \ll r_{D_i}^{-1}$, la ecuación de dispersión (33.25) toma la forma

$$\omega = \omega_{p_i}.$$

Éstas son oscilaciones iónicas análogas a las del gas electrónico consideradas anteriormente.

33.5. Descripción hidrodinámica de las ondas en el plasma homogéneo isótropo. Además de la descripción cinética de las interacciones del medio con el campo electromagnético, que ya hemos estudiado, con frecuencia también se utiliza otro método más aproximado de descripción, que es atractivo por su sencillez y que en casos complicados se emplea con frecuencia para el análisis inicial, apreciativa, del problema. Este método (llamado *hidrodinámico*) consiste en lo siguiente.

En las ecuaciones de Maxwell la función de distribución no entra directamente. En ellas se incluye la densidad de corriente inducida (y la de la carga inducida), expresada mediante la integral de la función de distribución

$$j = \int d^3p \mathbf{v} f(p).$$

Con otras palabras, en las ecuaciones de Maxwell sólo entra el valor medio de la velocidad de las partículas del medio. En las ecuaciones de mecánica que determinan el carácter de la respuesta del medio a la acción del campo, la velocidad $\mathbf{v}$ entra directamente.

Si suponemos que los detalles de la distribución real de las partículas por las velocidades tienen poca influencia sobre el carácter de la respuesta del medio al campo exterior, llegaremos a la descripción hidrodinámica del movimiento del medio con la que en la ecuación de movimiento del medio entra, desde un principio, sólo la velocidad media. Con la aproximación hidrodinámica las propiedades del medio se describen con cinco magnitudes escalares: tres componentes de la velocidad media del medio $\mathbf{v}$ y dos magnitudes que describen el estado interno del medio en cada punto (como sabemos de termodinámica para esto dos magnitudes son suficientes). Tales magnitudes pueden ser, p. ej., la densidad del medio τ y la presión p o bien τ y la temperatura T. Esto significa que con la aproximación hidrodinámica la velocidad media de las partículas del medio depende no sólo del valor del campo aplicado, sino también del estado interno de la sustancia. Debido a esto, en comparación con la aproximación más basta posible con la que todas las partículas se mueven a una misma velocidad bajo la acción

del campo aplicado, la aproximación hidrodinámica permite obtener una descripción comparativamente detallada de la respuesta del medio al campo.

Comparando la aproximación hidrodinámica con la cinética podemos decir que si la primera asegura una descripción detallada de la interacción del medio con el campo, la segunda es exhaustiva.

Ahora, formulemos las ecuaciones utilizadas durante la descripción de las interacciones del medio con el campo en la aproximación hidrodinámica. Despreciando, para simplificar, el rozamiento entre diversos elementos del plasma, escribamos la ecuación de movimiento de las cargas de cada género:

$$\tau \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{e}{m} \tau E. \tag{33.28}$$

Esta ecuación debe ser completada con la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \operatorname{div}(\tau \mathbf{v}) = 0. \tag{33.29}$$

El estado interno del plasma se describe con la ecuación de estado. Con frecuencia como semejante ecuación se usa la de estado de un gas ideal

$$p = \frac{\tau}{m} T. \tag{33.30}$$

Vamos a considerar que la propagación de las ondas en el medio transcurre adiabáticamente, así que

$$p\tau^{-\gamma} = \text{const}. \tag{33.31}$$

Aquí el parámetro $\gamma = 1 + R/c_V$. Las ecuaciones aducidas contienen las incógnitas $\mathbf{v}$, p, T, τ y E; por eso, junto con las cuatro ecuaciones escritas más arriba, deben ser resueltas las ecuaciones de Maxwell que son las que determinan el campo eléctrico E.

Linealicemos dichas ecuaciones suponiendo que $T = T_0 + T_1$, $p = p_0 + p_1$ y $\tau = \tau_0 + \tau_1$. Vamos a considerar que $\mathbf{v}_0 = E_0 = 0$ de manera que $\mathbf{v}$ y E son ya magnitudes de primer orden. Como un sistema de equilibrio se supone que es espacial-homogéneo, $\operatorname{grad} p_0 = \operatorname{grad} T_0 = \operatorname{grad} \tau_0 = 0$. Así, pues, de la ecuación adiabática (33.31) obtenemos que

$$p_1 = p_0 \gamma \tau_1 / \tau_0,$$

mientras que de la ecuación de continuidad, que

$$\tau_1/\tau_0 = (\boldsymbol{k} \cdot \mathbf{v})/\omega.$$

Debido a esto $p_1 = \gamma(\boldsymbol{k} \cdot \mathbf{v}) p_0/\omega$. Al calcular las derivadas teníamos en cuenta que todas las magnitudes: p_1, T_1, τ_1 dependen de $\boldsymbol{r}$ y t según la ley $\exp[i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) - \omega t)]$.

A continuación calculamos ∇p_1. Vamos a considerar que este gradiente está dirigido a lo largo del vector $\boldsymbol{k}$, de modo que

$$\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{v}) = \boldsymbol{k}\nabla v_{\parallel} = ikkv_{\parallel}.$$

Sustituyendo la magnitud hallada en (33.28), tendremos

$$v_{\perp} = i\frac{eE_{\perp}}{m\omega}. \tag{33.32}$$

Aquí $v_{\parallel}$ y $v_{\perp}$ son, respectivamente, los componentes del vector $\mathbf{v}$ paralelo y perpendicular al vector $\boldsymbol{k}$, con ello

$$v_{\parallel} = \frac{ieE_{\parallel}}{m\omega\left(1 - \gamma\dfrac{k^2T_0}{m\omega^2}\right)}. \tag{33.33}$$

Por esta razón, los componentes longitudinal y transversal de la densidad de corriente tienen la forma

$$j_{\parallel} = \frac{ie^2\tau_0\omega E_{\parallel}}{m(m\omega^2 - \gamma k^2T_0)}, \qquad j_{\perp} = \frac{ie^2\tau_0 E_{\perp}}{m^2\omega}. \tag{33.34}$$

Todas estas fórmulas han sido escritas para un solo componente del plasma. Pero como la corriente está condicionada por todos sus componentes en (33.34) debemos sobreentender la suma por todos éstos.

De (33.34) obtenemos la expresión para las conductividades longitudinal y transversal:

$$\sigma_{\parallel} = \frac{ie^2\tau_0\omega}{m(m\omega^2 - \gamma k^2T_0)}, \sigma_{\perp} = \frac{ie^2\tau_0}{m^2\omega}. \tag{33.35}$$

Puesto que

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi i\sigma}{\omega},$$

para la constante dieléctrica obtenemos

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \sum \frac{4\pi n_0e^2}{m\omega^2 - \gamma kT}, \qquad \varepsilon_{\perp} = 1 - \sum \frac{4\pi n_0e^2}{m\omega^2}; \tag{33.36}$$

donde $n_0 = \tau_0/m$ es la concentración, el signo de suma significa la suma por todos los componentes del plasma.

En este caso, la constante dieléctrica transversal tiene la misma forma que con el modelo más sencillo, en el que todas las partículas de un género se mueven a la misma velocidad por el efecto del campo. Para el componente longitudinal no existe semejante coincidencia. En el modelo más sencillo, con movimiento de las partículas a igual velocidad, no tuvimos semejante resultado, él se obtiene precisamente en el modelo hidrodinámico (así, como es lógico, en el cinético).

Estudiemos primero el componente transversal de la constante dieléctrica como el más sencillo. Para $\omega < \omega_{p_e} = \sqrt{4\pi n_0e^2/m_e}$

$$\mathrm{Re}\sqrt{\varepsilon_{\perp}} < 0.$$

Esto quiere decir que la onda con tal frecuencia no puede propagarse en el medio. Para $\omega > \omega_{p_e}$ en el plasma no pueden propagarse ondas transversales para las que la ley de dispersión, $\omega^2 = \omega_{p_e}^2 + k^2c^2$, coincide con lo que obtuvimos antes. La aportación de los iones en el espectro de las oscilaciones transversales puede ser despreciada debido a su persistencia.

Hablando en general, al describir las oscilaciones longitudinales no podemos despreciar la aportación de los iones, debido a la presencia del segundo sumando en el denominador en $\varepsilon_\parallel$. Entonces, la ecuación de dispersión tomará el aspecto

$$\varepsilon_\parallel(\omega) = 1 - \frac{4\pi n_{0e}e^2}{m\omega^2 - \gamma_e k^2 T_{0e}} - \frac{4\pi n_{0i}Z^2e^2}{m_i\omega^2 - \gamma_i k^2 T_{0i}} = 0. \qquad (33.37)$$

Aquí se suponía que sólo había iones de un tipo con carga Ze. La solución de la ecuación (33.37) se muestra en la fig. 33.1. Vemos que ella tiene dos ramales: electrónico e iónico.

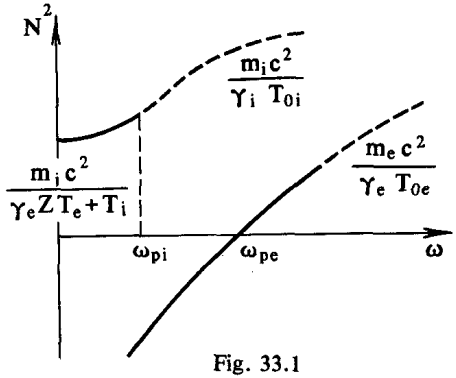

Fig. 33.1

En la región de altas frecuencias, cuando el movimiento de los iones puede aun despreciarse, el tercer sumando en (33.37) no proporciona aportación y

$$\omega^2 = \omega_{p_e}^2 + \gamma_e \frac{T_{0e}}{m_e} k^2. \qquad (33.38)$$

La dependencia entre la frecuencia y el vector de onda está condicionada aquí por la presión del gas electrónico.

Al ramal iónico de las oscilaciones corresponden las frecuencias con las que los electrones van tras los iones de forma adiabática. Por esta causa, en el sumando electrónico en (33.37) podemos despreciar el cuadrado de la frecuencia, por lo que la ecuación de dispersión toma el aspecto

$$\omega^2 = \gamma_i \frac{k^2 T_{0i}}{m_i} + \gamma_e \frac{k^2 Z T_{0e}}{m_i(1 + \gamma_e k^2 T_{0e}/4\pi e^2 n_{0e})}. \qquad (33.39)$$

Con pequeños valores del vector de onda

$$\gamma_e k^2 T_{0e}/4\pi n_{0e} e^2 = k^2 \gamma_e / \kappa_{D_e}^2 \ll 1$$

y

$$\omega^2 = k^2 \frac{\gamma_i T_{0i} + \gamma_e Z T_{0e}}{m_i}. \tag{33.40}$$

Éstas son las oscilaciones iónicas-acústicas.

Siendo $k^2 \gamma_e / k_{D_e}^2 \gg 1$

$$\omega^2 = \omega_{p_i}^2 + k^2 \frac{\gamma_i T_{0i}}{m_i}, \tag{33.41}$$

lo que corresponde a las oscilaciones plasmáticas iónicas. En semejantes oscilaciones los electrones no participan.

§ 34. Descripción magnetohidrodinámica de las ondas electromagnéticas en el plasma en un campo magnético

34.1. Sistema de ecuaciones de hidrodinámica magnética. Si en el medio hay un campo magnético continuo exterior, en él se modifican los modos de oscilaciones ya examinados en el parágrafo anterior y, además surgen nuevos, lo que es en particular sustancial. El estudio de dichos modos puede realizarse sobre la misma base que en el medio sin campo magnético. Lo nuevo será aquí el hecho de que en el término "de fuerza" de la ecuación cinética tendremos la fuerza total de Lorentz junto con su parte magnética. El campo exterior destaca en el medio cierta dirección, por lo que éste es anisótropo.

Debido a la gran complejidad de los problemas con campo magnético, para su solución es en particular cómodo emplear el procedimiento hidrodinámico, relativamente sencillo, de descripción de la integración del plasma con el campo. Con esto, alcanzaremos cierta simplificación (en comparación con el cinético) para describir la interacción del medio con el campo y, además, resulta posible tomar con relativa facilidad en consideración los fenómenos que surgen cuando por el efecto del campo los elementos del medio sufren desplazamientos macroscópicos. La ecuación hidrodinámica fundamental será asimismo la de Navier — Stokes. Pero al haber campo magnético la interacción más sustancial es la de este campo con las corrientes del medio que, incluso en el plasma electroneutral, pueden ser grandes. Por esto, en el caso de un medio cuasineutral y conductor, la ecuación de Navier — Stokes adquiere la forma

$$\tau \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right] = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{c} j \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{F}_f. \tag{34.1}$$

Aquí τ es la densidad del medio, p, la presión en éste, F_f, las fuerzas de rozamiento condicionadas por las colisiones de las partículas del medio, $\mathbf{v}$, la velocidad hidrodinámica. Consideramos que el medio no es magnético, así que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}$. La densidad del medio ha de tomarse tal que la fuerza de la gravedad pueda despreciarse. En aquellos casos en los que el medio es suficientemente denso, al segundo miembro de la ecuación (34.1) debe añadirse el sumando $\tau \boldsymbol{g}$, donde $\boldsymbol{g}$ es la aceleración de la caída libre.

En el sistema de ecuaciones de hidrodinámica entra, además de (34.1), la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \operatorname{div}(\tau \mathbf{v}) = 0. \tag{34.2}$$

Las anteriores ecuaciones deben resolverse en conjunto con las de Maxwell:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{34.3}$$

(En la segunda ecuación de Maxwell despreciamos la corriente de desplazamiento, ya que sólo nos interesan los modos de oscilación de baja frecuencia.) Además, hay que tener también en cuenta la ecuación material

$$\boldsymbol{j} = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \boldsymbol{B}\right). \tag{34.4}$$

La combinación $\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \boldsymbol{B}$ es el campo eléctrico en el sistema en movimiento junto con el medio. En semejante sistema, precisamente, se determina la ley corriente de Ohm.

Introduzcamos ahora algunas importantes nociones empleadas en hidrodinámica magnética. Ante todo, estudiemos las singularidades de la conducta del campo magnético en conductores líquidos. Con la ecuación (34.4) expresemos $\boldsymbol{E}$ mediante $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{B}$ y la conductividad σ:

$$\boldsymbol{E} = \sigma^{-1}\boldsymbol{j} - \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \boldsymbol{B}.$$

Calculemos el rotor de esta relación:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \frac{1}{\sigma}\operatorname{rot} \boldsymbol{j} - \frac{1}{c}\operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \boldsymbol{B}).$$

En esta última relación $\operatorname{rot} \boldsymbol{j}$ ha de expresarse por $\frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{B}$ y la fórmula obtenida se sustituye en el primer miembro de la primera ecuación de Maxwell. Como resultado hallamos una ecuación que liga la intensidad del campo magnético con la velocidad de desplazamiento de los elementos del medio:

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \boldsymbol{B}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta \boldsymbol{B}. \tag{34.5}$$

Cuando el medio está inmóvil esta ecuación se simplifica y toma la forma

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \boldsymbol{B}. \tag{34.6}$$

Puesto que por su estructura la ecuación (34.6) es del tipo de las de difusión, es posible de inmediato determinar el tiempo característico de la "difusión" del campo magnético:

$$t_d = \frac{4\pi\sigma}{c^2} L^2, \tag{34.7}$$

donde L es la longitud característica por la cual varía el campo magnético de modo sustancial. A otro caso límite corresponde el medio en movimiento con muy elevada conductividad. Con ello $\sigma \to \infty$ y la ecuación (34.5) se convierte en la

$$\partial \boldsymbol{B}/\partial t = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \boldsymbol{B}). \tag{34.8}$$

Podemos ver que semejante ecuación describe el campo magnético "congelado" en la sustancia, por lo que el campo se desplaza junto con ella. En efecto, el segundo miembro de (34.8) $\operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\operatorname{div}\boldsymbol{B}$. Aquí el cuarto sumando a la derecha es igual a cero debido a la tercera ecuación de Maxwell. Teniendo en cuenta la relación de continuidad, el tercer sumando puede ser transformado:

$$\boldsymbol{B}\operatorname{div}\mathbf{v} = \boldsymbol{B}\left(-\frac{1}{\tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}\right) - \boldsymbol{B}\left(\frac{\mathbf{v}}{\tau}\nabla\tau\right).$$

Ahora, (34.8) puede tomar la forma

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{B}}{\tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{B}}{\tau}(\mathbf{v}\cdot\nabla\tau).$$

Dividiendo esta ecuación por τ y agrupando en ella los términos, se obtiene

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\tau}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\tau}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}. \tag{34.9}$$

Comparemos esta expresión con la ecuación que describe la velocidad de variación de un elemento lineal de un líquido. Sea $\mathbf{v}$ la velocidad de movimiento de uno de los extremos del elemento $\delta\boldsymbol{l}$; entonces la velocidad del otro extremo será $\mathbf{v} + (\delta\boldsymbol{l}\cdot\nabla)\mathbf{v}$. A expensas de esto, en el transcurso del lapso dt el elemento cambiará su longitud en una magnitud $dt(\delta\boldsymbol{l}\nabla)\mathbf{v}$, por lo que

$$\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{l} = (\delta\boldsymbol{l}\cdot\nabla)\mathbf{v}. \tag{34.10}$$

Como la estructura de las ecuaciones (34.9) y (34.10) coincide plenamente podemos llegar a la conclusión de que en el proceso de la deformación del medio la magnitud B/τ resultará, por decirlo así, "congelada" en la sustancia.

Pasemos ahora al estudio de la parte mecánica del sistema de ecuaciones de hidrodinámica magnética. Todas las fuerzas en el segundo miembro de la ecuación de Navier — Stokes se dividen en las de origen electromagnético (las designaremos por F_{em}) y no electromagnético (F_{nem}).

$$F_{em} = \frac{\sigma}{c} E \times B + \frac{\sigma}{c^2} (\mathbf{v} \times B) \times B = \frac{\sigma}{c} E \times B - \frac{\sigma}{c^2} \mathbf{v}_\perp B^2. \quad (34.11)$$

Aquí $\mathbf{v}_\perp$ es la componente de la velocidad de movimiento del medio perpendicular a la dirección del campo magnético. De (34.11) sigue que todas las fuerzas electromagnéticas son perpendiculares respecto de la dirección del campo magnético. En (34.11) el último sumando está dirigido en sentido opuesto a la componente de la velocidad de desplazamiento del medio perpendicular a B y depende de modo lineal del valor de dicha componente de la velocidad. Debido a esto, dicha parte de la fuerza F_{em} se parece a la fuerza de rozamiento en mecánica. Por ello, suele llamarse viscosidad magnética. La fuerza de dicha viscosidad

$$F_v = -\frac{\sigma}{c^2} \mathbf{v}_\perp B^2 \quad (34.12)$$

es proporcional al cuadrado del vector B y de manera sustancial influye en la dinámica de los medios buenos conductores.

En F_{em} puede asimismo destacarse otro importante sumando más. Con ayuda de la segunda ecuación de Maxwell la fuerza electromagnética $\frac{1}{c} j \times \times B$ puede ser escrita en la forma

$$F_{em} = -\frac{1}{4\pi} B \times \operatorname{rot} B.$$

Con ayuda de la identidad $\frac{1}{2} \operatorname{grad} B^2 = B \times \operatorname{rot} B + (B \operatorname{grad}) B$ dicha fuerza se representa así

$$F_{em} = -\operatorname{grad} (B^2/8\pi) + \frac{1}{4\pi} (B \operatorname{grad}) B. \quad (34.13)$$

El primer sumando en el segundo miembro de (34.13) puede agruparse con el sumando $-\operatorname{grad} p$ en la ecuación (34.1). Esto significa que el campo magnético crea cierta presión

$$p_m = B^2/8\pi \quad (34.14)$$

que recibe el nombre de *presión magnética* y que, junto con la presión hidrostática corriente, puede ser la causa del flujo de un líquido o gas conductores.

34.2. Ondas magnetohidrodinámicas. En un medio el campo magnético puede ser la causa de la aparición de nuevos modos de oscilaciones del campo electromagnético. Estudiemos el medio deformable libremente más sencillo, o sea, un líquido conductor ideal de viscosidad nula. Su movimiento se describe con las ecuaciones de hidrodinámica

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \operatorname{div} \tau \mathbf{v} = 0,$$

$$\tau \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right] = -\operatorname{grad} p - \frac{1}{4\pi} \boldsymbol{B} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{B}, \tag{34.15}$$

junto con las ecuaciones del campo. Describiremos el campo con la ecuación (34.5) en la que $\sigma \to \infty$, de modo que

$$\partial \boldsymbol{B}/\partial t = \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \boldsymbol{B}). \tag{34.16}$$

A estas ecuaciones debemos adicionar la ecuación de estado del medio que ligará la presión en él con la densidad. Al haber en los líquidos procesos oscilatorios, por regla, la presión p está enlazada con la densidad τ con ayuda de la relación

$$p = s^2 \tau, \tag{34.17}$$

donde s es la velocidad del sonido en el medio. Supongamos que en nuestro caso podemos hacer uso de la ecuación de estado (34.17). Busquemos soluciones oscilatorias del sistema (34.15) — (34.17). Como con oscilaciones lineales los desplazamientos del sistema de la posición de equilibrio, por lo general, son pequeños, realicemos la linealización de nuestro sistema de ecuaciones. Representemos cada magnitud en forma de la suma de su valor de equilibrio (designándolo con el índice 0) y el sumando que describe el desplazamiento de la posición de equilibrio (con raya):

$$\tau = \tau_0 + \tau', \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}', \qquad p = p_0 + p',$$

Como suponemos que $\mathbf{v}_0 = 0$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$. Consideramos que el campo $\boldsymbol{B}_0$ es homogéneo y continuo. Después de la linealización de (34.15) — (34.17) el sistema de ecuaciones de hidrodinámica magnética adquiere el aspecto

$$\frac{\partial \tau'}{\partial t} + \tau_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \qquad \tau_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\operatorname{grad} p' - \frac{1}{4\pi} \boldsymbol{B}_0 \times \operatorname{rot} \boldsymbol{B}',$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \boldsymbol{B}_0, \qquad \operatorname{grad} p' = s^2 \operatorname{grad} \tau'. \tag{34.18}$$

De este sistema es posible obtener una ecuación que contenga sólo la velocidad y la combinación de $\boldsymbol{B}_0$ y τ_0:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - s^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v}_A \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_A) = 0. \tag{34.19}$$

la magnitud $\mathbf{v}_A = \boldsymbol{B}_0(4\pi\tau_0)^{-1/2}$, cuya dimensión es la de la velocidad, lleva el nombre de *velocidad de Alfven*. Hallemos la solución ondulatoria de (34.19):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_a \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t), \tag{34.20}$$

donde $\mathbf{v}_a$ es la amplitud de las oscilaciones de la velocidad. Después de sustituir (34.20) en (34.19) se obtiene

$$-\omega^2\mathbf{v} + (s^2 + v_A^2)\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{v}) + (\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{v}_A)[\mathbf{v}(\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{v}_A) - \boldsymbol{k}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_A) - \mathbf{v}_A(\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{v})] = 0. \tag{34.21}$$

Si la onda se propaga en sentido perpendicular al campo y $\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{v}_A = 0$, la ecuación (34.21) se simplifica y toma la forma

$$\mathbf{v}\omega^2 = (s^2 + v_A^2)\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{v}),$$

por lo que los sentidos de los vectores $\mathbf{v}$ y $\boldsymbol{k}$ deben coincidir. Debido a esto la velocidad $\mathbf{v}$ se elimina y la ecuación adquirirá el aspecto de una ecuación de dispersión para las ondas que se propagan perpendicularmente al campo magnético:

$$\omega^2 = (s^2 + v_A^2)k^2. \tag{34.22}$$

Como sigue de la ecuación de dispersión, la solución hallada describe las ondas acústicas longitudinales modificadas a cuenta de la presencia del campo magnético, en el sentido de que con $\boldsymbol{H}_0 \to 0$ ellas se convierten en ondas acústicas corrientes.

Si la onda se propaga a lo largo del campo magnético y $\boldsymbol{k} \parallel \mathbf{v}_A$, la ecuación (34.21) será

$$(k^2v_A^2 - \omega^2)\mathbf{v} + (s^2/v_A^2 - 1)k^2\mathbf{v}_A(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_A) = 0. \tag{34.23}$$

Aquí son posibles dos casos. Primero que $\mathbf{v} \parallel \mathbf{v}_A$. Con ello, la ecuación (34.23) tendrá el aspecto

$$\omega = sk. \tag{34.24}$$

Ésta es una onda acústica corriente. Segundo, puede haber caso cuando $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_A = 0$. Entonces la ecuación (34.23) se convierte en la relación corriente

$$\omega = v_A k. \tag{34.25}$$

Esta onda, lo mismo que la acústica, tiene dispersión lineal. Pero es una onda nueva por completo, ya que en el límite, con $\boldsymbol{B}_0 \to 0$, la velocidad de fase $v_{\text{fase}} = v_A$ y con ella su frecuencia ω también se reduce a cero. Semejante onda con velocidad de fase

$$v_{\text{fase}} = v_A = \boldsymbol{B}_0/\sqrt{4\pi\tau_0} \tag{34.26}$$

se llama *de Alfven*. Tales ondas son un ejemplo de que el campo magnético conduce a la aparición de nuevos modos de oscilaciones.

Por fin debemos señalar que el efecto del campo magnético no se reduce sólo a la aparición de la onda de Alfven. El número de los modos de oscilaciones en un medio situado en un campo magnético es enorme y no todos ellos están estudiados en suficiente grado.

§ 35. Paso de las ondas electromagnéticas por medios girótropos

Si el medio es transparente, quiere decir que el tensor de la constante dieléctrica del medio es hermitiano:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^*_{\beta\alpha}. \tag{35.1}$$

El tensor hermitiano puede tener no sólo parte real, sino también imaginaria, con la particularidad de que de (35.1) sigue que

$$\varepsilon'_{\alpha\beta} = \varepsilon'_{\beta\alpha}, \qquad \varepsilon''_{\alpha\beta} = -\varepsilon''_{\beta\alpha}. \tag{35.2}$$

Estas mismas propiedades son asimismo propias del tensor inverso $\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta} = (\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta})' + i(\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta})''$. Así, pues, tanto en el tensor $\varepsilon_{\alpha\beta}$, como en el $\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}$ hay una parte antisimétrica. El tensor antisimétrico de segundo rango sólo tiene tres componentes independientes y, como se explica en el Complemento I, es equivalente a un vector axial. Designemos el vector equivalente al tensor $\varepsilon''_{\alpha\beta}$ con el símbolo $\boldsymbol{g}$, en tanto que al tensor $(\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta})''$, con el símbilo $\boldsymbol{G}$. El vector $\boldsymbol{G}$ y el tensor $(\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta})''$ están ligados entre sí mediante un tensor unitario en absoluto antisimétrico de tercer rango $e_{\alpha\beta\gamma}$ con la propiedad de que todos sus componentes son iguales a 1 ó a -1 si $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ y son nulos al coincidir por lo menos dos de los índices tensoriales:

$$(\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}) + e_{\alpha\beta\gamma}G_\gamma. \tag{35.3}$$

Por ello, la ligazón entre la intensidad del campo eléctrico y el vector de la inducción eléctrica $\boldsymbol{D}$ puede ser escrita así

$$E_\alpha = \varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}D_\beta = (\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta})'D_\beta + ie_{\alpha\beta\gamma}G_\gamma D_\beta. \tag{35.4}$$

En el Complemento I se muestra que con ayuda del tensor $e_{\alpha\beta\gamma}$ el producto vectorial de dos vectores puede representarse así

$$e_{\alpha\beta\gamma}G_\gamma D_\beta = -e_{\gamma\beta\alpha}G_\gamma D_\beta + (\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{G})_\alpha. \tag{35.5}$$

Agrupando (35.4) y (35.5), obtenemos

$$E_\alpha = (\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta})'D_\beta + i(\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{G})_\alpha. \tag{35.6}$$

De modo en absoluto análogo podemos obtener:

$$D_\alpha = \varepsilon'_{\alpha\beta}E_\beta + i(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{g})_\alpha. \tag{35.7}$$

Los medios en los que la ligazón entre $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{E}$ tiene la forma (35.6) o bien (35.7) llevan el nombre de *girótropos*. El vector $\boldsymbol{g}$ ligado con la parte antisimétrica del tensor $\varepsilon_{\alpha\beta}$ se denomina *vector de giro*. El vector $\boldsymbol{G}$ puede expresarse mediante el vector $\boldsymbol{g}$. Como este último se determina por las propieda-

des del medio, esto significa que el medio girótropo es al mismo tiempo anisótropo.

El medio girótropo influye de modo sustancial sobre el carácter de la polarización de las ondas electromagnéticas que por él se propagan. La polarización de las ondas en un medio anisótropo se determina con la ecuación (29.8) a la que podemos dar la forma

$$\left(\frac{1}{n^2}\,\delta_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}^{-1}\right)D_\beta = \left[\frac{1}{n^2}\,\delta_{\alpha\beta} - (\varepsilon_{\alpha\beta}^{-1})' - i(\varepsilon_{\alpha\beta}^{-1})''\right]D_\beta = 0. \quad (35.8)$$

Aquí los índices α y β pasan por dos valores. Eligiendo los ejes correspondientes a α y β dirigidos a lo largo de los ejes principales del tensor bidimensional $(\varepsilon_{\alpha\beta}^{-1})'$ y designando los valores principales de éste por $1/n_{01}^2$ y $1/n_{02}^2$, podemos dar a la ecuación (35.8) el aspecto

$$\left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n^2}\right)D_1 + iG_3D_2 = 0, \quad -iG_3D_1 + \left(\frac{1}{n_{02}^2} - \frac{1}{n^2}\right)D_2 = 0; \quad (35.9)$$

en este caso el eje 1 corresponde a la magnitud $1/n_{01}^2$ y el 2, a la magnitud $1/n_{02}^2$. Este sistema de ecuaciones es conjunto si

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_{01}^2}\right)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_{02}^2}\right) = G_3^2. \quad (35.10)$$

Resolviendo esta ecuación respecto de n^2 obtenemos dos soluciones (a las que corresponden dos posibles valores del signo delante del paréntesis angular)

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_{01}^2} + \frac{1}{n_{02}^2}\right) \pm \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n_{02}^2}\right)^2 + G_3\right]^{1/2}. \quad (35.11)$$

Sustituyendo estas dos raíces de la ecuación (35.10) en la (35.9) hallamos que a dichas raíces corresponde la relación

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{i}{G_3}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n_{02}^2}\right) \mp \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n_{02}^2}\right)^2 + G_3\right]^{1/2}\right\}. \quad (35.12)$$

La razón D_2/D_1 es una magnitud imaginaria, lo que quiere decir que las dos ondas están polarizadas elípticamente y los ejes principales de las elipses coinciden con los ejes principales del tensor bidimensional $(\varepsilon_{\alpha\beta}^{-1})'$, con la particularidad de que la razón entre los ejes de las dos elipses es igual, pero los correspondientes ejes están girados en $\pi/2$. Los sentidos de rotación del vector $\boldsymbol{D}$ de estas dos ondas son opuestas.

El ejemplo más evidente del medio girótropo es un medio transparente isótropo ubicado en un campo magnético continuo homogéneo. Entonces, la ligazón entre $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{E}$ es así

$$\boldsymbol{E} = \varepsilon^{-1}\boldsymbol{D} + i\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{G}, \quad (35.13)$$

con la particularidad de que el vector axial G, como es natural, puede estar dirigido sólo a lo largo del vector de intensidad H del campo magnético exterior. En campos débiles los vectores g y H están ligados con la ligazón lineal:

$$g = fH, \tag{35.14}$$

donde f es un coeficiente escalar de proporcionalidad. En un medio isótropo $n_{01} = n_{02} = \sqrt{\varepsilon}$, aquí ε es la constante dieléctrica del medio sin campo magnético exterior. En este caso, las ecuaciones (35.10), (35.11) toman la forma

$$1/n^2 = 1/\varepsilon \mp G_3, \qquad n_{\mp}^2 = \varepsilon \mp g_z. \tag{35.15}$$

Sustituyendo estas soluciones en la ecuación (35.9), obtenemos

$$D_1 = \mp iD_2. \tag{35.16}$$

Los valores absolutos de los vectores D_1 y D_2 son iguales, pero ellos están desfasados entre sí en $\mp\pi/2$. Esto quiere decir, que una onda tiene polarización circular a la derecha, la otra, a la izquierda. Los índices de refracción de estas dos ondas son diferentes, por lo que ellas tendrán distintos vectores de onda:

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c} n_{\pm}.$$

Por consiguiente, si en la superficie del medio incide una onda polarizada en el plano en dirección del campo magnético, en la salida del medio la dirección de polarización de la onda no coincidirá con la dirección de polarización de la onda en la entrada. Es fácil ver que en la salida

$$\frac{D_2}{D_1} = \operatorname{tg}\left(l\frac{\omega g}{2c\sqrt{\varepsilon}}\right), \tag{35.17}$$

donde l es la longitud del recorrido pasado por la onda en el medio. La magnitud D_2/D_1 es real; esto corresponde a que se conservó la polarización lineal de la onda, pero el plano de polarización, en comparación con este plano en la entrada, resulta girado en el ángulo

$$\chi = \frac{\omega g}{2c\sqrt{\varepsilon}} l.$$

La magnitud $\omega f/2c\sqrt{\varepsilon}$ se denomina *constante de Verdet*, mientras que el propio efecto de rotación del plano de polarización, *efecto Faraday*. La constante de Verdet depende de la frecuencia. Si los átomos del medio se consideran como osciladores armónicos, cuya frecuencia propia es igual a ω_0, la dependencia frecuencial de la constante de Verdet, tendrá la forma

$$\omega^2/(\omega^2 - \omega_0^2)^2.$$

Si el campo magnético es suficientemente fuerte él puede convertir un medio no transparente en transparente. Como ejemplo examinemos los metales. En el § 28, P. II fue mostrado que los metales no son transparentes para la radiación electromagnética cuya frecuencia es menor que ω_p. Pero la superposición de un campo magnético sobre el metal variará la situación de modo sustancial. Considerando que los electrones del metal son libres, la ecuación de movimiento para ellos puede escribirse así

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}\,\mathbf{v} \times \boldsymbol{H}_0, \tag{35.18}$$

donde $\boldsymbol{E}$ es el campo eléctrico de la onda electromagnética, $\boldsymbol{H}_0$, un campo magnético continuo y homogéneo*). Vamos a considerar que el vector de onda $\boldsymbol{k}$ del campo es paralelo al vector $\boldsymbol{H}_0$. Entonces, proyectando la ecuación de movimiento en los ejes de coordenadas, perpendiculares al vector $\boldsymbol{k}$, obtenemos dos ecuaciones escalares:

$$m\ddot{x}_1 = eE_1 + \frac{e}{c}\,\dot{x}_2 H_0 \qquad \text{y} \qquad m\ddot{x}_2 = eE_2 - \frac{e}{c}\,\dot{x}_1 H_0. \tag{35.19}$$

Lo mismo que al describir el efecto de Faraday, designemos con los índices 1 y 2 los ejes perpendiculares al vector $\boldsymbol{k}$. Multiplicando la segunda de las ecuaciones (35.19) por $\pm i$ y adicionándola a la primera de ellas, obtendremos ya no un sistema, sino que dos ecuaciones aisladas cada una de las cuales determina una de las dos magnitudes $x_\pm = x_1 \pm ix_2$, teniendo la falta de homogeneidad de dichas ecuaciones la forma $eE_\pm = e(E_1 \pm iE_2)$. Resolviéndolas, hallamos la densidad de la corriente creada por cada una de las ondas polarizadas circularmente $E_\pm$ y, a contunuación, la correspondiente constante dieléctrica:

$$\varepsilon_\pm = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_c)}, \tag{35.20}$$

donde $\omega_c = eH_0/mc$ es la frecuencia ciclotrónica. De (35.20) sigue que para $\omega < \omega_p$ a una de las ondas polarizadas circularmente corresponde el valor $\varepsilon_- < 0$. El correspondiente índice de refracción n_- es puramente imaginario y la onda de baja frecuencia con semejante polarización no puede propagarse en los metales. Por el contrario, la onda con otra poralización circular sí puede propagarse en los metales, incluso cuando $\omega < \omega_p$, pero a condición de que $\omega < \omega_c$. Con ello, $\varepsilon_+ > 1$ y el índice de refracción será una magnitud real.

En los anteriores razonamientos no tomamos en consideración la dispersión espacial y el proceso de colisión de los electrones. Las colisiones de éstos y el amortiguamiento sin colisiones de las oscilaciones tipo Landau (que se produce cuando se cumple la condición $\omega = \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{v}$) podrían conducir al rápido amortiguamiento de la onda de baja frecuencia en el metal. No obstante, si $r_H \ll l$ (donde $r_H = \mathrm{v}\omega_c^{-1}$ y l es la longitud del recorrido libre de

*) Las propiedades magnéticas de los metales son aquí despreciadas, así, pues, $\boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{B}_0$.

los electrones), $\omega_c - \omega \gg \nu$ y $kr_H \ll 1$ semejante onda de baja frecuencia resultará débilmente amortiguada. Esto se debe a que a estas condiciones las colisiones son poco sustanciales, mientras que el amortiguamiento sin colisiones será fuertemente suprimido, ya que el campo magnético, curvando la trayectoria de los electrones, obstaculizará que éstos estén tiempo prolongado en el metal en una misma fase que la onda. Las oscilaciones no amortiguadas de baja frecuencia condicionadas por la existencia del campo eléctrico en el medio, llevan el nombre de ondas electromagnéticos *helicoidales* (o espirales).

§ 36. Propagación de la radiación dura en los cristales

36.1. Ecuaciones fundamentales de la teoría de difracción de los rayos X en los metales. A frecuencias mayores de las que corresponden a la radiación ultravioleta, la longitud de la onda de la radiación se hace comparable o bien puede ser menor que la distancia a entre los átomos del medio, incluso en medios tan densos como los sólidos. Con ello surgen nuevos fenómenos físicos entre los que el de mayor importancia es la difracción de la radiación dura en los cristales.

Al investigar la propagación de la radiación dura en los cristales se debe precisar la definición de las magnitudes microscópicas y, en primer lugar, la de la constante dieléctrica. Cuando $\lambda/a \leqslant 1$ pierde el sentido la mediación de Maxwell por un volumen físicamente pequeño, es decir, por el volumen que aún contiene muchos átomos, pero cuyas dimensiones características son ya mucho menores que la longitud de onda λ. Debido a esto, cuando se describe la interacción de la radiación dura con la sustancia la mediación de las ecuaciones microscópicas de Maxwell por un volumen físicamente pequeño ya no se realiza, aunque se lleva a cabo su mediación por la asociación.

Semejante mediación también se realizaba anteriormente. La verificamos, p. ej., cuando al calcular la constante dieléctrica sustituíamos el valor preciso microscópico de la densidad de corriente j en las ecuaciones de Maxwell por su valor medio estadístico, con la particularidad de que la correspondiente función de distribución fue hallada resolviendo una ecuación cinética. Tal mediación estadística también es posible con $\lambda/a \lesssim$ $\lesssim 1$, pero en este caso el paso de (3.1) a (4.1) es imposible, ya que el núcleo de la ligazón integral entre D y E dependerá ahora no de la diferencia de las coordenadas r y r', sino que de cada una de ellas por separado. Esto está relacionado con el hecho de que los átomos en el cristal ocupan determinada posición en el espacio y hay que tener en cuenta la no homogeneidad espacial del medio a distancias $a \gtrsim \lambda$. La dependencia entre el núcleo y t y t' será, como antes, de diferencias. Así, pues, la ligazón entre D y E a frecuencias altas tiene la forma

$$D_\alpha(r, \omega) = \int dV' \varepsilon_{\alpha\beta}(r, r', \omega) E_\beta(r', \omega). \qquad (36.1)$$

Realizando la transformación de Fourier de la variable r a la k, tendremos

$$D_\alpha(k, \omega) = \int dV \int dV' \exp(-ik \cdot r)\varepsilon_{\alpha\beta}(r, r', \omega)E_\beta(r', \omega) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' \varepsilon_{\alpha\beta}(k, k', \omega)E_\beta(-k', \omega). \qquad (36.2)$$

De este modo, con altas frecuencias la ligazón entre las imágenes de Fourier del vector de la inducción eléctrica y el vector de intensidad del campo eléctrico se ha convertido en integral en el espacio de los vectores de onda. En el caso de las estructuras periódicas entre las que, en primer lugar, podemos indicar los cristales, la fórmula (36.2) puede ser detallada.

La propiedad fundamental de un cristal que debe ser tomada en consideración al determinar la constante dieléctrica, consiste en que el núcleo del operador integral en (36.1) tiene simetría traductiva:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(r, r', \omega) = \varepsilon_{\alpha\beta}(r + a, r' + a, \omega). \qquad (36.3)$$

Aquí a es la constante de la red cristalina o una magnitud múltiple a ella. Con el fin de tener matemáticamente en cuenta esta circunstancia, en (36.3), en lugar de r y r', introducimos dos nuevas variables: r_1 y r_2. Definámoslas de forma que $r_1 = r - r'$ y $r_2 = r'$. Expresando las antiguas coordenadas por las nuevas, obtenemos: $r = r_1 + r_2$ y $r' = r_2$. La invariación traductiva de (36.3) no afecta a la variable r_1, en lo que atañe a la variable r_2 el núcleo $\varepsilon_{\alpha\beta}(r_1, r_2, \omega)$ es una función periódica de período a. Tomando esto en consideración, el núcleo $\varepsilon_{\alpha\beta}(r_1, r_2, \omega)$ puede ser descompuesto en una serie de Fourier por los vectores de la red inversa*):

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(r, r', \omega) = \varepsilon_{\alpha\beta}(r_1, r_2, \omega) = \sum_g \varepsilon_{\alpha\beta}(r_1, g, \omega) \times$$

$$\times \exp(-ig \cdot r_2) = \sum_g \varepsilon_{\alpha\beta}(r - r', g, \omega) \exp(-ig \cdot r'). \qquad (36.4)$$

---

*) El sistema de vectores g de la red inversa se determina con la relación $\exp(ig \cdot a) = 1$. Aquí a es un sistema de vectores con los que puede ser construida toda la red cristalina y que son múltiples a los tres vectores principales: a_1, a_2, a_3. De la definición del sistema de los vectores g se desprende que a los tres vectores principales a_1, a_2, a_3 de la red cristalina corresponderán los tres vectores principales g_1, g_2, g_3 con ayuda de los cuales puede ser construida toda la red inversa y que pueden ser determinados del modo siguiente:

$$g_1 = 2\pi \frac{a_2 \times a_3}{V_c}, \qquad g_2 = 2\pi \frac{a_3 \times a_1}{V}, \qquad g_3 = 2\pi \frac{a_1 \times a_2}{V_c},$$

donde $V_c = a_1(a_2 \times a_3)$ es el volumen de la célula elemental de la red cristalina. En el caso de una red cúbica corriente, la red inversa también es una red cúbica corriente con la constante igual a $2\pi/a$. Si, p. ej., la red cristalina es cúbica de volumen centrado con constante a, la red inversa es cúbica de caras centradas con constante $4\pi/a$ y a la inversa.

Aquí se lleva a cabo la suma por todos los vectores g de la red inversa. De (36.4) sigue que

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(k, k', \omega) =$$
$$= \int dV' dV \exp[-i(k\cdot r + k\cdot r')] \sum_g \varepsilon_{\alpha\beta}(r - r', g, \omega) \exp(-ig\cdot r') =$$
$$= (2\pi)^3 \sum_g \varepsilon_{\alpha\beta}(k, g, \omega)\delta(k + k' + g), \qquad (36.5)$$

donde

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(k, g, \omega) = \int dV_1 \varepsilon_{\alpha\beta}(r_1, g, \omega) \exp(-ik\cdot r_1). \qquad (36.6)$$

Si en (36.5) desechamos todos los sumandos con $g \neq 0$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(k, k', \omega) = (2\pi)^3 \varepsilon_{\alpha\beta}(k, 0, \omega)\delta(k + k').$$

Sustituyendo esto en (36.2), obtenemos

$$D_\alpha(k, \omega) = \varepsilon_{\alpha\beta}(k, 0, \omega) E_\beta(k, \omega).$$

Este resultado natural corresponde a que al despreciar todos los g, salvo el nulo, responde a la transición a un medio por completo espacial-homogéneo. Cuando se trata de un cristal

$$D_\alpha(k, \omega) = \int d^3k \sum_g \varepsilon_{\alpha\beta}(k, g, \omega)\delta(k + k' + g) E_\beta(-k', \omega) =$$
$$= \sum_g \varepsilon_{\alpha\beta}(k, g, \omega) E_\beta(k + g, \omega). \qquad (36.7)$$

Esta fórmula es un caso particular de la (36.2); ella es válida en un medio discreto no homogéneo correcto. La ligazón entre D y E en el espacio de los vectores de onda no es local y este factor tiene carácter específico y refleja la periodicidad espacial del cristal.

Sustituyendo (36.7) en (28.4) obtenemos la ecuación

$$k^2 E_\alpha - k_\alpha k_\beta E_\beta = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sum_g \varepsilon_{\alpha\beta}(k, g, \omega) E_\beta(k + g, \omega), \qquad (36.8)$$

con la que pueden ser halladas la ligazón entre ω y k de la radiación en el cristal, las relaciones entre los componentes de E con distintos argumentos y, de este modo, el campo electromagnético de difracción. La ecuación (36.8) puede reescribirse en la forma

$$\left[\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2 \delta_{\alpha\beta} - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k_\alpha k_\beta - \varepsilon_{\alpha\beta}(k, 0, \omega)\right] E_\beta(k, \omega) -$$
$$- \sum_{g\neq 0} \varepsilon_{\alpha\beta}(k, g, \omega) E_\beta(k + g, \omega) = 0. \qquad (36.9)$$

Esta última expresión es un sistema de ecuaciones para la amplitud de la radiación electromagnética dura en un cristal: éstas son las ecuaciones fundamentales de la teoría de difracción del campo electromagnético en un cristal. De (36.8) sigue que en el cristal, además del campo con vector de onda $\boldsymbol{k}$, que corresponde a la radiación incidente, aparecen ondas con vectores de onda distintos de $\boldsymbol{k}$ en el número total de vectores de la red inversa. La intensidad de estas ondas no sólo depende de la intensidad, sino que también del sentido del vector $\boldsymbol{k}$ de la onda incidente. Esto lo veremos con facilidad si el vector de onda $\boldsymbol{k}'$ de una de semejantes ondas se representa del siguiente modo

$$\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{g}. \tag{36.10}$$

Ésta lleva el nombre de *ecuación de Laue*. Elevando los dos miembros de (36.10) al cuadrado y tomando en consideración que sólo las ondas de una longitud interfieren en notorio grado, de manera que $k^2 = k'^2$, obtenemos

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{g} = -\tfrac{1}{2}g^2. \tag{36.11}$$

De aquí se deduce que con el vector $\boldsymbol{g}$ prefijado, $\boldsymbol{k}$ debe tener determinado valor. Cuando el vector $\boldsymbol{k}$ ya no satisface la condición (36.11), las ondas con vectores de onda $\boldsymbol{k} + \boldsymbol{g}$ tienen una intensidad despreciablemente pequeña. De aquí se desprende que es muy posible una situación tal, cuando con el $\boldsymbol{k}$ dado en el cristal sólo surge un pequeño número de ondas, p. ej., dos o tres, con vectores de onda $\boldsymbol{k} + \boldsymbol{g}$. Estas ondas reciben el nombre de *ondas duras* o *reflejos*.

Si a los reflejos responden vectores $\boldsymbol{g}$ paralelos al límite de separación cristal — vacío sobre el que incide la radiación se habla de la *difracción de Laue*. Otro caso límite corresponde a los vectores $\boldsymbol{g}$ perpendiculares al límite de separación. Aquí tropezamos con la *difracción de Bragg*.

La ecuación de Laue se escribe con frecuencia en forma algo distinta. Designando el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{k}'$ con la letra θ, de (36.10) obtenemos

$$g = 2k \operatorname{sen}(\theta/2). \tag{36.12}$$

Semejante forma de anotación de la ecuación de Laue lleva el nombre *de Bragg — Woolf*.

36.2. Aproximaciones cinemática y dinámica en la teoría de difracción de los rayos X. Para simplificar examinemos la difracción de los rayos X en una red cúbica. En dicha red los tensores de segundo rango se reducen a escalares, así que en la ecuación (36.9) $\varepsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, 0, \omega)$ y $\varepsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{g}, \omega)$ pueden omitirse los signos tensoriales. Si nos limitamos a un solo reflejo duro, el sistema de ecuaciones fundamentales tomará el aspecto

$$\begin{aligned} \hat{\xi}(\boldsymbol{k})E(\boldsymbol{k}) - \varepsilon(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{g})E(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{g}) = 0, \\ \hat{\xi}(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{g})E(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{g}) - \varepsilon(\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{g})E(\boldsymbol{k}) = 0. \end{aligned} \tag{36.13}$$

Aquí

$$\hat{\xi} = \left[\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2 \delta_{\alpha\beta} - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k_\alpha k_\beta - \varepsilon(k, 0, \omega)\right]. \qquad (36.14)$$

La aproximación en la que figuran la onda incidente y un reflejo suele llamarse *de dos ondas*. En esta aproximación sólo hay un vector de la red inversa sustancial para el problema. Si despreciamos por completo el fenómeno de la difracción, (36.13) adquirirá la forma

$$\hat{\xi}(k)E(k) = 0.$$

Los reflejos de difracción pueden ser fuertes (lo que significa que la intensidad de cada uno de ellos es comparable con la de la onda incidente) y débiles. En el último caso, el sistema de ecuaciones (36.13) puede resolverse del modo siguiente. De (36.13) excluyamos el campo $E(k + g)$. La ecuación para $E(k)$ que obtendremos será

$$\hat{\xi}(k)E(k) - \xi^{-1}(k + g)\varepsilon(k, -g, \omega)\varepsilon(k, g, \omega)E(k) = 0. \qquad (36.15)$$

La debilidad del reflejo significa la pequeñez del segundo sumando en esta ecuación. Tomemos que $E(k) = E^{(0)}(k) + E^{(1)}(k)$, donde $E^{(1)}(k)$ es una corrección de primer orden condicionada por la existencia de la difracción. $E^{(0)}(k)$ satisface la ecuación $\hat{\xi}(k)E^{(0)}(k) = 0$. Por lo tanto

$$E^{(1)}(k) = \xi^{-1}(k + g)\varepsilon(k, -g, \omega)\varepsilon(k, g, \omega)E^{(0)}(k).$$

Haciendo ahora uso de la primera de las ecuaciones (36.13), obtenemos

$$E(k + g) = \frac{1}{\varepsilon(k, g, \omega)}\hat{\xi}(k)E^{(1)}(k) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon(k, g, \omega)}\hat{\xi}(k)\hat{\xi}^{-1}(k + g)\varepsilon(k, -g, \omega)\varepsilon(k, g, \omega)E^{(0)}(k). \qquad (36.16)$$

Esta fórmula expresa la amplitud del campo que condicionó el reflejo, por intermedio de la amplitud del campo incidente. Semejante *aproximación* en la que la amplitud $E(k + g)$ se considera pequeña en comparación con $E(k)$ recibe el nombre *de cinemática*.

Si el reflejo es fuerte la intensidad de las ondas con vectores de onda k y $k + g$ pueden ser comparadas por el orden de su valor, y la amplitud $E(k)$ ya no es obligatoriamente próxima por su valor a la amplitud del campo incidente. El sistema de ecuaciones (36.13) es conjunto si se anula el determinante formado de los coeficientes antes de las magnitudes desconocidas $E(k)$ y $E(k + g)$. La ecuación obtenida de este modo es de dispersión y enlaza ω con k. El sumando fundamental en ξ es cuadrático respecto de k, por lo que la ecuación de dispersión es cuadrática con relación a k^2. Por consiguiente, a una misma frecuencia corresponden dos valores distintos

de k^2, así que la solución de (36.13) puede presentarse en la forma

$$E = A_1\{E(k_1)\exp[i(k_1 r - \omega t)] + E(k_1 + g)\exp[i(k_1 + g)r - \omega t]\} + \\ + A_2\{E(k_2)\exp[i(k_2 r - \omega t)] + E(k_2 + g) \times \\ \times \exp[i(k_2 + g)r - \omega t]\}. \qquad (36.17)$$

Las amplitudes $E(k_1), E(k_1 + g), E(k_2), E(k_2 + g_2)$ son obtenidas sustituyendo en (36.13) las raíces de la ecuación de dispersión que fueron designadas con los símbolos k_1 y k_2. Los coeficientes A_1 y A_2 se hallan de la condición de fijación en la superficie del cristal de la solución de (36.17) con la onda incidente del vacío. De este modo, la onda que incide del vacío sobre el cristal genera en el medio (con aproximación de dos ondas) cuatro ondas planas con diferentes vectores de onda. La teoría en la que el sistema (36.13) se resuelve sin la suposición de la pequeñez de las amplitudes de las ondas reflejadas, recibe el nombre de *teoría dinámica de difracción.*

Las magnitudes ε en las ecuaciones (36.13), hablando en general, son complejas, lo que acarrea que k_1 y k_2 también lo sean. La parte imaginaria en k_1 o bien k_2 describe el amortiguamiento en el cristal de la radiación de rayos X, con la particularidad de que $\mathrm{Im}\, k_1 \neq \mathrm{Im}\, k_2$, por ello diversas ondas en (36.17) se amortiguan de distinto modo.

El amortiguamiento anormalmente pequeño de ciertas ondas lleva el nombre de *efecto Borman.* La aportación fundamental en ε en el intervalo de frecuencias de rayos X se introduce por la polarización de los electrones y en el caso de la radiación γ se hace notoria la polarización de los núcleos cerca de las transiciones de Mössbauer.

36.3. Sección de la dispersión difractiva de los rayos X en cristales de volumen finito. La teoría cinemática de difracción se emplea, ante todo, durante la descripción de la dispersión de las ondas de rayos X en cristales de volumen relativamente pequeño. Qué es lo que debemos entender por semejante volumen, será precisado al final de este parágrafo. Cuando transcurre la dispersión difractiva de los rayos X en pequeños cristales es de sustancial interés la determinación del campo no en el interior del cristal, como durante la difracción dinámica en cristales gruesos, sino el campo en el vacío fuera del cristal, a gran distancia de él. Entonces, el planteamiento del problema de difracción recuerda el problema corriente de la dispersión de las ondas magnéticas en pequeños objetos, cuando dicha dispersión se describe con comodidad mediante el concepto de la sección eficaz de dispersión.

Fuera del cristal podemos hallar el campo fijando la expresión obtenida en el p. 36.2 para el vector E dentro del cristal con las correspondientes soluciones en el vacío a la entrada de la onda en el cristal y la salida de ésta de él. Sin embargo, prácticamente, es más cómodo escribir la ecuación para el campo que contenga el vector D de forma que una misma ecuación lo describa tanto en el cristal, como en el vacío.

De las dos primeras ecuaciones de Maxwell

$$\operatorname{rot} E = i\frac{\omega}{c}B \qquad \text{y} \qquad \operatorname{rot} B = \frac{4\pi}{c}j - i\frac{\omega}{c}E$$

obtenemos

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} E = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E - \frac{4\pi e^2 n(r)}{mc^2}E,$$

donde $n(r)$ es la densidad local de los electrones en el cristal (los núcleos pueden no tenerse en cuenta debido a su gran masa). Introduzcamos la designación

$$\varepsilon(r) = 1 - \frac{4\pi n(r)e^2}{m\omega^2}.$$

Entonces, la ecuación para el campo será

$$-\Delta E + \operatorname{grad}\operatorname{div} E = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 D, \tag{36.18}$$

donde $D(r, \omega) = \varepsilon(r, \omega)E(r, \omega)$. Así, pues, $E = D + \frac{4\pi ne^2}{m\omega^2}E$. Sustituyendo esta última relación en el primer miembro de la fórmula (36.18), ella tomará la forma

$$-\Delta D + \operatorname{grad}\operatorname{div} D + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{4\pi ne^2}{m\omega^2}E = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 D.$$

Vamos a agrupar los sumandos que contienen D en el primer miembro de la ecuación y a tomar en consideración que $\operatorname{div} D = 0$. Por eso, tendremos

$$\Delta D + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 D = \frac{4\pi e^2}{m\omega^2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}[n(r)E]. \tag{36.19}$$

Con las frecuencias características para la radiación X, el valor de $\varepsilon(r)$ ya es tan próximo a la unidad que la magnitud $4\pi ne^2/m\omega^2$ puede considerarse como parámetro pequeño. Por esta razón, en el segundo miembro de (36.19) en lugar del valor preciso del vector E puede ponerse la intensidad del campo sólo de la onda incidente. Es posible hacer esto debido al carácter cinemático de la difracción cuando la aportación en E, condicionada por ella, es mucho menor que el campo de la onda incidente. De acuerdo con esto, podemos considerar que el segundo miembro de (36.18) es conocido.

Al resolver (36.19) con semejante segundo miembro, puede ser hallado el campo E de la onda dispersa como resultado de la difracción fuera del cristal y a gran distancia de él. Tal género de ecuaciones de onda, con segundo miembro prefijado, ya fue estudiado en la primera parte del libro,

donde mostramos que es posible escribir la solución de (36.19) del modo siguiente.

$$D(r) = -\frac{4\pi e^2}{m\omega^2}\int G_k^R(r, r')\,\mathrm{rot}'\,\mathrm{rot}'\,[n(r')E(r')]d^3r',$$

con la particularidad de que la función de Green de la ecuación de onda (véase (32.20), P. I)

$$G_k^R(r, r') = \frac{1}{4\pi|r - r'|}\exp(ik'|r - r'|).$$

Aquí $k' = \omega/c$. Por consiguiente, en el vacío, a gran distancia del cristal, la intensidad del campo eléctrico de la onda dispersa debido a la difracción, será

$$E(r) = \frac{e^2\exp(ik'r)}{m\omega^2 r}[k' \times [k' \times E_0]]\int d^3r'n(r')\exp(i(k - k')r'). \quad (36.20)$$

Aquí hemos elegido el origen de coordenadas dentro del cristal; E_0 es la amplitud del campo incidente; k', el vector de onda de la onda dispersa debido al proceso de difracción. El módulo de este vector $k' = k$, es decir, se supone que la difracción no se acompaña de la variación de la frecuencia de la radiación dispersa. El exponente en la función de Green al pasar a la (36.20) se descompone en una serie por las potencias de la pequeña magnitud r'/r, como hicimos en la P. I para describir la radiación dipolar, cuadripolar y magnetodipolar.

El módulo del vector de Poynting de la onda

$$\gamma = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{e^2}{m\omega^2}\right)^2\frac{E_0^2}{r^2}\,\mathrm{sen}^2\theta\left|\int d^3r'n(r')\exp[i(k - k')\cdot r']\right|^2,$$

por lo que la sección eficaz diferencial de dispersión en el elemento del ángulo sólido $d\Omega'$

$$d\sigma = \frac{\gamma r^2 d\Omega'}{(c/4\pi)|E_0|^2} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\mathrm{sen}^2\theta \times$$
$$\times \left|\int d^3r'n(r')\exp[i(k - k')r']\right|^2 d\Omega'. \quad (36.21)$$

Aquí θ es el ángulo entre los vectores E_0 y k'. La magnitud e^2/mc^2 es el radio clásico del electrón. Es evidente que el determinado parecido de esta fórmula con la Thomson (véase el § 40, P. I) para la sección diferencial de dispersión de las ondas electromagnéticas en una carga puntual libre. Al deducir (36.21) considerábamos que la radiación X estaba polarizada linealmente. Durante la dispersión de una radiación no polarizada, lo mismo que para la dispersión thomsoniana, el factor $\mathrm{sen}^2\theta$ en (36.21) debe sustituirse por $\frac{1}{2}(1 + \cos^2\vartheta)$, donde $\vartheta = \widehat{k_1 k'}$.

Cuando el cristal es regular la densidad electrónica $n(r)$ puede desarrollarse en una serie por los vectores de la red inversa, de manera análoga a como lo hicimos en el p. 36.1 con la magnitud $\varepsilon_{\alpha\beta}(r, r', \omega)$. Sustituyendo el desarrollo

$$n(r) = \sum_g n(g) \exp(ig \cdot r)$$

en (36.11), obtenemos

$$d\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1 + \cos^2\vartheta) \left| \sum_g n(g) \int \exp[-i(k - k' + g) \cdot r'] d^3r' \right|^2 d\Omega'. \tag{36.22}$$

Aquí y en adelante, la radiación incidente será considerada no polarizada. De (36.22) se deduce de inmediato que en aquellos casos cuando $k - k' + g = 0$, o sea, al realizarse la condición (36.10), en la sección surgen resonancias. Éstos son los reflejos de difracción. Si el cristal fuera infinito, $d\sigma$ también se reduciría a la infinidad. Con todos los demás valores de k y k' la sección de dispersión es muy próxima a cero. De este modo, la radiación difractante en un cristal regular forma un sistema de reflejos, con la particularidad de que a medida que cada reflejo se aleja la intensidad de la radiación dispersa decrece con gran rapidez y la interferencia de ésta, ligada con diversos reflejos, es insignificante. Por ello, el elemento del ángulo sólido siempre puede elegirse de manera que dentro de él sólo haya un reflejo e incluso, parte de éste. Teniendo esto en cuenta, la fórmula (36.22) será escrita

$$d\sigma_g = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1 + \cos^2\vartheta) |n(g)|^2 \left| \int \exp[i(k - k' + g) \cdot r'] \times \right.$$
$$\left. \times d^3r' \right|^2 d\Omega'_g. \tag{36.23}$$

para cada reflejo aislado ligado con el vector g dado de la red inversa.

En el caso de un cristal infinito la integral por el volumen en (36.23) se reduce a la función delta de la forma $(2\pi)^3\delta(k - k' + g)$. Esto quiere decir que el campo electromagnético que crea los reflejos está concentrado en ángulos sólidos extremadamente estrechos y tiene en estos ámbitos del espacio intensidad muy alta, mayor que la del campo incidente. Por consiguiente, en los márgenes del enfoque cinemático, es posible examinar la difracción en cristales de volumen finito. Entonces

$$\int \exp[i(k - k' + g) \cdot r] d^3r' \approx V\delta_{k - k', g}, \tag{36.24}$$

y (36.23) tomará la forma

$$d\sigma_g \approx \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1 + \cos^2\vartheta) |n(g)|^2 V^2 d\Omega'_g. \tag{36.25}$$

De este modo, la sección de dispersión que se refiere al centro del reflejo o bien, como suele decirse, en posición exacta de reflexión, ha resultado ser proporcional al cuadrado de volumen V del cristal. Esta proporcionalidad es rasgo de la coherencia del proceso de dispersión de la onda en todos los átomos que constituyen el cristal, para el que transcurre la suma de las amplitudes, y no de las secciones de dispersión en átomos por separado.

Para la desviación de la posición exacta de reflexión la intensidad de la dispersión decrece, en tanto que la dependencia de la sección y del volumen del cristal es intermedia entre V^2 y V. Con el sentido fijado del vector $\boldsymbol{k}$ de la onda incidente, vamos a designar el vector $\boldsymbol{k}'$ de la onda dispersa, correspondiente a la posición exacta de reflexión, mediante el símbolo $\boldsymbol{k}'_s$. De acuerdo con la ecuación de Laue $\boldsymbol{k}'_s = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{g}$. La desviación del vector $\boldsymbol{k}'$ de la posición exacta de reflexión será designada con $\Delta\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}'_s$. Escribamos la expresión para el elemento del ángulo sólido $d\Omega' = \operatorname{sen}\chi' d\chi' d\alpha'$ en la que el ángulo polar χ' se cuenta desde el sentido de $\boldsymbol{k}'_s$ de la posición exacta de reflexión. Como el módulo del vector $\boldsymbol{k}'$ no depende de su sentido, tiene lugar la fórmula

$$\Delta k'/2k' = \operatorname{sen}\chi'/2 = \sqrt{(1 - \cos\chi')/2}. \tag{36.26}$$

La diferenciación de (36.26) proporciona

$$\Delta k' d(\Delta k')/k'^2 = \operatorname{sen}\chi' d\chi'.$$

Por consiguiente,

$$d\Omega' = \operatorname{sen}\chi' d\chi' d\alpha' = \frac{d\alpha'}{k^2}\Delta k' d(\Delta k') = \frac{1}{k^2} d(\Delta k'_x) d(\Delta k'_y). \tag{36.27}$$

Los ejes x' e y' yacen en el plano perpendicular al sentido de $\boldsymbol{k}'_s$. Haciendo uso de estas designaciones (36.23) se escribe

$$d\sigma_{g,\Delta k'} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1 + \cos^2\vartheta)|n(g)|^2 \left|\int d^3r' \times \right.$$

$$\left. \times \exp(-i\Delta\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}')\right|^2 \frac{1}{k^2} d(\Delta k'_x) d(\Delta k'_y). \tag{36.28}$$

La integral por el volumen en (36.28)

$$\int d^3r' \exp(-i\Delta\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}') = \int dz' dx' dy' \exp[-i(\Delta k'_x x' + \Delta k'_y y')],$$

ya que $\Delta k'_z \ll \Delta k'_x, \Delta k'_y$. Así que esta integral se simplifica:

$$\int d^3r' \exp(-i\Delta\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}') = \int dx' dy' L_z(x', y') \times$$
$$\times \exp[-i(\Delta k'_x \cdot x' + \Delta k'_y \cdot y')]. \tag{36.29}$$

La magnitud $L_z(x', y')$ es el vector lineal del cristal a lo largo de z dirigido por $\boldsymbol{k}'_s$. La fórmula (36.28), teniendo en cuenta (36.29), proporciona la variación de la sección de dispersión difractiva en el entorno de la posición exacta de reflexión.

La fórmula (36.28) se puede integrar por todo el entorno del sentido de k_s'. Con este fin debe utilizarse una relación del tipo de la que fue obtenida en la P. I al hallar la densidad espectral de la radiación dipolar y que en nuestro caso toma la forma

$$\int \frac{d(\Delta k_x)d(\Delta k_y)}{(2\pi)^2} \left| \int dx'dy' L_z(x', y') \exp\left[-i(\Delta k'_x x' + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \Delta k'_y y')\right]\right|^2 = \int dx'dy' L_z^2(x', y'). \qquad (36.30)$$

Tomando en consideración la última relación, obtenemos

$$\int d\sigma_g = \frac{2\pi^2}{k^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1 + \cos^2\vartheta)|n(g)|^2 \int dx'dy' L_z^2(x', y'). \qquad (36.31)$$

El valor de la integral es en esta fórmula del orden de L^4, de manera que (36.31) es proporcional a $V^{4/3}$. El carácter de la dependencia $\int d\sigma_g$ del volumen nos indica la notoria aportación en dicha sección de los procesos que sólo con aproximación pueden considerarse coherentes.

En conclusión determinemos qué cristal es posible tomar como suficientemente pequeño para que la difracción en él sea descrita en los márgenes de la teoría cinemática. La difracción será cinemática si $\int d\sigma_g \ll L^2$, de donde obtenemos

$$\frac{1}{k}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)|n(g)|L^2 \ll 1.$$

36.4. Efectos térmicos durante la difracción de los rayos X. Las vibraciones térmicas de los átomos de la red del cristal conducen a la perturbación de la periodicidad regular de la densidad electrónica local. A su vez, esto lleva a dos efectos fundamentales.

Primero, al crecer la temperatura disminuye la intensidad de la dispersión de la radiación electromagnética dura en la posición exacta de reflexión y, debido a esto, se produce un brusco decrecimiento de la intensidad de los reflejos, a los que corresponden muy grandes valores de g.

Segundo, surge una notoria dispersión de la radiación en las direcciones lejos de los reflejos, lo que acarrea la aparición de un fondo disperso difuso. La dispersión difusa está ligada con un proceso no coherente (y, por lo tanto, lineal por V) condicionado por la interacción de la radiación incidente con las fluctuaciones de la densidad electrónica. En la sección de la dispersión difusa aparece un factor proporcional a la temperatura del cristal. Una dependencia de temperaturas mucho más notable tiene la difracción en la región de los reflejos.

La existencia de vibraciones térmicas en la red cristalina puede ser tomada en consideración representando la densidad electrónica local del siguiente modo

$$n(r) = \sum_l n_a(r - r_l), \qquad (36.32)$$

donde la suma se toma por las posiciones de todos los átomos con coordenadas r_l. Si los átomos no sufrieran vibraciones térmicas, todas las r_l serían iguales a los vectores l que describen la posición de los átomos en la red regular. Al haber vibraciones ella se describiría mediante los vectores $r_l = l + u_l$, donde u_l es el vector del desplazamiento de la posición del l-ésimo átomo de la de equilibrio. Como ahora la función $n(r)$ no posee periodicidad regular, ella debe ser desarrollada no en una serie por los vectores de la red inversa, sino en una integral de Fourier. La imagen de Fourier de la función $n(r)$

$$n(q) = \frac{1}{V}\int n(r)\exp(-iq\cdot r)d^3r =$$

$$= \frac{1}{V}\sum_l \int d^3r n_a(r - l - u_l)\exp(-iq\cdot r) =$$

$$= \frac{1}{V}\sum_l \exp[-iq(l + u_l)]\int d^3r n_a(r - l - u_l)\ \exp[-iq(r - l - u_l)]. \tag{36.33}$$

La magnitud

$$\int d^3r n_a(r - l - u_l)\exp[-iq(r - l - u_l)] = n_a(q) \tag{36.34}$$

es la imagen de Fourier de la densidad electrónica condicionada por cada átomo aislado; en la teoría de difracción ella lleva el nombre de *factor (coeficiente) atómico*. Del índice l el factor atómico no depende, ya que la integral en (36.34) se toma por todo el espacio. De ese modo

$$n(q) = n_a(q)\sum_l \exp[-iq(l + u_l]. \tag{36.35}$$

El factor atómico $n_a(q)$ en el segundo miembro de (36.35) se multiplica por la suma por l que recibe el nombre de *factor estructural*. Si todos los $u_l = 0$ ese factor toma la forma

$$\sum_l \exp(-iq\cdot l) = N\delta_{q,g},$$

es decir, $n(q) \neq 0$ sólo cuando el vector q es igual a uno de los vectores g de la red inversa. Teniendo en cuenta que al haber vibraciones térmicas de la red $q \neq g$, de este modo se tomará en consideración el efecto de difuminación de los reflejos, pero si en (36.35) hacemos $q = g$ será descrito el efecto de disminución de la sección de la dispersión difractiva en la posición exacta de reflexión a expensas de las vibraciones térmicas.

Describamos las vibraciones térmicas de la red representando el vector u_l en el aspecto

$$u_l = \sum_p (U_p\exp(ip\cdot l) + U_p^*\exp(-ip\cdot l)). \tag{36.36}$$

La presencia en esta fórmula de dos sumandos asegura el carácter real de los vectores u_l. Teniendo en cuenta (36.36) el factor estructural tendrá la forma (para $q = g$)

$$\sum_l \exp\{-ig[l + \sum_p (U_p \exp(ip\cdot l) + U_p^* \exp(ip\cdot l))]\} =$$

$$= \sum_l \prod_p \exp\{-ig[U_p \exp(ip\cdot l) + U_p^* \exp(-ip\cdot l)]\}. \qquad (36.37)$$

Los exponentes en la última fórmula pueden ser desarrollados por las potencias de las pequeñas magnitudes U_p:

$$\exp\{-ig[U_p \exp(ip\cdot l) + U_p^* \exp(-ip\cdot l)]\} \approx$$

$$\approx 1 - ig[U_p \exp(ip\cdot l) + U_p^* \exp(-ip\cdot l)] - \frac{1}{2} |g\cdot U_p|^2 \ldots \qquad (36.38)$$

Ahora el factor estructural debe mediarse por las vibraciones térmicas de la red de acuerdo con la función de distribución. La media de los sumandos en (36.38) lineales por U no proporciona aportación en la difracción elástica, en tanto que la aportación de $|g\cdot U_p|^2$ es una magnitud finita, de manera que después de la suma de la serie (36.38) y su sustitución en la expresión para el factor estructural, obtenemos el multiplicador

$$\exp(-W) = \exp\left\{-\sum_p \langle \tfrac{1}{2} |g\cdot U_p|^2 \rangle\right\}, \qquad (36.39)$$

llamado *factor de Debye — Waller*. En esta expresión los paréntesis $\langle \ldots \rangle$ son símbolo del promedio por las vibraciones de la red.

Así, pues, en la sección de dispersión de los rayos X en la posición exacta de reflexión, obtenida en el p. 36.3 para el caso de un cristal regular, teniendo en cuenta la temperatura final, la magnitud $|n(g)|$ debe sustituirse por el factor

$$\frac{n_a(g)}{v_c} \exp(-W), \qquad (36.40)$$

en el que v_c es el volumen de la célula elemental. En (36.40) la magnitud W es tanto mayor cuanto mayor sea el vector de la red inversa g al que corresponde el reflejo que consideramos, así que los reflejos de mayor intensidad serán aquellos que responden a pequeños g. La magnitud W también depende de la temperatura T. Esta dependencia tiene la forma más sencilla a altas temperaturas, con la particularidad de que, precisamente, en tal caso es singularmente importante tener en cuenta el factor de Debye — Waller. A altas temperaturas la energía media $\overline{\mathscr{E}}_p$ de las vibraciones de la red, que corresponde a U_p, tiene el orden de la magnitud T. Por lo tanto

$$T \approx \sum_p NM\omega_p^2 |U_p|^2,$$

donde M es la masa de los átomos que constituyen la red (se supone que la célula elemental sólo contiene un átomo). De la fórmula aducida sigue que

$$|U_p|^2 \approx \frac{T}{NM\omega_p^2},$$

así, pues,

$$\left\langle |g \cdot U_p|^2 \right\rangle \approx \frac{g^2 T}{N^2 M^2 \omega_p^4} \approx \frac{g^2 T}{M\Theta_D^2}, \tag{36.41}$$

donde Θ_D es la temperatura de Debye (como la temperatura T se mide en unidades energéticas). O sea, que a temperaturas altas la existencia del factor de Debye — Waller acarrea dependencia de la temperatura de la intensidad del reflejo difractivo que tiene el aspecto

$$\exp\left(-\frac{g^2 T}{M\Theta_D^2}\right) \tag{36.42}$$

que describe la rápida disminución de la intensidad de la difracción cinemática a $T > \Theta_D(M\Theta_D/g^2)$.

Capítulo V. Radiación de ondas electromagnéticas por partículas rápidas en medios

§ 37. Radiacion de las partículas rápidas en un medio espacial-homogéneo

37.1. Descripción de las pérdidas de energía de partículas rápidas no relativistas en una sustancia en los márgenes del formalismo dieléctrico. Se ha adoptado llamar rápidas aquellas partículas, cuya velocidad es mucho mayor que las características velocidades de las cargas que componen la sustancia. P.ej., podemos considerar rápido a un electrón que durante su movimiento por un metal cuya velocidad v_p es mucho mayor que la de los electrones del metal v_F en la superficie de Fermi. El cumplimiento de este requisito da la posibilidad de considerar las pérdidas de energía ΔE magnitudes relativamente pequeñas y continuas. En tanto que la pérdida de energía ΔE sigue siendo pequeña en comparación con la energía inicial de la partícula rápida E_p, con la primera aproximación, podemos despreciar la influencia de las pérdidas de energía e impulso de la partícula rápida sobre la velocidad y la trayectoria de su movimiento.

Hablando en general, en las pérdidas de energía introducen su aportación las colisiones tanto con impulsos transmitidos pequeños, como con los relativamente grandes. Como veremos, las colisiones del primer tipo corresponden a la excitación en la sustancia de tales estados que están liga-

dos con el movimiento simultáneo de muchas partículas del medio. Semejantes movimientos colectivos que abarcan volúmenes mayores que el atómico, pueden ser descritos de modo natural con ayuda de la constante dieléctrica. Es asimismo posible describir las colisiones con gran transmisión del impulso en los márgenes del formalismo dieléctrico, pero en tal caso aparece una constante dieléctrica del tipo de la que se emplea en la teoría de propagación de las radiaciones duras, de rayos X y gamma en la sustancia y que está ligada con el promedio de las ecuaciones de electrodinámica por volúmenes físicamente pequeños.

En realidad, es más cómodo examinar tales colisiones describiendo la respuesta del sistema al campo electromagnético de una partícula rápida directamente con ayuda de las ecuaciones de mecánica (con frecuencia de la mecánica cuántica), sin introducir la constante dieléctrica en forma explícita. Por dicha razón, ellas no serán estudiadas en este capítulo. También vamos a suponer que son aditivas las aportaciones en las pérdidas específicas de energía a cuenta de las colisiones con pequeña transmisón del impulso y de las colisiones con transmisión de un gran impulso (estas últimas son a veces llamadas colisiones *a pares* o de *dos partículas*). Semejante aditividad permite propiamente estudiarlas por separado. En verdad ellas pueden ser o no aditivas en función de la estructura y los parámetros del medio. En el último caso, la descripción de los procesos de pérdida de energía de una partícula rápida se complica bruscamente.

De las dos primeras ecuaciones de Maxwell en un medio sigue que

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} E + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\mathscr{D}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial j_{\text{ext}}}{\partial t}. \tag{37.1}$$

La imagen de Fourier de esta ecuación tiene la forma

$$\left(k^2\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\alpha\beta}\right)E_\beta = \frac{4\pi i\omega}{c^2}(j_{\text{ext}})_\alpha. \tag{37.2}$$

Como la partícula rápida en movimiento crea corriente

$$j_{\text{ext}}(r, t) = e\mathbf{v}_p\delta(r - \mathbf{v}_p t),$$

la imagen de Fourier de esta magnitud

$$j_{\text{ext}}(k, \omega) = \frac{e\mathbf{v}_p}{(2\pi)^4}\int dV \int dt \exp[-i(k\cdot r - \omega t)] \times$$

$$\times\ \delta(r - \mathbf{v}_p t) = \frac{e\mathbf{v}_p}{(2\pi)^4}\delta(\omega - k\cdot\mathbf{v}). \tag{37.3}$$

Teniendo en cuenta que

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(k, \omega) = \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)\varepsilon^{\text{tr}}(k, \omega) + \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\varepsilon^{l}(k, \omega),$$

es posible dar a (37.2) la forma

$$\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^l(k,\omega)\frac{k(kE)}{k^2} - \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{tr}(k,\omega)\right]\times$$

$$\times\left[E - \frac{k(kE)}{k^2}\right] = -\frac{4\pi i\omega}{c} j_{ext}(k,\omega). \tag{37.4}$$

En esta ecuación la incógnita es el campo eléctrico E. Entra en (37.4) tanto directamente, como en forma del producto escalar $k\cdot E$. Con el fin de eliminar de esta ecuación la combinación $k\cdot E$, multipliquemos de modo escalar (37.4) por k, obteniendo

$$\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^l(k,\omega)(k\cdot E) = -\frac{4\pi i\omega}{c} k\cdot j_{ext}(k,\omega)$$

de manera que el producto $k\cdot E$ resulta expresado mediante la imagen de Fourier de la densidad de corriente de la partícula rápida:

$$k\cdot E = -\frac{4\pi ic}{\omega\varepsilon^l} k\cdot j_{ext}(k,\omega). \tag{37.5}$$

Ahora, poniendo (37.5) en (37.4) llegamos a la ecuación en la que E se hallará directamente y no como la combinación con k. De esta ecuación obtendremos

$$E_\alpha(k,\omega) = -\frac{4\pi i\omega}{k^2}\left\{\frac{k_\alpha k_\beta}{\omega^2\varepsilon^l(k,\omega)} - \right.$$

$$\left. - \frac{k^2(\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta/k^2)}{c^2\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{tr}(k,\omega)\right]}\right\}[j_{ext}(k,\omega)]_\beta. \tag{37.6}$$

Realizando ahora la transformación inversa de Fourier, obtenemos

$$E(r,t) = -\frac{4\pi ie}{(2\pi)^3}\int d^3k\,\frac{\exp[i(k\cdot r - k\cdot v_p t)]}{k^2}\left\{\frac{k}{\varepsilon^l(k,k\cdot v_p)} - \right.$$

$$\left. - \frac{k^2(k\cdot v_p)[v_p - k(k\cdot v_p)/k^2]}{c^2\left[k^2 - \frac{(k\cdot v_p)^2}{c^2}\varepsilon^{tr}(k,k\cdot v_p)\right]}\right\}. \tag{37.7}$$

Tomando el valor de E en el punto donde se halla la partícula rápida, o sea, en el punto $r = v_p t$ y hallando las pérdidas de energía de la partícula por la unidad de longitud de su recorrido con la fórmula

$$\frac{d\mathscr{E}}{dx} = \frac{e(v_p\cdot E)}{v_p},$$

obtenemos

$$\frac{d\mathscr{E}}{dx} = \frac{ie^2}{2\pi^2 v_p}\int d^3k\,\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_p}{k^2}\left\{\frac{1}{\varepsilon^l(k,\omega)} - \frac{k^2\left[v_p^2 - \dfrac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_p)^2}{k^2}\right]}{c^2\left[k^2 - \dfrac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_p)^2}{c^2}\,\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_p)\right]}\right\} \tag{37.8}$$

Introduciendo las designaciones

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_p = \omega \quad \text{y} \quad k^2 - \omega^2/v_p^2 = q^2$$

pasamos de las antiguas variables de integración, k y $\cos(\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{v}_p})$, a las nuevas, q y ω. Entonces, la fórmula (37.8) toma la forma

$$\frac{d\mathscr{E}}{dx} = \frac{ie^2}{\pi v_p^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,\omega \int_0^{\infty}\frac{dq\,q}{q^2 + \omega^2/v_p^2}\left\{\frac{1}{\varepsilon^l(\omega, \sqrt{q^2 + \omega^2/v_p^2})} - \right.$$

$$\left. - \frac{v_p^2}{c^2}\,\frac{q^2}{q^2 + \omega^2[1/v_p^2 - (1/c^2)\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega, \sqrt{q^2 + \omega^2/v_p^2})]}\right\}. \tag{37.9}$$

37.2. Frenado de una partícula rápida a cuenta de la emisión de plasmones volumétricos. Examinemos la primera parte de la fórmula (37.9) que sólo contiene la constante dieléctrica longitudinal:

$$\frac{d\mathscr{E}_{\mathrm{I}}}{dx} = \frac{ie^2}{\pi v_p^2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,\omega \int_0^{\infty}\frac{dq\,q}{q^2 + \omega^2/v_p^2}\,\frac{1}{\varepsilon^l(\omega, \sqrt{q^2 + \omega^2/v_p^2})}. \tag{37.10}$$

Para que podamos tomar las integrales en (37.10) hay que conocer la forma de la función $1/\varepsilon^l(\omega, \sqrt{q^2 + \omega^2/v_p^2})$. De ordinario, ésta es una función que debe obtenerse de la consideración microscópica y que puede tener propiedades analíticas bastante complicadas. Pero si hablamos del carácter general de esta magnitud como función de q, siendo pequeñas q ella depende débilmente de q, a continuación, para el aumento posterior de q, disminuye bruscamente a causa del crecimiento rápido de la parte imaginaria de ε^l. Uno de los mecanismos que fue examinado en el cap. IV y actúa en el plasma y los medios cuasiplásmicos (p. ej., en los metales), asegurando tal brusco aumento del integrando de (37.10) al crecer q, es el mecanismo de amortiguamiento de Landau. En el caso de un gas electrónico no degenerado, el crecimiento exponencial de $(\varepsilon^l)''$ al aumentar el vector de onda se desprende de modo directo de (33.10).

Con el posterior crecimiento de q, cuando éste se hace mayor que el radio inverso de apantallamiento de Debye, el integrando de la integral por q puede de nuevo crecer. Con esto, es posible una serie de máximos uno de

los cuales puede ser condicionado por colisiones elásticas a pares (en particular si el medio es un plasma bastante enrarecido) de una partícula rápida con las partículas que constituyen la sustancia y los otros, por la excitación de transiciones electrónicas en los átomos. Al estudiar estas últimas, hablando en general, hay que hacer uso de la función ε^l calculada partiendo de la teoría cuántica.

Las colisiones a pares son posibles de describir mediante la función ε^l para grandes valores del vector de onda y sin tomar en consideración los efectos cuánticos. Pero con ello no se puede hacer uso de las fórmulas del § 33, ya que en él fue empleado un procedimiento de cálculo de ε^l basado en el uso de la ecuación cinética. En ella, la función de distribución describía la respuesta del medio al campo exterior, con la particularidad de que en el término de colisiones dicho campo no entra de manera explícita. Con grandes valores del vector de onda, que corresponden a las colisiones a pares de una partícula rápida con las del medio, los cálculos de ε^l requieren tener en cuenta el término de colisiones en la ecuación cinética en tal forma que el campo E entre directamente en dicho término.

Por regla, las pérdidas de energía de las partículas no relativistas, condicionadas por colisiones colectivas (como veremos más abajo a semejantes procesos corresponden pequeños q) y los procesos relacionados con grandes q, son de un mismo orden. En una serie de casos, las colisiones colectivas introducen la mayor aportación en las pérdidas de energía; p.ej., así sucede durante el movimiento de los electrones con energías de centenares y miles de electronvoltios por los sólidos.

En este parágrafo examinaremos sólo aquellas colisiones que son posibles de describir con ayuda de la constante dieléctrica macroscópica. Semejante enfoque permite tomar en consideración los efectos colectivos.

Para la estimación de la magnitud $q_{\text{máx}}$ para la que las colisiones pueden aun examinarse sobre base macroscópica, es permitido emplear el siguiente procedimiento formal. La utilización de la constante dieléctrica macroscópica dependiente sólo de un vector de onda y de una frecuencia está justificada cuando en el problema la longitud característica es mucho mayor que las dimensiones atómicas a. En el caso que analizamos la longitud característica es la magnitud q^{-1}, por lo tanto ha de cumplirse la desigualdad $1/q \gg a$. Por otro lado, el valor del vector q no debe ser demasiado pequeño, ya que ha de ser mayor que ω/v_p. Así, pues,

$$\omega/v_p < q_{\text{máx}} \ll 1/a.$$

Teniendo esto en cuenta, ahora en (37.10) es posible despreciar la dispersión espacial:

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{I}}}{dx} = \frac{ie^2}{2\pi v_p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega\omega}{\varepsilon^l(\omega)} \int_0^{q_{\text{máx}}} \frac{dq^2}{q^2 + \omega^2/v_p^2}. \qquad (37.11)$$

La integral por la frecuencia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega\omega}{(q^2 + \omega^2/v_p^2)\varepsilon^l(\omega)} = -2i \int_0^{\infty} \frac{d\omega\omega}{q^2 + \omega^2/v_p^2} \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon^l(\omega)},$$

ya que la parte real de la constante dieléctrica longitudinal $\varepsilon^{l'}(\omega)$ es una función par de la frecuencia. Así, pues después de la integración por q (37.11) toma la forma

$$\frac{d\mathscr{E}_I}{dx} = \frac{2e^2}{\pi v_p} \int_0^{\infty} d\omega\omega \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon^l(\omega)} \ln \frac{q_{\text{máx}} v_p}{\omega}.$$

Tomemos ahora la integral por ω. El logaritmo es función de su argumento que varía débilmente, por lo tanto podemos escribir

$$\int_0^{\infty} d\omega\, \omega \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon^l(\omega)} \ln \frac{q_{\text{máx}} v_p}{\omega} = \ln \frac{q_{\text{máx}} v_p}{\bar{\omega}} \int_0^{\infty} d\omega\, \omega \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon^l(\omega)}. \quad (37.12)$$

Podemos considerar esta expresión como la definición de la magnitud $\bar{\omega}$.

La constante dieléctrica longitudinal $\varepsilon^l(\omega)$ en la integral de (37.12) es muy complicada, pero lo fundamental es que no conocemos ω. Es curioso, sin embargo, que la integral por ω obtenida puede resolverse con precisión incluso sin conocer la forma explícita de la función $\varepsilon^l(\omega)$. Para ello, escribamos la integral por ω en (37.12) del modo siguiente

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} d\omega\, \omega \frac{1}{\varepsilon^l(\omega)} \quad (37.13)$$

y tengamos en cuenta que la función $\varepsilon^l(\omega)$ no tiene ceros en el semiplano superior de la variable compleja ω. Por ello, el contorno de integración, que en (37.13) va a lo largo del eje real desde $-\infty$ hasta $+\infty$, sin cambiar el comienzo y final del contorno es posible elevar al semiplano superior la variable compleja ω de manera que el contorno de integración se convierta en un arco de radio infinitamente grande. En semejante contorno la función $\varepsilon^l(\omega)$ tendrá su aspecto asintótico

$$\varepsilon_l(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2.$$

El integrando obtenido de tal modo es una función analítica en el semiplano superior de la variable compleja ω. Por esta razón, sin variar el valor de la integral y conservando la forma de la función $\varepsilon^l(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, podemos bajar el contorno de integración al eje real, pasando por arriba por dos singularidades de la función $1 - \omega_p^2/\omega^2$ (en los puntos $\omega = \pm\omega_p$).

Ahora la parte imaginaria de la integral será determinada mediante la aportación debida al paso por los puntos $\omega = \pm\omega_p$ por arriba, circulando por arcos de radio infinitamente pequeño. Dicha aportación es igual a $-{}^1/_2\,\pi\omega_p^2$. De esa manera

$$\frac{d\mathscr{E}_{\mathrm{I}}}{dx} = \frac{e^2\omega_p^2}{v_p^2}\ln\frac{q_{\max}v_p}{\omega}. \tag{37.14}$$

Resulta que el valor de $d\mathscr{E}_{\mathrm{I}}/dx$ se determina plenamente por los puntos de la función $\varepsilon'(\omega)$ en los que la constante dieléctrica se anula. Pero la ecuación $\varepsilon'(\omega) = 0$ es la condición de existencia de ondas plásmicas longitudinales volumétricas, llamadas también *plasmones*. Por ello, aquella parte de las pérdidas de energía de la partícula rápida, relacionada con la función $\varepsilon'(\omega)$, está condicionada por la transmisión de la energía de la partícula rápida a los plasmones que se excitan en el medio.

37.3. Radiación de Vavilov — Cherenkov. Examinemos ahora aquella parte de la magnitud $d\mathscr{E}/dx$ enlazada con $\varepsilon^{\mathrm{tr}}$. Esta parte de las pérdidas específicas de energía

$$\frac{d\mathscr{E}_{\mathrm{II}}}{dx} = -\frac{ie^2}{\pi c^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\,\omega\int_0^{\infty}\frac{dq\,q^3}{q^2+\omega^2/v_p^2}\left\{q^2+\omega^2\left[\frac{1}{v_p^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{c^2}\,\varepsilon^{\mathrm{tr}}\left(\omega,\sqrt{q^2+\frac{\omega^2}{v_p^2}}\right)\right]\right\}^{-1}. \tag{37.15}$$

Despreciando la dispersión espacial

$$\frac{d\mathscr{E}_{\mathrm{II}}}{dx} = -\frac{2e^2}{\pi c^2}\int_0^{\infty}d\omega\omega\int_0^{\infty}\frac{dq\,q^3}{q^2+\omega^2/v_p^2}\,\mathrm{Im}\left\{q^2+\right.$$

$$\left.+\omega^2\left[\frac{1}{v_p^2}-\frac{1}{c^2}\,\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega)\right]\right\}^{-1}. \tag{37.16}$$

En un medio no absorbente en el que $\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega)$ tiene parte imaginaria infinitamente pequeña

$$\frac{d\mathscr{E}_{\mathrm{II}}}{dx} = \frac{2e^2}{\pi c^2}\int_0^{\infty}d\omega\omega\int_0^{\infty}\frac{dq\,q^3}{q^2+\omega^2/v_p^2}\,\delta\left\{q^2+\right.$$

$$\left.+\omega^2\left[\frac{1}{v_p^2}-\frac{1}{c^2}\,\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega)\right]\right\}. \tag{37.17}$$

Esta expresión es distinta de cero sólo cuando el punto, en el que el argumento de la función delta se reduce a cero, resulta hallarse en los límites de integración. En (37.17) la integración transcurre por los valores positivos y

reales de las variables, por esta razón, en la expresión entre paréntesis angulares en el argumento de la función delta debe ser negativa:

$$\frac{1}{v_p^2} - \frac{1}{c^2}\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega) < 0.$$

De aquí sigue que $v_p > c/\sqrt{\varepsilon^{\mathrm{tr}}} = c/n = v_{\mathrm{fase}}$. Así, pues, $d\mathcal{E}_{\mathrm{II}}/dx$ está condicionada por la radiación de ondas electromagnéticas transversales, cuya velocidad de fase tiene la forma habitual para las ondas transversales $v_{\mathrm{fase}} = c/\sqrt{\varepsilon^{\mathrm{tr}}}$. Semejantes ondas sólo se emiten cuando

$$v_p > v_{\mathrm{fase}}. \tag{37.18}$$

Tal radiación de ondas transversales por una partícula en movimiento uniforme por el medio recibe el nombre de *radiación de Vavílov—Cherenkov*. La intensidad total de la radiación de Vavílov—Cherenkov de una partícula rápida por un recorrido unitario

$$\frac{d\mathcal{E}_{\mathrm{II}}}{dx} = \frac{e^2}{c^2}\int d\omega\omega\left(1 - \frac{c^2}{v_p^2 n^2(\omega)}\right). \tag{37.19}$$

§ 38. Generación de ondas electromagnéticas durante el movimiento de una partícula rápida en un medio espacial-homogéneo. Radiación transitoria. Excitación de plasmones superficiales

Cuando una partícula rápida se mueve en un medio espacial-homogéneo se manifiestan nuevos procesos de generación de ondas electromagnéticas por dicha partícula, en comparación con el caso del movimiento en un medio homogéneo. Estudiemos el más sencillo y brillante ejemplo de tal generación que se produce cuando una partícula rápida cargada cruza el límite de separación brusco entre dos medios.

Sea que el espacio consta de dos semiespacios divididos por un límite de separación plano (fig. 38.1), con la particularidad de que ε_1 es la constante dieléctrica del medio que ocupa uno de los semiespacios y ε_2, el otro. El eje z está dirigido por la normal a la superficie de separación y el origen de coordenadas se halla en ella.

El campo electromagnético que surge al cruzar la carga en movimiento uniforme el límite de separación, se describe con las ecuaciones de Maxwell:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \tag{38.1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{\mathrm{ext}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}.$$

Como consideramos el medio no es magnético $H = B$. La corriente extraña se crea por la carga en movimiento uniforme, así, que

$$j_{ext}(r, t) = e\mathbf{v}_p \delta(r - \mathbf{v}_p t). \tag{38.2}$$

En la velocidad de movimiento de la carga no se sobreponen limitaciones. Pero, ante todo, nos interesa el movimiento de cargas no muy rápidas, cuando $v_p < v_{fase}$. Esto nos permite considerar que el mecanismo de Cherenkov de generación de ondas electromagnéticas transversales no existe y que toda la radiación dirigida al infinito está, por lo tanto, condicionada por un nuevo mecanismo de generación de las ondas electromagnéticas.

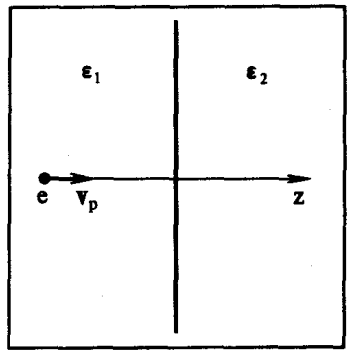

Fig. 38.1

Proyectemos las ecuaciones (38.1) en los ejes de coordenadas y, simultáneamente, realicemos la transformación de Fourier de dichas ecuaciones de las variables x e y a las q_x y q_y y de la variable t a la ω. Así, pues, el vector q será un vector de onda bidimensional situado en el plano de separación. Las proyecciones de la primera ecuación de Maxwell tendrán la forma

$$q_x E_y - q_y E_x = i\frac{\omega}{c} H_z,$$
$$\frac{c}{\omega}\left(i\frac{\partial E_x}{\partial z} + q_x E_z\right) = -H_y, \quad \frac{c}{\omega}\left(i\frac{\partial E_y}{\partial z} + q_y E_z\right) = H_x. \tag{38.3}$$

Las proyecciones de la segunda ecuación de Maxwell

$$q_x H_y - q_y H_x = -\frac{4\pi i}{c}(j_{ext})_z - i\frac{\omega}{c}\varepsilon E_z,$$
$$iq_y H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_y = -i\frac{\omega}{c}\varepsilon E_x, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - iq_x H_z = -i\frac{\omega}{c}\varepsilon E_y. \tag{38.4}$$

La imagen de Fourier de la densidad de corriente que figura en la primera de las ecuaciones (38.4), es

$$j_{ext}(z, q, \omega) = e(\mathbf{v}_p/v_p) \exp(i\omega z/v). \tag{38.5}$$

Los componentes del campo magnético en la primera de las ecuaciones (38.4) pueden expresarse con las ecuaciones segunda y tercera (38.3) mediante los componentes y la derivada z de los componentes del campo eléctrico, por lo que obtenemos

$$\left(q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\right)E_z + i\frac{\partial}{\partial z}(q\cdot E) = \frac{4\pi i\omega e}{c^2}\exp\left(i\omega\frac{z}{v_p}\right). \quad (38.6)$$

Sustituyamos también en las dos últimas ecuaciones (38.4) las expresiones para H_x, H_y y H_z de (38.3), a continuación, multipliquemos la primera de ellas por q_x, la segunda por q_y y, sumando el resultado, obtenemos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\right)(q\cdot E) = iq^2\frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (38.7)$$

Las ecuaciones (38.6) y (38.7) determinan los componentes longitudinal y transversal del campo eléctrico con relación al vector $\mathbf{v}_p$.

Con ayuda de (38.7) y (38.6) es posible eliminar el componente transversal del campo E y obtener la ecuación sólo para el componente longitudinal E_z del campo eléctrico E. Con este fin, hay que actuar sobre (38.6) mediante el operador $\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\right)$ y emplear la ecuación (38.7). De este modo obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\varepsilon E_z + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - q^2\right)\varepsilon E_z =$$

$$= -\frac{4\pi i\omega e}{c^2}\left(\varepsilon - \frac{c^2}{v_p^2}\right)\exp\left(i\frac{\omega}{v_p}z\right) \quad (38.8)$$

que determina el componente longitudinal del campo eléctrico.

Después de resolver esta ecuación, la solución hallada puede sustituirse en el segundo miembro de (38.7) y, seguidamente, también es fácil hallar el componente transversal del campo eléctrico.

Las ecuaciones (38.7) y (38.8) han de ser resueltas en cada semiespacio y fijar dichas soluciones en el límite de separación haciendo uso de las condiciones habituales de frontera $D_{n_1} = D_{n_2}$ y $E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$. La ecuación (38.8) tiene sencilla estructura que, de modo formal, recuerda la de la ecuación de las oscilaciones forzadas en mecánica (con las respectivas redesignaciones de las que es la principal la sustitución del tiempo por la variable z). La solución de esta ecuación puede ser escrita por analogía con la de las ecuaciones de mecánica. Consta de dos sumandos. La primera parte de dicha solución

$$E_z^f = -\frac{4\pi ie[(1 - c^2/v_p^2\varepsilon)]}{\omega(\varepsilon - c^2/v_p^2 - q^2c^2/\omega^2)}\exp\left(i\frac{\omega}{v_p}z\right) \quad (38.9)$$

no está ligada con la radiación y describe el campo cuasiestacionario de la partícula en movimiento. La segunda parte

$$E_z^{\text{rad}} = \frac{4\pi ie}{\omega} A \exp\left(\pm i \frac{\omega}{c} z \sqrt{\varepsilon - \frac{q^2c^2}{\omega^2}}\right) \tag{38.10}$$

puede describir el campo de radiación si $\varepsilon > (qc/\omega)^2$. Los coeficientes A (que en las expresiones para el campo son dos: A_1 y A_2, uno para cada medio) deben hallarse de las condiciones de frontera. Los componentes tangenciales $(qE^f)/q$ y $(qE^{\text{rad}})/q$, obtenidos de (38.7), tienen la forma

$$\frac{(q \cdot E^f)}{q} = -\frac{q^2c^2E_z^f}{\omega v(\varepsilon - c^2/v_p^2)},$$
$$\frac{(q \cdot E^{\text{rad}})}{q} = \mp \frac{\omega}{cq} E_z^{\text{rad}} \sqrt{\varepsilon - \frac{q^2c^2}{\omega^2}}. \tag{38.11}$$

Ahora, con ayuda de las condiciones de frontera podemos hallar los coeficientes A_1 y A_2:

$$A_1 = \frac{(q^2cv_p/\omega^2\varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\left(1 - \frac{v_p^2}{c}\varepsilon_1 + \frac{q^2v_p^2}{\omega^2}\right)} \times$$
$$\times \frac{1 - \frac{v_p^2}{c^2}\varepsilon_1 + \frac{v}{c}\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{q^2c^2}{\omega^2}}}{\left(1 + \frac{v_p}{c}\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{q^2c^2}{\omega^2}}\right)\left(\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{q^2c^2}{\omega^2}} + \varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_1 - \frac{q^2c^2}{\omega^2}}\right)}. \tag{38.12}$$

$$A_2 = \frac{(q^2cv_p/\omega^2\varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\left(1 - \frac{v_p^2}{c^2}\varepsilon_2 + \frac{q^2v_p^2}{\omega^2}\right)} \times$$
$$\times \frac{\left(1 - \frac{v_p^2}{c^2}\varepsilon_2 - \frac{v_p}{c}\sqrt{\varepsilon_1 - \frac{q^2c^2}{\omega^2}}\right)}{\left(1 - \frac{v_p}{c}\sqrt{\varepsilon_1 - \frac{q^2c^2}{\omega^2}}\right)\left(\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{q^2c^2}{\omega^2}} + \varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_1 - \frac{q^2c^2}{\omega^2}}\right)}. \tag{38.13}$$

Las fórmulas (38.10), (38.12) y (38.13) describen dos efectos. El primero de ellos, la radiación de ondas electromagnéticas transversales que surge al cruzar la carga el límite de separación, se llama *radiación transitoria*. Podemos representarnos su origen con evidencia, p.ej., cuando las partículas cargadas inciden sobre el límite de separación metal — vacío. La partícula cargada que se aproxima a la superficie del metal la polariza de modo que

la densidad electrónica superficial disminuye debido a la emergencia de electrones de dicha región si el signo de la carga de la partícula es negativo y aumenta si la partícula en movimiento tiene carga positiva. Las cargas de signo diferente crean un momento dipolar cuyo valor es función del tiempo. En el momento de alcanzar la partícula incidente la superficie del metal, todo campo macroscópico desaparece debido al fuerte apantallamiento de la carga por los electrones del metal. Esto es como si la partícula se «aniquilara». El momento dipolar que varía en el tiempo de este modo es, precisamente, la causa de la radiación transitoria. De (38.12) y (38.13) sigue que para el movimiento no relativista de la partícula incidente la radiación atrás y adelante con relación a la dirección de su movimiento, tiene una intensidad aproximadamente igual. Siendo relativista su movimiento el máximo de radiación está situado en la dirección adelante.

El segundo efecto es la excitación de los plasmones. Cuando $\varepsilon - q^2c^2/\omega^2 < 0$ la fórmula (38.10) deja de describir el campo que se aleja a la infinidad. Con ello, el campo electromagnético resulta «presionado» a la superficie de manera que surge una onda electromagnética con vector de onda q que se desplaza a lo largo de ella. La intensidad E_z^{rad} del campo de dicha onda decrece de modo exponencial al aumentar $|z|$:

$$E_z^{\text{rad}} = \frac{4\pi ie}{\omega} A_{1,2}(q, \omega) \exp\left(-|z| \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{q^2c^2}{\omega^2} - \varepsilon}\right). \tag{38.14}$$

Para comprender que aquí tropezamos en realidad con una onda superficial, examinemos otra vez el más sencillo caso, cuando para $z > 0$ hay un semiespacio con constante dieléctrica ε y para $z < 0$, el vacío. De acuerdo con (30.11) la ecuación de dispersión para los plasmones superficiales toma la forma

$$\frac{c^2q^2}{\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}, \quad \text{siendo} \quad \varepsilon < 0. \tag{38.15}$$

Del miembro izquierdo positivo de esta relación sigue que $\varepsilon + 1 < 0$. Por otro lado, el exponente en (38.14), al poner en ella (38.15), adquiere el aspecto

$$-|z| \frac{\omega}{c} \sqrt{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon + 1}}. \tag{38.16}$$

Como $\varepsilon + 1 < 0$ en el exponente no surge la unidad imaginaria. Con particular claridad se manifiesta la identidad de la onda superficial (38.14) con el plasmón superficial cuando el valor de q es tan grande que podemos despreciar el retardo electromagnético. Con $c \to \infty$ la fórmula (38.14) será

$$E_z^{\text{rad}} = \frac{4\pi ie}{\omega} A \exp(-|z| q)$$

y (38.15) se convierte en la ecuación

$$\varepsilon(\omega) + 1 = 0.$$

Esta última es, por definición, la ecuación de dispersión para los *plasmones superficiales* escrita despreciando el retardo electrodinámico (y, lo mismo que todas las demás fórmulas de este parágrafo, despreciando la dispersión espacial).

Como conclusión hemos de decir que si una carga en movimiento por un medio infinito genera ondas electromagnéticas longitudinales (plasmones volumétricos) y ondas electromagnéticas transversales (radiación de Vavílov-Cherenkov), las pérdidas de energía de una carga que cruza el límite de separación de dos medios están condicionadas por la excitación de plasmones superficiales y de radiación transitoria de las ondas electromagnéticas transversales.

§ 39. Radiación gamma y de rayos X durante el movimiento de partículas rápidas cargadas en los cristales

Aunque la estructura espacial del medio debe influir sobre la energía de las partículas rápidas, hasta el momento no habíamos tomado en consideración dicho hecho. En realidad, cuando dichas partículas se mueven por monocristales regulares, observamos los llamados efectos de orientación. Para el movimiento de las partículas a lo largo de ciertas direcciones los recorridos de las partículas pueden aumentar varias veces en comparación con los recorridos en estructuras irregulares (desordenadas). También hay otros efectos de orientación interesantes. Entre ellos sólo estudiaremos uno que tiene relación directa con el electromagnetismo y que consiste en que una partícula en movimiento a velocidad relativista por un monocristal es fuente de una radiación dura.

En el cristal las partículas rápidas que se mueven a lo largo de las cadenas de átomos (o bien por cierto plano cristalino), pueden tener durante tiempo relativamente prolongado un impulso transversal medio próximo a cero. De hecho, en cada momento de tiempo dicho impulso, aunque pequeño, es distindo de cero. El valor del impuslo transversal es tal que la carga que se mueve a lo largo de la cadena de átomos no puede vencer la barrera de potencial entre las cadenas de átomos vecinas (por regla, el valor de esta barrera es de un orden de 5 eV o mayor). Es fácil apreciar que el ángulo entre el vector del impulso de la partícula y el eje de la cadena de átomos que asegura la conservación del indicado estado del movimiento (llamado *canalización*) debe hallarse en los límites

$$0 < \psi \sqrt{U/E_p}, \tag{39.1}$$

donde U es la barrera de potencial entre las cadenas de átomos vecinas. La partícula rápida puede penetrar en el cristal de manera no paralela a la cadena. Si en este caso la condición (39.1) se cumple, la partícula canaliza moviéndose a lo largo de la cadena por una espiral. Para altas energías este

movimiento puede describirse con las ecuaciones de mecánica clásica, cuando la partícula es un electrón o positrón. Esto está relacionado con el aumento relativista de la masa de las partículas al crecer su velocidad. Es fácil estimar qué energía debe, p.ej., tener un electrón para que el orden del valor de su masa coincida con la de un protón en reposo. La velocidad de semejante electrón se determina de la relación

$$M = m(1 - v^2/c^2)^{-1/2},$$

donde m y M son las masas en reposo del electrón y el protón, respectivamente. De aquí se desprende que la diferencia entre la velocidad del electrón y la de la luz debe ser un valor del orden de 10^{-6} de la velocidad de la luz. La correspondiente energía es mil veces mayor de la energía propia del electrón y el valor de su orden constituye 1 GeV.

El potencial que sujeta la partícula junto a la cadena de átomos puede considerarse con la primera aproximación armónica, $V = V_0 x^2$, Aquí el eje x es perpendicular al eje del canal. Este mismo será el potencial dependiente de la segunda coordenada transversal con relación al eje del canal. La ecuación de movimiento a lo largo del eje x tendrá la forma

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{mv_x}{\sqrt{1 - v_z^2/c^2}}\right] = -2V_0 x. \tag{39.2}$$

En comparación con la velocidad v_z de movimiento a lo largo de la cadena, podemos despreciar la velocidad del movimiento transversal en el factor de Lorentz. Escribamos la solución de la ecuación (39.2):

$$x(t) = x_0 \operatorname{sen} \omega_0 t, \tag{39.3}$$

donde x_0 es la amplitud inicial. Sustituyendo esta solución en (39.2) obtenemos que la frecuencia de las oscilaciones (con mayor precisión, la frecuencia de rotación) de la partícula en el plano transversal

$$\omega_0 = \left(\frac{2V_0}{m}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{v_z^2}{c^2}\right)^{1/4}. \tag{39.4}$$

Al girar la partícula cargada, en movimiento según las leyes de mecánica clásica, debe surgir una radiación, cuya frecuencia, es precisamente ω_0 en el sistema de referencia en movimiento junto con la partícula que canaliza. Como esta radiación es observada en el sistema de laboratorio, es preciso tomar en consideración la existencia del efecto Doppler, de modo que la frecuencia ω en el sistema del laboratorio estará ligada con la frecuencia ω_0 mediante la relación

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Big/ \left(1 - \frac{v}{c}\cos\alpha\right);$$

aquí α es el ángulo entre el eje z y la dirección hacia el observador. Si $\alpha = 0$

$$\omega = 2\omega_0\gamma = 2\left(\frac{2V_0}{m}\right)^{1/2}\gamma^{1/2}, \tag{39.5}$$

ya que para las partículas con semejantes velocidades es justa la relación

$$1 - \frac{v}{c} \approx \frac{1}{2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2}\gamma^{-2},$$

donde γ es el factor de Lorentz. La frecuencia ω_0 disminuye con el aumento de E como $1/\gamma^{1/2}$, la frecuencia ω crece como $E^{1/2}$. Para $\alpha \neq 0$

$$\omega \sim 1/\gamma^{3/2} \sim E^{-3/2}.$$

La potencia que radia una partícula relativista que se mueve con aceleración w (véase (35.19), P. I), tiene la forma

$$I = \frac{2e^2w^2 - \left(\frac{\mathbf{v} \times w}{c^2}\right)^2}{3c^3(1 - v^2/c^2)^3}. \tag{39.6}$$

Esta fórmula es la generalización relativista de la conocida fórmula de Larmor. Durante la rotación de una partícula alrededor de la cadena de átomos $\mathbf{v} \cdot w = v \cdot w$ si aquí despreciamos la variación de la velocidad longitudinal. Entonces

$$I = \frac{2e^2}{3c^3}\frac{w^2}{(1 - v^2/c^2)^2} = \frac{2e^2}{3c^3}\gamma^4\overline{(\omega^2 x_0 \operatorname{sen} \omega t)^2} = \frac{e^2\gamma^4\omega^4 x_0^2}{3c^3}. \tag{39.7}$$

La frecuencia ω_0 determinada mediante la fórmula (39.4) depende del valor del gradiente V_0x del campo de la cadena de átomos. La posibilidad de controlar los haces de partículas de muy alta energía haciéndolos pasar por un cristal, está ligada con el hecho de que V_0x en los cristales puede ser una magnitud muy grande, de un orden de $10^{11} \ldots 10^{12}$ eV/cm.

Además de la frecuencia ω, es asimismo de importancia estimar la frecuencia límite del espectro de las ondas emitidas. De acuerdo con (35.3), P. I, la frecuencia máxima de la radiación

$$\omega_{\text{máx}} \approx \frac{c}{\rho}\gamma^3,$$

si durante la radiación el ángulo de desviación de la partícula es grande en comparación con $1/\gamma$. Precisamente tiene lugar semejante situación al canalizar partículas ultrarrelativistas. De la última fórmula se deduce que $\omega_{\text{máx}} \sim E^3$. En correspondencia con las estimaciones aducidas el espectro de las frecuencias radiadas se extiende desde $\omega \sim 10^{14} \ldots 10^{15}$ hasta $10^7 \ldots 10^{10}$ s^{-1}. De las estimaciones que hemos proporcionado se deduce

que la dependencia entre la intensidad de la radiación y la energía en alto grado es función del carácter de la distribución angular de la radiación de forma que puede variar desde $I \sim E^6$, cuando toda la radiación va adelante, hasta $I \sim E^{-2}$, cuando la mayor parte de la radiación transcurre bajo ángulos grandes. Un estudio más minucioso de la dinámica de movimiento de la partícula en el canal nos da que $I \sim E^2$ y $\omega_{máx} \sim E^{3/2}$. Las frecuencias medias de radiación resultan encontrarse en el sector de los rayos X y de la radiación gamma blanda, en tanto que su intensidad supera la de la radiación de deceleración.

Capítulo VI. Procesos electromagnéticos no lineales en medios

§ 40. Polarización no lineal

40.1. Expresión fenomenológica general para la polarizabilidad no lineal. Ya hemos tropezado con la situación cuando la reacción de la fuerza al campo exterior es una función no lineal del valor de este campo. Semejantes propiedades son poseídas, en primer lugar, por las sustancias ferromagnéticas, y en el campo eléctrico continuo, por las ferroeléctricas. Pero hasta el momento, suponíamos que la respuesta del medio al campo de alta frecuencia era lineal. Esto está relacionado con el hecho de que la polarización de alta frecuencia, por regla, está condicionada por el movimiento de los electrones en los átomos. Además del campo exterior, también actúa sobre los electrones el campo propio del átomo (o del núcleo, como en el hidrógeno). En este último caso, este campo $E_0 \approx 5 \cdot 10^9$ V/cm. En los medios condensados este campo puede ser algo menor. En un semiconductor, con estrecha zona prohibida, puede ser del orden de 10^7 V/cm. En todo caso, el valor $E_0 \approx 10^8$ V/cm puede considerarse como intensidad típica de los campos propios en aquella región del espacio donde se hallan los electrones que introducen la mayor aportación en la polarización de la sustancia. Las fuentes habituales de campos de alta frecuencia crean campos exteriores cuyas intensidades son en muchos órdenes menores que E_0. Por ello, existe un pequeño parámetro E/E_0 según el cual puede ser desarrollado el vector P y debido a la extrema pequeñez de dicho parámetro en semejante desarrollo, por regla, es suficiente limitarse al primer sumando de Taylor.

La única fuente de campo electromagnético de alta frecuencia, cuya intensidad se aproxima en cierto grado al valor E_0, es el laser. Por ello, es de esperar que en el campo de un rayo laser es posible que también se manifiesten los sumandos superiores del desarrollo del vector de densidad de polarización en la serie de Taylor por las potencias del parámetro E/E_0. Así,

pues, en medios no magnéticos la densidad del vector de polarización es la suma

$$P(r, t) = P^{(1)}(r, t) + P^{(2)}(r, t) + P^{(3)}(r, t) + \ldots, \qquad (40.1)$$

donde $P^{(n)}$ es el sumando del orden n-ésimo según el campo. En el caso general, a la toma en consideración de las dispersiones temporal y espacial responde la siguiente ligazón entre $P_\alpha^{(n)}(r, t)$ y la intensidad del campo:

$$P_\alpha^{(n)}(r, t) = \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t} dt_2 \int_{-\infty}^{t} dt_3 \ldots \int_{-\infty}^{t} dt_n \int d^3r_1 \int d^3r_2 \times$$

$$\times \int d^3r_3 \ldots \int d^3r_n \mathcal{K}^{(n)}_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu}(r, r_1, r_2, \ldots r_n, t - t_1, t - t_2,$$

$$t - t_3, \ldots, t - t_n) E_\beta(r_1, t_1) E_\gamma(r_2, t_2) E_\zeta(r_3, t_3) \ldots E_\nu(r_n, t_n). \qquad (40.2)$$

En (40.2) se puede despreciar con frecuencia la dispersión espacial, en lo que atañe a la temporal, por regla, ella es sustancial. Introduciendo nuevas variables $t - t_1 = \tau_1$, $t - t_2 = \tau_2$, ..., $t - t_n = \tau_n$, la fórmula (40.2) puede escribirse del siguiente modo

$$P_\alpha^{(n)}(r, t) = \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \ldots \int_0^\infty d\tau_n \mathcal{K}^{(n)}_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu} \times$$

$$\times (r, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) E_\beta(r, t - \tau_1) E_\gamma(r, t - \tau_2) \ldots E_\nu(r, t - \tau_n). \qquad (40.3)$$

Lo mismo que en la teoría lineal nos interesará la imagen de Fourier de esta expresión

$$P_\alpha^{(n)}(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_\alpha^{(n)}(r, t) \exp(i\omega t) dt.$$

Realizando los correspondientes cálculos, obtenemos

$$P_\alpha^{(n)}(r, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_3 \ldots$$

$$\ldots \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_n \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 - \ldots - \omega_n) E_\beta(\omega_1) E_\gamma(\omega_2) \ldots$$

$$\ldots E_\nu(\omega_n) \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \ldots \int_0^\infty d\tau_n \mathcal{K}^{(n)}_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu} \times$$

$$\times \exp[i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2 + \ldots \omega_n\tau_n)]. \qquad (40.4)$$

Introduciendo la designación

$$\chi^{(n}_{\alpha\beta\gamma\ \ldots\ \nu}(r,\ \omega,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n) =$$

$$= \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \ldots - \omega_n) \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int_0^\infty d\tau_3 \ldots$$

$$\ldots \int_0^\infty d\tau_n \mathcal{K}^{(n)}_{\alpha\beta\gamma\ \ldots\ \nu}(r,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_n) \times$$

$$\times \exp[i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2 + \ldots + \omega_n\tau_n)], \qquad (40.5)$$

la ligazón entre $P^{(n)}$ y la intensidad del campo eléctrico puede representarse como

$$P^{(n)}_\alpha(r,\ \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_2 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_n \chi^{(n)}_{\alpha\beta\gamma\ -\ \nu} \times$$

$$\times(r,\ \omega,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n) E_\beta(r,\ \omega_1) E_\gamma(r,\ \omega_2) \ldots E_\nu(r,\ \omega_n). \qquad (40.6)$$

Esta fórmula es la generalización de la ligazón lineal corriente

$$P_\alpha(r,\ \omega) = \chi_{\alpha\beta}(r,\ \omega) E_\beta(r,\ \omega)$$

para el caso cuando las propiedades no lineales del medio con relación a un campo de relativamente alta frecuencia se hacen notorias. En la práctica, los coeficientes no lineales más sustanciales son $\chi^{(2)}$ y $\chi^{(3)}$. Ahora ya, directamente de la forma de las fórmulas (40.5) y (40.6), es posible establecer qué nuevos efectos físicos están condicionados por las susceptibilidades $\chi^{(2)}$ y $\chi^{(3)}$.

40.2. Efectos de no linealidad cuadráticos según el campo. Están relacionados con el coeficiente $\chi^{(2)}$. En tal caso

$$P^{(2)}_\alpha(r,\ \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 \chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}(r,\ \omega,\ \omega_1,\ \omega_2 = \omega - \omega_1) \times$$

$$\times E_\beta(r,\ \omega_1) E_\gamma(r,\ \omega - \omega_1). \qquad (40.7)$$

Supongamos que por el medio se propagan dos ondas con frecuencias Ω_1 y Ω_2*)

$$E_\alpha(t) = E^{(1)}_{0\alpha} \exp(-i\Omega_1 t) + E^{(2)}_{0\alpha} \exp(-i\Omega_2 t). \qquad (40.8)$$

---

*) Hablando en general, al decribir los fenómenos no lineales se debe trabajar desde un principio con campos reales. En el siguiente parágrafo, en el que con ciertos modelos se calculan de hecho susceptibilidades no lineales, así vamos a operar. En esta parte del libro la intensidad del campo se escribe como magnitud compleja. Con ello, como es natural, hay que recordar que en la fórmula (40.8) se han omitido, pero se sobreentienden, los sumandos complejos-conjugados. En realidad, siendo cualitativo el análisis que aquí realizamos es más cómodo trabajar con el campo complejo (40.8), pero hay que recordar que, con ello, en algunas fórmulas definitivas una o bien ambas frecuencias Ω, pueden resultar ser negativas.

La imagen de Fourier del campo (40.8) tiene el aspecto

$$\dot{E}_\alpha(\omega) = 2\pi E^{(1)}_{0\alpha}\,\delta(\omega - \Omega_1) + 2\pi E^{(2)}_{0\alpha}\,\delta(\omega - \Omega_2).$$

Sustituyendo esta expresión en (40.7), obtenemos

$$P^{(2)}_\alpha(\omega) = (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 \chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}(\omega, \omega_1, \omega_2 = \omega - \omega_1) \times$$
$$\times \{E^{(1)}_{0\beta} E^{(1)}_{0\gamma}\,\delta(\omega_1 - \Omega_1)\delta(\omega - \omega_1 - \Omega_1) +$$
$$+ E^{(1)}_{0\beta} E^{(2)}_{0\gamma}\,\delta(\omega_1 - \Omega_1)\delta(\omega - \omega_1 - \Omega_2) +$$
$$+ E^{(2)}_{0\beta} E^{(1)}_{0\gamma}\,\delta(\omega_1 - \Omega_2)\delta(\omega - \omega_1 - \Omega_1) +$$
$$+ E^{(2)}_{0\beta} E^{(2)}_{0\gamma}\,\delta(\omega_1 - \Omega_2)\delta(\omega - \omega_1 - \Omega_2)\}. \qquad (40.9)$$

Tomando la integral por la variable ω_1, tendremos

$$P^{(2)}_\alpha(\omega) = (2\pi)^2 \{\chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}(\omega, \Omega_1, \omega - \Omega_1)\delta(\omega - 2\Omega_1) \times$$
$$\times E^{(1)}_{0\beta} E^{(1)}_{0\gamma} + \chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}(\omega, \Omega_1, \omega - \Omega_1)\delta(\omega - \Omega_1 - \Omega_2) \times$$
$$\times E^{(1)}_{0\beta} E^{(2)}_{0\gamma} + \chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}(\omega, \Omega_2, \omega - \Omega_2)\delta(\omega - \Omega_2 - \Omega_1) \times$$
$$\times E^{(2)}_{0\beta} E^{(1)}_{0\gamma} + \chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}(\omega, \Omega_2, \omega - \Omega_2)\delta(\omega - 2\Omega_2) E^{(2)}_{0\beta} E^{(2)}_{0\gamma}\}. \qquad (40.10)$$

A la aparición de los sumandos primero y último en (40.10) responde un nuevo efecto condicionado por la no linealidad del medio, es decir, la generación de las segundas armónicas de las ondas que se propagan por el medio. La aparición en un medio no lineal de la segunda armónica de una radiación de frecuencia comparativamente alta, incidente en el medio, fue la primera observación según el tiempo de las propiedades no lineales del medio con el empleo de haces de laser de ondas electromagnéticas. Los sumandos segundo y tercero en (40.10) describen otro efecto condicionado por la no linealidad: la generación en un medio no lineal de ondas con frecuencia diferencial o sumaria (a la primera corresponde el caso cuando una de las frecuencias Ω_1 o bien Ω_2 es negativa). Si tenemos dos ondas tales, que

$$E_\alpha = E^{(1)}_{0\alpha} \exp(-i\Omega t) + E^{(2)}_{0\alpha} \exp(+i\Omega t),$$

entre los términos de los que se compone $\boldsymbol{P}(\omega)$ aparece un término de la forma

$$(2\pi)^2 \chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}(\omega, \Omega, \omega - \Omega) E^{(1)}_{0\beta} E^{(2)}_{0\gamma}\delta(\omega). \qquad (40.11)$$

Esto significa que la no linealidad del medio puede conducir a la aparición de un componente constante de la polarización (en ocasiones, dicho efecto recibe el nombre de *rectificación óptica*).

Un caso particular de los fenómenos no lineales de segundo orden, es el caso cuando en el medio sólo hay un campo alternativo y uno continuo. A esto responde la fórmula (40.10) en la que $\Omega_1 = \Omega \neq 0$, $\Omega_2 = 0$. En la polarización tiene la correspondiente aportación la estructura

$$(2\pi)^2 \chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}(\omega, \Omega, \omega - \Omega) E^{(1)}_{0\beta} E^{(2)}_{0\gamma}\delta(\omega - \Omega). \qquad (40.12)$$

De (40.12) se desprende que existe un efecto electrónóptico consistente en que el campo eléctrico continuo aplicado al medio influye en el valor de la polarización alternativa adicional, surgida al sobreponer el campo variable. Como para crear un campo continuo fuerte no se necesita el laser, este efecto no lineal (llamado *efecto Pockels*) ya se observaba el siglo pasado. En esencia, a los efectos no lineales de este tipo se refiere el ya conocido efecto Faraday que de hecho consiste en la influencia del campo magnético continuo sobre la polarizabilidad de la sustancia en el campo electromagnético alternativo.

40.3. Efectos de no linealidad cúbicos según el campo. Los efectos cúbicos de no linealidad se describen con el siguiente sumando de la densidad de polarización:

$$P_\alpha^{(3)}(r, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_2 \chi_{\alpha\beta\gamma\zeta}^{(3)}(r, \omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3 =$$

$$= \omega - \omega_1 - \omega_2) E_\beta(r, \omega_1) E_\gamma(r, \omega_2) E_\zeta(r, \omega_3 = \omega - \omega_1 - \omega_2). \qquad (40.13)$$

De la estructura de esta fórmula vemos que los sumandos de tercer orden pueden describir una serie de nuevos efectos no lineales. Ante todo, esto será la excitación de la tercera armónica a lo que corresponde $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \Omega$, así que $\omega = 3\Omega$. Al segundo efecto corresponde $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\omega_3 = \Omega$, lo que es el efecto electrónóptico estadístico cuadrático. Este efecto, que lleva asimismo el nombre de *efecto Kerr,* consiste en la manifestación de la birrefrigencia en el campo eléctrico continuo. Al caso $\omega_1 = -\omega_2$, $\omega_3 = \Omega$ e Im $\chi(3)$ responde la absorción de dos fotones, al caso $\omega_1 = -\omega_2$, $\omega_3 = \Omega$ y Re $\chi(3)$, el efecto óptico Kerr. Además, el sumando de tercer orden describe gran cantidad de variantes de la desviación de cuatro ondas, entre las que el caso más popular es aquel que corresponde a la espectroscopia coherente antistokes ($\omega_1 = \omega_2 = \Omega_1$, $\omega_2 = -\Omega_2$, $\omega = 2\Omega_1 - \Omega_2$).

§ 41. Modelos clásicos que aseguran la existencia de la no linealidad de la susceptibilidad

En este parágrafo será mostrado que existen mecanismos físicos microscópicos que, de hecho, aseguran la presencia de los fenómenos no lineales que con anterioridad fueron estudiados sobre base fenomenológica. Aquí examinaremos dos de los más importantes mecanismos clásicos, aunque en diferentes problemas concretos pueden ser asimismo sustanciales otros procesos que conducen a la no linealidad.

41.1. Susceptibilidad no lineal del gas de electrones libres. Examinaremos el movimiento de un electrón en el plasma por la acción de una onda electromagnética, cuyos componentes tienen la forma

$$E_x = B_y = E \exp(ikz - i\omega t). \qquad (41.1)$$

Las ecuaciones de movimiento de un electrón tienen el aspecto habitual:

$$m\ddot{x} = eE_x - \frac{e}{c}\dot{z}B_y - m\dot{x}\nu,$$
$$m\ddot{y} = -m\dot{y}\nu, \qquad (41.2)$$
$$m\ddot{z} = \frac{e}{c}\dot{x}B_y - m\dot{z}\nu.$$

La magnitud ν es la frecuencia de las colisiones que aseguran el amortiguamiento de las vibraciones de los electrones y, de esta forma, conducen a la existencia de oscilaciones estacionarias que no dependen de las condiciones iniciales. La no linealidad aparece debido a la parte magnética de la fuerza de Lorentz. Esto se determina con el producto de la velocidad del electrón por el vector de la inducción magnética (o bien la intensidad del campo magnético). Puesto que la velocidad es proporcional al campo, en el segundo miembro de (41.2) surge una fuerza cuadrática según el campo. La solución de las ecuaciones (41.2) con la aproximación lineal tiene el aspecto

$$x = -\frac{eE_x}{m(\omega^2 + i\omega\nu)},$$
$$y = y_0 \exp(-\nu t), \quad z = z_0 \exp(-\nu t). \qquad (41.3)$$

A grandes tiempos, al establecerse el estado estacionario, $y \to 0$ y $z \to 0$. A la toma en consideración de la no linealidad corresponde la sustitución de la magnitud x, determinada con la primera fórmula (41.3), en la última fórmula (41.2). Como resultado, de la última ecuación (41.2), obtenemos

$$z = -\frac{i\omega e^2 E_x B_y}{2cm^2(\omega^2 + i\omega\nu)(2\omega^2 + i\omega\nu)}. \qquad (41.4)$$

Como el segundo miembro de (41.4) contiene el producto $E_x B_y$, la coordenada z depende del tiempo lo mismo que $\exp(-i2\omega t)$. Por consiguiente, el electrón está sometido a oscilaciones de una frecuencia 2ω que son longitudinales con relación al vector $\boldsymbol{k}$ de la onda incidente. Por lo tanto, él emite con una frecuencia 2ω; se produce la generación de la segunda armónica de la onda electromagnética. Sustituyendo (41.4) en la primera ecuación (41.2), es fácil ver que la coordenada x tendrá un componente que corresponde a las oscilaciones con una frecuencia 3ω y etc. De (41.4) se deduce que la generación de la segunda armónica transcurre en dirección perpendicular al vector $\boldsymbol{k}$. Las vibraciones de los electrones con una frecuencia 3ω son transversales con relación al vector $\boldsymbol{k}$ y la radiación con semejante frecuencia se propaga a lo largo de la dirección de incidencia de la onda inicial. En el plasma real hay también otros mecanismos de aparición de la no linealidad.

41.2. No linealidad ligada con el anharmonismo de las oscilaciones. Supongamos que tenemos un oscilador anharmónico unilateral en el campo

de dos ondas electromagnéticas de frecuencias ω_1 y ω_2. La correspondiente ecuación de movimiento tiene la forma

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} + \omega_0^2 x + \kappa^2 x^2 = \frac{e}{2m}(E_1 \exp[i(k_1 z - \omega_1 t)] + \\ + E_2 \exp[i(k_2 z - \omega_2 t)]) + \text{f.c.} \qquad (41.5)$$

La no linealidad está aquí ligada con la existencia de una fuerza cuadrática según la desviación de la posición de equilibrio. Con la aproximación lineal (se considera que $k^2 \to 0$) la solución de esta ecuación tiene el aspecto

$$x_L = \frac{e}{2m}\left\{E_1\left[\frac{\exp[i(k_1 z - \omega_1 t)]}{\omega_0^2 - \omega_1^2 - i\lambda\omega_1} + \frac{\exp[-i(k_1 z - \omega_1 t)]}{\omega_0^2 - \omega_1^2 + i\lambda\omega_1}\right] + \right. \\ \left. + E_2\left[\frac{\exp[i(k_2 z - \omega_2 t)]}{\omega_0^2 - \omega_2^2 - i\lambda\omega_2} + \frac{\exp[-i(k_2 z - \omega_2 t)]}{\omega_0^2 - \omega_2^2 + i\lambda\omega_2}\right]\right\}. \qquad (41.6)$$

La ecuación no lineal (41.5) puede resolverse según el método de iteración. Representemos la solución de la ecuación no lineal (41.5) del modo siguiente

$$x = x_L + x_{NL}, \qquad (41.7)$$

donde x_{NL} es la parte de la solución condicionada por los efectos no lineales. Consideramos que la no linealidad es débil, por lo que al sustituir (41.7) en (41.5) en el sumando que contiene κ^2, con la primera aproximación, hay que omitir x_{NL}. La toma en consideración de los sumandos $\kappa^2 x_{NL} x_L$ o bien, $\kappa^2 x_{NL}^2$ corresponde a tener en cuenta los siguientes órdenes de pequeñez. Ahora, recordando que la función x_L satisface la ecuación

$$\ddot{x}_L + \lambda\dot{x}_L + \omega_0^2 x_L = \frac{e}{m}\{E_1 \exp[i(k_1 z - \omega_1 t)] + \\ + E_2 \exp[i(k_2 z - \omega_2 t)] + \text{f.c.}\},$$

obtenemos la ecuación para la función x_{NL}:

$$\ddot{x}_{NL} + \lambda\dot{x}_{NL} + \omega_0^2 x_{NL} = -\kappa^2 x_L^2. \qquad (41.8)$$

El segundo miembro de esta ecuación es conocido, ya que lo es la función x_L (expresada por la fórmula (41.6)).

Escribamos la solución de (41.8) en la forma

$$x_{NL} = B_1 \exp[i2(k_1 z - \omega_1 t)] + B_1^* \exp[-i2(k_1 z - \omega_1 t)] + \\ + B_2 \exp[i2(k_2 z - \omega_2 t)] + B_2^* \exp[-i2(k_2 z - \omega_2 t)] + \\ + D_1 \exp\{i[(k_1 + k_2)z - (\omega_1 + \omega_2)t]\} + \\ + D_1^* \exp\{-i[(k_1 + k_2)z - (\omega_1 + \omega_2)t]\} + \\ + D_2 \exp\{i[(k_1 - k_2)z - (\omega_1 - \omega_2)t]\} + \\ + D_2^* \exp\{-i[(k_1 - k_2)z - (\omega_1 - \omega_2)t]\} + C. \qquad (41.9)$$

Sustituyendo (41.9) y (41.6) en (41.8) obtenemos los coeficientes B, D y C. Ellos tienen el aspecto

$$B_1 = \left(\frac{e\kappa E_1}{2m}\right)^2 \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_1^2 - i\lambda\omega_1)^2(\omega_0^2 - 4\omega_1^2 - 2i\lambda\omega_1)}, \tag{41.10}$$

$$B_2 = \left(\frac{e\kappa E_2}{2m}\right)^2 \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_2^2 - i\lambda\omega_2)^2(\omega_0^2 - 4\omega_2^2 - 2i\lambda\omega_2)}, \tag{41.11}$$

$$D_1 = \frac{2e^2\kappa^2 E_1 E_2}{m^2(\omega_0^2 - \omega_1^2 - 1\lambda\omega_1)(\omega_0^2 - \omega_2^2 - i\lambda\omega_2)} \times$$

$$\times \frac{1}{[\omega_0^2 - (\omega_1 + \omega_2)^2 - i\lambda(\omega_1 + \omega_2)]}, \tag{41.12}$$

$$D_2 = \frac{2e^2 E_1 E_2 \kappa^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega_1^2 - i\lambda\omega_1)(\omega_0^2 - \omega_2^2 + i\lambda\omega_2)} \times$$

$$\times \frac{1}{[\omega_0^2 - (\omega_1 - \omega_2)^2 - i\lambda(\omega_1 - \omega_2)]}, \tag{41.13}$$

$$C = 2\left(\frac{e\kappa^2}{2m\omega_0}\right)^2 \left[\frac{E_1^2}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \lambda^2\omega_1^2} + \frac{E_2^2}{(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + \lambda^2\omega_2^2}\right]. \tag{41.14}$$

De (41.9) y (41.10) se desprende que los coeficientes B y B_1^* determinan la susceptibilidad no lineal que describe la generación de la segunda armónica respecto de la onda de frecuencia ω_1, mientras que los coeficientes B_2 y B_2^*, la generación de la segunda armónica en lo que atañe a la onda de frecuencia ω_2. Los coeficientes D_1 y D_1^* describen el proceso de transformación de dos ondas de frecuencias ω_1 y ω_2 en una onda de frecuencia sumaria $\omega_1 + \omega_2$, en tanto que los coeficientes D_2 y D_2^* están ligados con la generación en el medio de una onda con frecuencia diferencial $\omega_1 - \omega_2$. Por fin, el coeficiente C describe la aparición de la polarización continua en un campo eléctico alternativo (efecto «rectificación de la luz»).

De las fórmulas obtenidas se desprende que todos estos efectos poseen una dispersión de frecuencia sustancial, de manera que en un determinado intervalo de frecuencias unos u otros de estos efectos pueden ser prevalentes. Continuando el proceso de iteración, de forma análoga, podemos hallar las susceptibilidades no lineales de tercer orden.

Complementos

Comp. I. Elementos de álgebra y análisis tensorial en el espacio euclidiano tridimensional

Comp. I.1. Definición del tensor. Un escalar, vector, tensor son magnitudes matemáticas que se definen por sus leyes de transformación al girar el sistema de coordenadas. Ellos son abstracciones que reflejan las propiedades generales de magnitudes físicas reales, tales como densidad, velocidad, intensidad del campo, momento de inercia, etc. Esto es, precisamente, por lo que ellos se utilizan extensamente en física.

Examinaremos dos sistemas cartesianos de coordenadas: el inicial y girado, que tienen origen común (fig. Comp. I.1). Se denomina *escalar* (*invariante*) una magnitud que no varía su valor al girar el sistema de coordenadas, o sea, que tiene un mismo valor en los dos sistemas de coordenadas:

$$R' = R. \qquad \text{(Comp. I.1)}$$

Son ejemplos de escalares la densidad de masa o de carga eléctrica ρ, la distancia entre dos puntos l_{12}, el momento de tiempo t y otras muchas magnitudes.

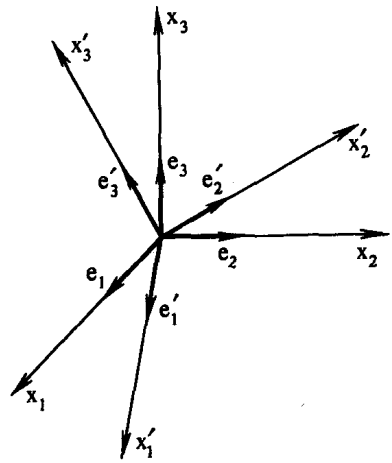

Fig. Comp. I.1.

Llamamos *vector* en un espacio tridimensional al conjunto de tres magnitudes A_α ($\alpha = 1, 2, 3$), determinadas en todos los sistemas de coordenadas y que al producir el giro se transforman según las fórmulas

$$A'_\alpha = a_{\alpha\beta} A_\beta \qquad \text{(Comp. I.2)}$$

(la suma según el signo β en repetición desde 1 hasta 3!). Aquí A_β ($\beta = 1, 2, 3$) es la proyección del vector sobre los ejes del sistema inicial de coordenadas y A'_α ($\alpha = 1, 2, 3$) sobre los ejes del sistema girado; $a_{\alpha\beta}$ son los coeficientes de transformación que son los cosenos de los ángulos entre el eje β del sistema inicial y el eje α del girado. Pueden ser escritos mediante los vectores unitarios (versores) de los sistemas de coordenadas:

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{e}'_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta. \qquad \text{(Comp. I.3)}$$

P.ej., es un vector el conjunto de coordenadas cartesianas del punto x_1, x_2, x_3 que forman su radio vector; los incrementos de las coordenadas dx_1, dx_2, dx_3 también forman un vector y co-

mo el incremento del tiempo dt es invariante, las razones $v_\alpha = dx_\alpha/dt$ forman el vector de velocidad.

Recibe el nombre de *tensor de II rango* en un espacio tridimensional una magnitud de nueve componentes $T_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) determinada en todos los sistemas de coordenadas y que se transforma durante el giro del sistema de coordenadas como el producto de los componentes de dos vectores $A_\alpha B_\beta$, es decir, del modo siguiente:

$$T'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\mu} a_{\beta\nu} T_{\mu\nu}. \qquad \text{(Comp. I.4)}$$

Del curso de mecánica el lector conoce el tensor $I_{\alpha\beta}$ de los momentos de inercia de un sólido.

Llamamos *tensor de s-ésimo rango* en un espacio de tres dimensiones la magnitud de 3^s componentes $T_{\alpha\beta \ldots \mu\nu}$ que se transforma como el producto de s componentes de los vectores:

$$T'_{\alpha'\beta' \ldots \mu'\nu'} = a_{\alpha'\alpha} a_{\beta'\beta} \cdots a_{\mu'\mu} a_{\nu'\nu} T_{\alpha\beta \ldots \mu\nu}. \qquad \text{(Comp. I.5)}$$

De las definiciones aducidas queda claro que el escalar y el vector pueden considerarse como tensores de rangos nulo y primero, respectivamente.

La matriz de giro $a_{\alpha\beta}$ posee una importante propiedad: ortogonalidad. Compongamos la suma por μ:

$$a_{\alpha\mu} a_{\beta\mu} = (e'_\alpha \cdot e_\mu)(e'_\beta \cdot e_\mu).$$

Como los versores e_μ, lo mismo que e'_α, forman una base ortogonal, podemos escribir

$$a_{\alpha\mu} a_{\beta\mu} = (e'_\alpha)_\mu (e'_\beta)_\mu = (e'_\alpha \cdot e'_\beta) = \begin{cases} 0, \alpha \neq \beta, \\ 1, \alpha = \beta, \end{cases} \qquad \text{(Comp. I.6)}$$

es decir,

$$a_{\alpha\mu} a_{\beta\mu} = \delta_{\alpha\beta}. \qquad \text{(Comp. I.7)}$$

Aquí, la magnitud $\delta_{\alpha\beta} = 1$ para $\alpha = \beta$, $\delta_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$ es el símbolo de Kronecker. Más adelante veremos que esto es un tensor de II rango.

La suma del producto de los elementos de una matriz de giro por el primer signo proporciona el mismo resultado:

$$a_{\mu\alpha} a_{\mu\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \qquad \text{(Comp. I.8)}$$

Las igualdades (Comp. I.7) y (Comp. I.8) expresan la propiedad de ortogonalidad de la matriz de transformación. De ellas sigue, en particular, que los nueve elementos de la matriz están relacionados mediante seis relaciones, o sea, sólo tres de ellas son independientes. Así, pues, un giro arbitrario del sistema de coordenadas se prefija con tres parámetros independientes, p.ej., con tres ángulos de Euler.

Las relaciones (Comp. I.7) y (Comp. I.8) pueden ser utilizadas para la construcción de la matriz de transformación inversa. Designándola por $\hat{a}^{-1}$, por definición, tendremos la matriz inversa:

$$\hat{a}^{-1}\hat{a} = \hat{a}\hat{a}^{-1} = \hat{1}$$

o bien, con anotación detallada,

$$a^{-1}_{\alpha\mu} a_{\mu\beta} = a_{\alpha\mu} a^{-1}_{\mu\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \qquad \text{(Comp. I.9)}$$

De la comparación de la última ecuación con (Comp. I.7) y (Comp. I.8), hallamos:

$$a^{-1}_{\alpha\mu} = a_{\mu\alpha}. \qquad \text{(Comp. I.10)}$$

Esto significa que la matriz de transformación inversa se obtiene de la sustitución inicial de las filas por las columnas y viceversa (transposición). P.ej., la relación inversa a (Comp. I.2) se escribe

$$A_\alpha = a_{\beta\alpha} A'_\beta. \qquad \text{(Comp. I.11)}$$

Como ejercicio recomendamos al lector que demuestre por su cuenta que el determinante de la matriz del giro es igual a la unidad.

Comp. I.2. Operaciones con tensores. Determinemos la suma de los tensores $T_{\alpha\beta}$ y $P_{\alpha\beta}$ como el tensor $Q_{\alpha\beta}$, cuyos componentes son iguales a las sumas de los correspondientes componentes de los tensores sumandos, es decir,

$$Q_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + P_{\alpha\beta}. \qquad \text{(Comp. I.12)}$$

¡Pueden ser sólo sumados tensores del mismo rango!

Vamos a entender por producto del escalar λ por un tensor, otro tensor de ese mismo rango, cuyos componentes son iguales al producto de un escalar por los componentes del tensor inicial, p.ej.,

$$Q_{\alpha\beta} = \lambda T_{\alpha\beta}. \qquad \text{(Comp. I.13)}$$

Podemos cerciorarnos de que $Q_{\alpha\beta}$ es un tensor en los dos casos si $T_{\alpha\beta}$ y $P_{\alpha\beta}$ son tensores y λ, escalar, comprobando la ley de transformación de $Q_{\alpha\beta}$.

Al multiplicar entre sí los componentes de dos tensores (sin sumarlos por cualesquiera de los índices) se obtiene un tensor cuyo rango es igual a la suma de los rangos de los tensores-factores. Ilustremos lo dicho en el ejemplo de la multiplicación del tensor de I rango A_α por el de II rango $T_{\beta\gamma}$. Designemos $Q_{\alpha\beta\gamma} = A_\alpha T_{\beta\gamma}$. Por definición, en el sistema con rayas

$$Q'_{\alpha\beta\gamma} = A'_\alpha T'_{\beta\gamma}.$$

Haciendo uso de las fórmulas (Comp. I.2) y (Comp. I.4), hallamos

$$Q'_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\mu} a_{\beta\nu} a_{\gamma\varepsilon} A_\mu T_{\nu\varepsilon} = a_{\alpha\mu} a_{\beta\nu} a_{\gamma\varepsilon} Q_{\mu\nu\varepsilon}, \qquad \text{(Comp. I.14)}$$

de donde sigue que $Q_{\alpha\beta\gamma}$ es un tensor de III rango.

La contracción de un tensor es su suma por dos de los signos que se igualan. Como resultado de la contracción el rango del tensor disminuye en dos unidades. Contraigamos, p. ej., el tensor de III rango $Q_{\alpha\beta\gamma}$ respecto de los dos primeros signos. La magnitud $Q_{\alpha\alpha\gamma}$ que obtenemos es un tensor de I rango (vector) lo gue vemos directamente de la igualdad (Comp. I.14) si recordamos que $a_{\alpha\mu} a_{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu}$ y que el índice de la suma (signo mudo) puede ser cualquiera:

$$Q'_{\alpha\alpha\gamma} = a_{\gamma\varepsilon} Q_{\mu\mu\varepsilon}.$$

De acuerdo con (Comp. I.2) la magnitud $Q_{\alpha\alpha\gamma}$ es un vector.

Para la contracción de un vector de II rango obtenemos un tensor de rango nulo, es decir, un invariante:

$$T_{\alpha\alpha} = \text{inv.} \qquad \text{(Comp. I.15)}$$

Por lo tanto, la suma de los componentes diagonales de un tensor de II rango no variará con los giros del sistema de coordenadas.

Examinemos también algunas operaciones diferenciales. Hallemos la ley de transformación del operador del gradiente $\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3$). Tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x'_\alpha} = \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} = a_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta}. \qquad \text{(Comp. I.16)}$$

Por consiguiente de acuerdo con (Comp. I.2) el operador del gradiente es un vector. Su multiplicación por el escalar $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ conduce al vector $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}$, mientras que la multiplicación por el vector $A_\beta(x_1, x_2, x_3)$ proporciona un tensor de II rango $\dfrac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$). Por definición, la contracción del último tensor es la *divergencia* del vector:

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} \equiv \operatorname{div} A = \text{inv.} \qquad \text{(Comp. I.17)}$$

En conclusión damos al lector la posibilidad de demostrar independientemente la siguiente afirmación: si A_α y B_β son vectores y en todos los sistemas de coordenadas entre ellos existe una ligazón del tipo $A_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} B_\beta$, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ es un tensor de II rango.

Comp. I.3. Simetría de tensores. Llamamos *simétrico* un tensor de II rango si él no varía al permutar los índices de lugar:

$$S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}. \qquad \text{(Comp. I.18)}$$

El tensor simétrico contiene 6 componentes independientes. Si para semejante permutación varía de signo, tal tensor se denomina *antisimétrico:*

$$A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}. \qquad \text{(Comp. I.19)}$$

El tensor antisimétrico sólo tiene 3 componentes independientes. Sus componentes diagonales son ceros. Es fácil propagar a tensores de rangos más altos el concepto de simetría y antisimetría.

Un tensor de segundo rango $T_{\alpha\beta}$, tomado al azar, puede ser representado y, con ello, de único modo, en la forma de la suma de tensores simétrico y antisimétrico:

$$T_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}, \qquad \text{(Comp. I.20)}$$

donde

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}),\ A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}). \qquad \text{(Comp. I.21)}$$

Los componentes de los tensores pueden ser tanto magnitudes reales, como complejas. En el segundo caso desempeñan importante papel las nociones de tensores hermitiano y antihermitiano. Un tensor de II rango recibe el nombre de ***hermitiano*** si satisface la relación

$$T^h_{\alpha\beta} = \overset{*}{T}{}^h_{\beta\alpha}, \qquad \text{(Comp. I.22)}$$

donde el asterisco designa la conjugación compleja. Definición del tensor *antihermitiano*:

$$T^{ah}_{\alpha\beta} = -\overset{*}{T}{}^{ah}_{\beta\alpha}. \qquad \text{(Comp. I.23)}$$

El tensor de II rangó arbitrario $T_{\alpha\beta}$ puede representarse en forma de la suma de tensores hermitiano y antihermitiano:

$$T_{\alpha\beta} = T^h_{\alpha\beta} + T^{ah}_{\beta\alpha}, \qquad \text{(Comp. I.24)}$$

donde

$$T^h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} + T^*_{\beta\alpha}),\ T^{ah}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} - T^*_{\beta\alpha}). \qquad \text{(Comp. I.25)}$$

Señalemos algunas propiedades de semejantes tensores. La contracción de los tensores hermitiano y antihermitiano es una magnitud puramente imaginaria. En efecto, con ayuda de (Comp. I.22) y (Comp. I.23), obtenemos

$$\overset{*}{T}{}^h_{\alpha\beta}\ \overset{*}{T}{}^{ah}_{\alpha\beta} = -T^h_{\beta\alpha} P^{ah}_{\beta\alpha} = -T^h_{\alpha\beta} P^{ah}_{\alpha\beta},$$

lo que coincide con la definición de número imaginario. Por vía análoga es fácil cerciorarse que $T^h_{\alpha\beta} P^h_{\alpha\beta}$ y $T^{ah}_{\alpha\beta} P^{ah}_{\alpha\beta}$ son magnitudes reales.

Comp. I.4. Tensores invariantes $\delta_{\alpha\beta}$ y $e_{\alpha\beta\gamma}$. Sea que en cierto sistema de coordenadas el tensor simétrico $\delta_{\alpha\beta}$ tiene componentes iguales a 0 para $\alpha \neq \beta$ e iguales a 1 si $\alpha = \beta$. Semejante tensor se llama *unitario simétrico de II rango.* Hallemos los valores de sus componentes en el sistema girado:

$$\delta'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\mu} a_{\beta\nu} \delta_{\mu\nu} = a_{\alpha\mu} a_{\beta\mu} = \delta_{\alpha\beta}. \qquad \text{(Comp. I.26)}$$

De este modo el tensor unitario $\delta_{\alpha\beta}$ en todos los sistemas de coordenadas tiene la misma forma a pesar de la transformación según la regla (Comp. I.4). Es un tensor invariante.

Determinemos el tensor unitario antisimétrico de III rango $\mathbf{e}_{\alpha\beta\gamma}$ en el sistema inicial de coordenadas mediante las siguientes condiciones:

1. $\mathbf{e}_{123} = 1.$ (Comp. I.27)

2. El tensor varía de signo al conmutar cualesquiera dos índices, es decir,

$$\mathbf{e}_{\beta\alpha\gamma} = -\mathbf{e}_{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{e}_{\alpha\gamma\beta} = \ldots \quad \text{(Comp. I.28)}$$

De aquí sigue que los valores de los componentes de $\mathbf{e}_{\alpha\beta\gamma}$ sólo pueden ser iguales a ± 1 ó bien a 0:

$$\mathbf{e}_{123} = \mathbf{e}_{312} = \mathbf{e}_{231} = 1, \qquad \mathbf{e}_{213} = \mathbf{e}_{321} = \mathbf{e}_{132} = -1,$$

todos los demás $\mathbf{e}_{\alpha\beta\gamma}$ que tengan aunque no sea más que dos índices iguales, serán iguales a cero.

El símbolo $\mathbf{e}_{\alpha\beta\gamma}$ es cómodo para anotar los productos de vectores y rotores. Recordando la definición del producto vectorial y empleando la definición de $\mathbf{e}_{\alpha\beta\gamma}$ podemos escribir las siguientes fórmulas de utilidad:

$$[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}]_\gamma = \mathbf{e}_{\alpha\beta\gamma} A_\alpha B_\beta, \quad \text{(Comp. I.29)}$$

$$\operatorname{rot}_\gamma \boldsymbol{A} = [\nabla \times \boldsymbol{A}]_\gamma = \mathbf{e}_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha}. \quad \text{(Comp. I.30)}$$

Hallemos la forma del tensor $\mathbf{e}'_{\alpha\beta\gamma}$ en el sistema girado de coordenadas:

$$\mathbf{e}'_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\mu} a_{\beta\nu} a_{\gamma\varepsilon} \mathbf{e}_{\mu\nu\varepsilon} = (e'_\alpha)_\mu (e'_\beta)_\nu (e'_\gamma)_\varepsilon e_{\mu\nu\varepsilon} = [e'_\alpha \times e'_\beta] \cdot e'_\gamma = e_{\alpha\beta\gamma}. \quad \text{(Comp. I.31)}$$

Aquí, la segunda igualdad ha sido escrita partiendo de (Comp. I.3), mientras que la tercera, con ayuda de (Comp. I.29). Así, pues, como vemos el tensor $e_{\alpha\beta\gamma}$ lo mismo que $\delta_{\alpha\beta}$, es invariante, es decir, sus componentes son iguales en todos los sistemas de coordenadas.

Supongamos que tenemos cierto tensor antisimétrico de II rango $B_{\alpha\beta} = -B_{\beta\alpha}$. Compongamos el vector

$$A_\alpha = \frac{1}{2} \mathbf{e}_{\alpha\beta\gamma} B_{\beta\gamma}. \quad \text{(Comp. I.32)}$$

El vector así formado recibe el nombre de vector *dual* al tensor $B_{\beta\gamma}$. Tanto este tensor que tiene tres componentes independientes como el vector A_α portan una información absolutamente igual, ya que, de hecho, la cuestión se redujo a la redesignación de los componentes:

$$A_1 = B_{23}, \quad A_2 = -B_{13}, \quad A_3 = B_{12}. \quad \text{(Comp. I.33)}$$

A cada tensor antisimétrico de II rango puede contraponérsele un vector dual.

Comp. I.5. Conversión de un tensor simétrico de II rango a la forma diagonal. Sea que tenemos un tensor simétrico de II rango $S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$. Examinemos la dirección en el espacio, determinada por el vector unitario n que satisface la siguiente condición:

$$S_{\alpha\beta} n_\beta = \lambda n_\alpha, \quad \text{(Comp. I.34)}$$

donde λ es cierto número desconocido hasta el momento (escalar). Las direcciones que satisfacen las condiciones (Comp. I.34) llevan el nombre de *direcciones principales,* en tanto que la magnitud λ, *valores principales* del tensor simétrico de II rango. Demostremos el siguiente teorema:

Un tensor real de II rango tiene no menos de tres direcciones principales perpendiculares entre sí y no más de tres valores principales reales.

Para empezar, establezcamos la realidad de los valores principales. Para la comunidad no vamos a suponer que el vector n es real. Multiplicando (Comp. I.34) por n^*_α, tendremos

$$n^*_\alpha S_{\alpha\beta} n_\beta = \lambda n^*_\alpha n_\alpha. \quad \text{(Comp. I.35)}$$

Después de realizar la conjugación compleja de ambos miembros de la última igualdad, haciendo uso de la realidad y la simetría de $S_{\alpha\beta}$, así como cambiando los signos mudos, tendremos

$$n_\alpha^* S_{\alpha\beta} n_\beta = \lambda^* n_\alpha n_\alpha^*. \qquad \text{(Comp. I.36)}$$

La comparación de los segundos miembros de las dos últimas igualdades demuestra la realidad de λ:

$$\lambda = \lambda^*. \qquad \text{(Comp. I.37)}$$

Para hallar los posibles valores de λ estudiamos (Comp. I.34) como un sistema de ecuaciones homogéneas algebraicas respecto de las incógnitas n_α ($\alpha = 1, 2, 3$). Para la compatibilidad de las ecuaciones hay que igualar a cero el determinante del sistema:

$$\begin{vmatrix} S_{11} - \lambda & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} - \lambda & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(Comp. I.38)}$$

Ésta es una ecuación algebraica de 3-er grado respecto de λ, con la particularidad de que sus raíces son reales lo mismo que se demostró más arriba. Así, pues, tenemos las raíces $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$. En el caso general, $\lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)} \neq \lambda^{(3)}$, aunque son posibles también las raíces múltiples $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} \neq \lambda^{(3)}$ o bien $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)}$.

Primero, examinemos el caso cuando las raíces son diferentes. Sustituyendo en (Comp. I.34) sucesivamente $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$ podemos expresar dos proyecciones de cada uno de los vectores $n_\alpha^{(1)}$, $n_\alpha^{(2)}$, $n_\alpha^{(3)}$ por la tercera que se determina de las condiciones de normación $n_\alpha^{(1)} n_\alpha^{(1)} = 1$, etc. Las tres proyecciones son reales, ya que los coeficientes de las ecuaciones (Comp. I.34) también lo son.

Para demostrar la perpendicularidad mutua de $n_\alpha^{(1)}$ y $n_\alpha^{(2)}$ escribamos la ecuación

$$S_{\alpha\beta} n_\beta^{(1)} = \lambda^{(1)} n_\alpha^{(1)}; \qquad \text{(Comp. I.39)}$$

la multiplicamos por $n_\alpha^{(2)}$ y sumamos por α:

$$n_\alpha^{(2)} S_{\alpha\beta} n_\beta^{(1)} = \lambda^{(1)} (n^{(1)} \cdot n^{(2)}). \qquad \text{(Comp. I.40)}$$

Cambiando de lugar los índices (1) y (2), tendremos

$$n_\alpha^{(1)} S_{\alpha\beta} n_\beta^{(2)} = \lambda^{(2)} (n^{(2)} \cdot n^{(1)}). \qquad \text{(Comp. I.41)}$$

Sustrayendo estas igualdades miembro por miembro y tomando en consideración la simetría de $S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$, hallamos

$$(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})(n^{(1)} \cdot n^{(2)}) = 0,$$

de donde

$$n^{(1)} \cdot n^{(2)} = 0 \text{ para } \lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)}, \qquad \text{(Comp. I.42)}$$

lo que queríamos demostrar.

En el caso de dos raíces múltiples ($\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}$) de las tres ecuaciones del sistema (Comp. I.34) sólo una es independiente, en tanto que las dos otras son su corolario. Por esta razón, $n^{(1)}$ y $n^{(2)}$ se determinan no unívocamente, es decir, en el plano perpendicular a $n^{(3)}$ podemos tomar cualquier par de direcciones perpendiculares entre sí. Por fin, si $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)}$ cualquier dirección en el espacio es principal, por lo que cualesquiera tres ejes perpendiculares entre sí pueden ser tomados como las direcciones principales.

La gran importancia de las direcciones principales consiste en lo siguiente: si los ejes de coordenadas se hacen coincidir con las direcciones principales, el tensor tomará la forma diagonal

$$(S'_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(3)} \end{pmatrix}, \qquad \text{(Comp. I.43)}$$

con la particularidad de que en la diagonal principal se encontrarán los valores principales. De esto podemos cerciorarnos escribiendo la ecuación (Comp. I.34) en los ejes principales en los que $n'^{(1)}$ (1, 0, 0), $n'^{(2)}$ (0, 1, 0), $n'^{(3)}$ (0, 0, 1). De las igualdades (Comp. I.34) escritas para $\lambda^{(1)}$ y $n_\alpha^{(1)}$, obtenemos directamente que $S'_{11} = \lambda^{(1)}$, $S'_{21} = S'_{31} = 0$, etc.

Hagámonos la pregunta ¿es posible representar en forma diagonal el tensor antisimétrico $B_{\alpha\beta} = -B_{\beta\alpha}$? Como hemos visto con anterioridad (véase las fórmulas (Comp. I.33)) semejante tensor es equivalente a un vector y lo que podemos hacer mediante el giro del sistema de coordenadas es hacer coincidir uno de los ejes con el sentido del vector. Como resultado sólo serán distintos de cero dos de los componentes diagonales, p.ej., $B_{23} = -B_{32} \neq 0$. Pero ya es imposible reducirlos a cero.

Por una causa análoga no se puede dar forma diagonal por medio del giro de los ejes de coordenadas al tensor hermitiano (si Im $T^h_{\alpha\beta} \neq 0$). Como sigue de la definición (Comp. I.33), Im $T^h_{\alpha\beta}$ es un tensor real antisimétrico dual a cierto vector real. Por esto, haciendo girar los ejes de coordenadas sólo es posible diagonalizar Re $T^h_{\alpha\beta}$ que es un tensor real simétrico. Con ello, en $T^h_{\alpha\beta}$ quedan, por lo menos, dos elementos puramente imaginarios no diagonales.

Comp. I.6. Transformación de los tensores haciendo la inversión del sistema de coordenadas. Seudotensores. Más arriba hemos examinado sólo los giros de los sistemas de coordenadas. En Física tiene gran importancia la transformación de la inversión:

$$x'_\alpha = -x_\alpha, \qquad \text{(Comp. I.44)}$$

es decir, la reflexión especular de los ejes de coordenadas o bien la sustitución de los signos de las coordenadas. Señalemos que es suficiente someter a la inversión uno de los ejes, ya que la reflexión de los tres ejes se reduce a la reflexión de uno de ellos y el giro al ángulo π en el plano perpendicular al eje reflejado.

Las magnitudes que se transforman como las coordenadas durante los giros, se pueden comportar de otro modo al haber inversión. Es un ejemplo la velocidad angular de un cuerpo: su dirección se determina por el sentido de la rotación y esta última no varía siendo especular la reflexión de lo que es fácil cerciorarse examinando en un espejo el disco del tocadiscos o bien una peonza. Por esta razón, al haber inversión del sistema de coordenadas las proyecciones de la velocidad angular no varían su signo:

$$\omega'_x = \omega_x, \quad \omega'_y = \omega_y, \quad \omega'_z = \omega_z,$$

mientras que las proyecciones de la velocidad lineal o el radio vector cambian de signo

$$v'_x = -v_x, \quad v'_y = -v_y, \quad v'_z = -v_z, \text{ etc.}$$

Por lo tanto, existen dos tipos de vectores. Aquellos vectores que se comportan de «modo normal», es decir, sus proyecciones cambian de signo con la inversión de los ejes de coordenadas, reciben el nombre de vectores *reales* o *polares*. Aquellos vectores cuyas proyecciones, lo mismo que la velocidad angular o el producto vectorial de dos vectores polares, no varían su signo con la inversión de los ejes de coordenadas y llevan el nombre de axiales o *seudovectores*. Más adelante veremos que la intensidad del campo eléctrico es un vector polar, mientras que la del campo magnético, un vector axial.

Si partimos de la definición geométrica del vector, es decir, lo consideramos como un segmento dirigido, una «flecha», los vectores reales o polares se caracterizarán porque su orientación no depende de la elección del sistema de coordenadas. Debido a esto, sus proyecciones en los ejes de los sistemas inicial e invertido tendrán diferentes signos. Tales son el radio vector r de un punto fijado, la velocidad de una partícula $\mathbf{v}$, el impulso p, la fuerza F, la intensidad del campo eléctrico E y otros muchos.

En lo que atañe a los vectores axiales, tales como la velocidad angular $\bar{\omega}$, el momento de impulso $M = r \times p$ y, en general, todo producto de dos vectores polares se caracteriza porque su sentido a lo largo de cierta recta prefijada se establece por acuerdo. P.ej., la dirección de $r \times p$ puede ser establecida según la regla del tornillo levógiro o bien dextrógiro y ambas definiciones serán posibles de la misma manera. Por eso, el sentido de un vector axial, consi-

derado como una «flecha», varía por el contrario efectuando la inversión de las coordenadas, mientras que sus proyecciones en los sistemas inicial e invertido son iguales.

La definición de los vectores polares y axiales formulada más arriba también se propaga a los tensores de rango tomado al azar. Un tensor de rango s-ésimo se denomina *real* o *polar* si sus componentes adquieren el factor $(-1)^s$ con la inversión y *seudotensor,* si sus componentes *se multiplican por* $(-1)^{s+1}$. *En particular, la suma escalar del radio vector por el vector de la* velocidad angular $(\vec{\omega} \cdot r)$ es un seudoescalar: a diferencia del escalar real cambia su signo al cumplir la inversión de las coordenadas.

Información complementaria sobre los vectores y tensores tridimensionales, con considerable número de ejemplos y problemas, encontrará el lector en los libros de texto [16, 20].

Comp. II. Datos adicionales sobre los tensores en el espacio cuatridimensional seudoeuclidiano

Comp. II.1. Ligazón entre los tensores cuatri y tridimensionales. La transformación propia de Lorentz es de seis parámetros e incluye en sí tanto el movimiento uniforme y rectilíneo de los sistemas de coordenadas a velocidad relativa en dirección arbitraria, como su giro mutuo *). En el presente libro examinamos en todo lugar un tipo particular de semejante transformación, es decir, la velocidad relativa está dirigida a lo largo del eje x^1, los ejes espaciales del sistema S' están girados respecto de los ejes del sistema S a un ángulo nulo. Pero todas las deducciones y conclusiones, hechas con anterioridad sobre la base de las transformaciones de Lorentz de la forma particular, se conservan también para el caso general, sólo que los cálculos resultan ser más laboriosos. Así, pues, los giros espaciales entran en las transformaciones generales de Lorentz como uno de sus elementos.

Tomando en consideración esta observación es fácil aclarar cómo se transforman los 4-tensores de diversos rangos y sus componentes aislados durante los giros espaciales. Es evidente, que todo 4-escalar es asimismo invariante en relación con la rotación de los ejes espaciales; cualquier 4-vector A^i se descompone con las rotaciones espaciales en el 3-escalar A^0 y el 3-vector A^α ($\alpha = 1, 2, 3$) de forma que A^0 se transforma como el tiempo (invariante con relación a los giros espaciales), en tanto que A^α, como las coordenadas (radio vector).

El 4-tensor de II rango $T^{ik} = T^{ki}$ contiene el 3-tensor simétrico $T^{\alpha\beta}$, el 3-vector $A^\alpha = T^{0\alpha} = T^{\alpha 0}$ y el 3-escalar T^{00}. El 4-tensor de II rango antisimétrico $F^{ik} = -F^{ki}$ se descompone en el 3-tensor antisimétrico $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$ y el 3-vector $A^\alpha = F^{0\alpha} = -F^{\alpha 0}$. Pero el 3-tensor antisimétrico es equivalente (dual, véase el Comp. I.4) al 3-vector; éste será axial si el tensor es real (polar). De esta manera, el 4-tensor polar antisimétrico F^{ik} es equivalente a dos 3-vectores independientes: polar p y axial a:

$$(F^{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & a_z & -a_y \\ -p_y & -a_z & 0 & a_x \\ -p_z & a_y & -a_x & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(Comp. II.1)}$$

Recomendamos que el lector, desde estos puntos de vista, examine la estructura del 4-tensor antisimétrico del campo electromagnético introducido en el § 9, P.I.

Comp. II.2. Teorema de Ostrogradski — Gauss en el 4-espacio. En los §§ 13, 16, P.I haremos uso del teorema de Ostrogradski — Gauss en el espacio cuatridimensional seudoeuclidiano. Aunque la generalización de dicho teorema, bien conocido por el lector, del caso tridimensional al cuatridimensional es evidente en grado suficiente, más abajo vamos a aducir su

*) Si a estas transformaciones añadimos la inversión de los ejes espaciales (¡el eje x^0 no cambia de dirección!), el conjunto de todas las transformaciones indicadas forma el grupo completo de Lorentz (general ortocrónica). La adición a ella de las translaciones por los cuatro ejes conduce al grupo no homogéneo de Lorentz (o bien al grupo de Poincare [18]).

demostración a nivel físico riguroso dirigida a aquellos lectores para los que este problema no está suficientemente claro.

Comencemos por la definición del elemento de una hipersuperficie tridimensional en el 4-espacio. En el 3-espacio los elementos de las superficies orientados de modo perpendicular a los ejes de coordenadas se expresan en coordenadas cartesianas mediante los productos $dS = \pm dy\,dz$, $dS_y = \pm dz\,dx$, $dS_z = \pm dx\,dy$. Los signos más o menos dependen de hacia qué lado está dirigida la normal al área.

En el 4-espacio el elemento de la hipersuperficie perpendicular al eje x^0 es un volumen tridimensional elemental: $dV = dx^1\,dx^2\,dx^3$. Pero la normal al elemento puede estar orientada tanto a lo largo de x^0 (en el futuro), como en sentido opuesto a x^0 (en el pasado). Por ello, el elemento dirigido de la hipersuperficie puede tener ambos signos: $dS_0 = \pm dx^1\,dx^2\,dx^3$. De manera análoga se escriben también los tres elementos restantes de la hipersuperficie, perpendiculares a los ejes espaciales:

$$dS_1 = \pm dx^0\,dx^2\,dx^3, \quad dS_2 = \pm dx^0\,dx^1\,dx^3, \quad dS_3 = \pm dx^0\,dx^1\,dx^2.$$

A continuación veremos que estas magnitudes forman un 4-vector covariante.

Examinemos un pequeño elemento del 4-espacio Δ^4x que tiene forma de un 4-paralelepípedo rectangular con aristas Δx^0, Δx^1, Δx^2, Δx^3 paralelas a los ejes de coordenadas. Sus ocho caras forman una hipersuperficie cerrada tridimensional σ. Confeccionemos la integral

$$\oint_{(\sigma)} A^i dS_i$$

por la indicada pequeña hipersuperficie cerrada, donde A^i es un 4-vector arbitrario integrable que depende de las coordenadas. Esta integral es la suma de las integrales por las ocho caras que limitan el 4-paralelepípedo. Examinemos dos integrales por las caras perpendiculares al eje x^0:

$$\int A^0(x^0 + \Delta x^0, x^1, x^2, x^3)dx^1\,dx^2\,dx^3 - \int A^0(x^0, x^1, x^2, x^3) \times$$
$$\times\, dx^1\,dx^2\,dx^3 \approx \frac{\partial A^0}{\partial x^0}\Delta x^0\Delta x^1\Delta x^2\Delta x^3 = \frac{\partial A^0}{\partial x^0}\Delta^4 x.$$

Hemos empleado la pequeñez de las caras y tomado en consideración sólo los términos de orden inferior. Resultados análogos proporcionarán los restantes pares de sumandos, así que

$$\oint_{(\sigma)} A^i dS_i \approx \frac{\partial A^i}{\partial x^i}\Delta^4 x. \qquad \text{(Comp. II.2)}$$

Como en el segundo miembro $\Delta^4x = \text{inv}$ (véase el §2, P.I) y $\partial A^i/\partial x^i = \text{inv}$ (véase el §2, P.I) el producto $A^i dS_i$ en el primer miembro debe ser invariante. De esto se deduce que dS_i es un 4-vector covariante.

Apliquemos ahora el resultado (Comp. II.2) al 4-volumen finito Ω. Dividiéndolo en pequeños paralelepípedos y sumando los dos miembros de (Comp. II.2) por todos ellos, obtenemos:

$$\sum_a \oint_{(\sigma_a)} A^i dS_i \approx \sum_a \frac{\partial A^i}{\partial x^i}\Delta^4 x_a.$$

Las integrales por las caras interiores, comunes para dos paralelepípedos, se reducen debido a que los elementos dS_i tendrán en dichas caras diferentes signos y en el primer miembro sólo queda la integral por la hipersuperficie exterior $\sum$ que abarca el 4-volumen Ω a examinar.

En el límite el segundo miembo pasará a la integral por el 4-volumen y la igualdad se convertirá en una expresión de precisión:

$$\oint_{(\Sigma)} A^i dS_i = \int_{(\Omega)} \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d^4x. \qquad \text{(Comp. II.3)}$$

Ella expresa el teorema de Ostrogradski — Gauss en un 4-espacio.

Comp. III. Principio variacional para los sistemas continuos

La mecánica clásica, cuyos fundamentos fueron formulados por Newton, fue la primera teoría científica física como entendemos esto hoy día. Ha sido la base para el desarrollo de otras ramas de física teórica: electrodinámica, mecánica cuántica, física estadística, teoría de las partículas elementales, etc. Los métodos matemáticos y muchas de las nociones elaboradas en mecánica clásica son utilizados extensamente en otras partes de la física teórica. El principio variacional es una de las más profundas ideas introducidas por la mecánica clásica en la teoría clásica y cuántica del campo. Por esta razón, la vía natural de su introduccion en la teoría clásica del campo consiste en el paso al límite desde la mecánica de masas puntuales discretas a la mecánica del sistema continuo.

Comp. III.1. Vibraciones de un medio elástico como límite de las vibraciones de masas puntuales discretas. Examinemos una cadena lineal de masas puntuales m unidas con muelles de igual rigidez k (fig. Comp. III.1). Recordemos la descripción del movimento de semejante

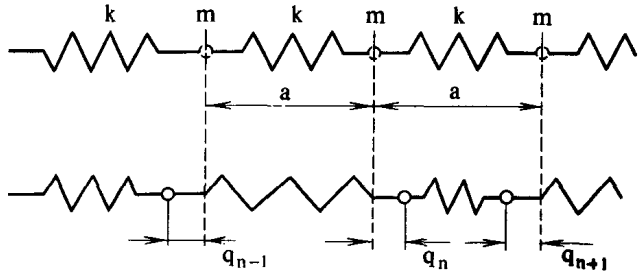

Fig. Comp. III.1.

sistema en la mecánica clásica. Se introducen las coordenadas generalizadas $q_n(t)$ que son las desviaciones de las masas puntuales de la posición de equilibrio. Las energías cinética T y potencial U del sistema se dan mediante las expresiones

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m\dot{q}_n^2, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} k(q_{n+1} - q_n)^2. \qquad \text{(Comp. III.1)}$$

Vamos a considerar que las masas extremas están fijadas en las posiciones de equilibrio de forma que $q_1 = q_N = 0$ para todas las t.

Podemos obtener las ecuaciones de movimento del sistema de la condición del carácter estacionario de la acción

$$\delta S = 0, \text{ donde } S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_n, \dot{q}_n)dt,$$

$$L(q_n, \dot{q}_n) = T - U = \frac{1}{2} \sum_n [m\dot{q}_n^2 - k(q_{n+1} - q_n)^2]. \qquad \text{(Comp. III.2)}$$

La condición $\delta S = 0$ conduce a la ecuación de movimiento en la forma lagrangiana

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0, \qquad \text{(Comp. III.3)}$$

que al sustituir (Comp. III.2) toman el aspecto

$$m\ddot{q}_n - k(q_{n+1} - q_n) + k(q_n - q_{n-1}) = 0. \qquad \text{(Comp. III.4)}$$

Consideremos que nuestro sistema mecánico es un modelo discreto de una barra elástica. Para que nuestro modelo sea equivalente a lo que en mecánica del medio continuo se ha adoptado llamar barra elástica hay que realizar el paso límite (el número de masas tenderá al infinito, mientras que la distancia de equilibrio a entre ellas, a cero). A nosotros nos interesará en particular cómo se modifican con semejante paso límite las funcionaes de Lagrange y el principio variacional. Pero comenzaremos la consideración por el paso límite en las ecuaciones de movimiento.

Dividamos los dos miembros de (Comp. III.4) por la longitud de equilibrio de un eslabón a y reescribamos la igualdad en la forma

$$\frac{m}{a}\ddot{q}_n - ka\left(\frac{q_{n+1} - q_n}{a^2}\right) + ka\left(\frac{q_n - q_{n-1}}{a^2}\right) = 0. \qquad \text{(Comp. III.5)}$$

La razón $m/a = \mu$ es la masa que corresponde a la unidad de longitud de la barra. Esta masa debe ser considerada como una constante. El producto ka entra en la expresión de la fuerza que actúa entre las masas vecinas: $F = k(q_{n+1} - q_n) = ka\dfrac{q_{n+1} - q_n}{a}$. La razón $\xi = \dfrac{q_{n+1} - q_n}{a}$ es la longitud relativa de uno de los eslabones; recordemos que de acuerdo con la ley de Hooke $F = E\xi$, donde ξ es el alargamiento relativo, E, el módulo de Young que es una de las constantes elásticas de la sustancia. Así, pues, $ka = E$ tiene el sentido del módulo de Young y debe considerarse constante con el paso límite.

Seguidamente introduzcamos la coordenada de equilibrio del nodo n-ésimo: $x_n = na$. Para un sistema discreto ella varía a saltos, pero con el paso límite $a \to 0$, $n \to \infty$ la magnitud x se convierte en una variable continua (coordenada cartesiana). Considerando que a es un pequeño incremento de la coordenada x, tendremos

$$\frac{q_{n+1} - q_n}{a} = \frac{q(x + a) - q(x)}{a} \approx \frac{\partial q(x)}{\partial x};$$

de modo análogo

$$\frac{q_n - q_{n-1}}{a} \approx \frac{\partial q(x - a)}{\partial x};$$

debemos recordar que q también depende de t.

Teniendo en cuenta las designaciones introducidas (Comp. III.5) toma la forma

$$\mu\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{E}{a}\left[\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_x - \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{x-a}\right] = 0.$$

Por fin, la diferencia entre las dos primeras derivadas en puntos cercanos dividida por a, se sustituye por la segunda derivada por las coordenadas y obtenemos la ecuación de movimiento de la barra elástica

$$\mu\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - E\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0. \qquad \text{(Comp. III.6)}$$

Esta es una ecuación de onda que puede ser reescrita con el aspecto

$$\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0, \qquad \text{(Comp. III.7)}$$

donde $c_l = \sqrt{E/\mu}$ es la velocidad de las ondas longitudinales.

Ahora dirijámonos a las funciones de Lagrange (Comp. III.2) y realicemos el paso límite también en ella:

$$L = \frac{1}{2}\sum_n \left[\frac{m}{a}\dot{q}_n^2 - ka\left(\frac{q_{n+1}-q_n}{a}\right)^2\right]a - \frac{1}{2}\int\left[\mu\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 - E\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right]dx. \qquad \text{(Comp. III.8)}$$

Con semejante paso límite la suma por todas las partículas se convierte en una integral por la coordenada. La función que se encuentra en el integrando recibe el nombre de *densidad de la función de Lagrange* o bien *lagrangiano*:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 - E\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right]. \qquad \text{(Comp. III.9)}$$

Así, pues, hemos obtenido la siguiente regla de paso de la mecánica de los puntos materiales a la de los sistemas continuos:

1. El número de la partícula n pasa a la coordenada x.

2. La coordenada generalizada $q_n(t)$ se convierte en la función de la coordenada y el tiempo: $q(x, t)$ o bien, durante el movimiento por las tres dimensiones, $q(r, t)$. El número de las coordenadas generalizadas que prefijan el estado del medio continuo, puede ser arbitrario. P.ej., siendo tridimensional el movimiento de un medio elástico el vector de deformación tiene tres componentes $q_\alpha(r, t)$, $\alpha = 1, 2, 3$. El campo electromagnético se describe en cada punto por medio de cuatro coordenadas generalizadas, es decir, con los componentes del 4-potencial $A_i(r, t)$, $i = 0, 1, 2, 3$, etc.

3. La función de Lagrange se expresa en forma de un intervalo por las coordenadas del lagrangiano que en el ejemplo examinado más arriba depende de las primeras derivadas de las coordenadas generalizadas (funciones del campo). En lo que atañe al caso general, él puede depender también de las propias coordenadas generalizadas $q^i(r, t)$, así como de las coordenadas espaciales r y el tiempo t:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}\left(q^i, \frac{\partial q^i}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial q^i}{\partial t}, r, t\right). \qquad \text{(Comp. III.10)}$$

4. Como la función de Lagrange L se convierte en una integral por el espacio, la acción S se expresa en forma de una integral por la variedad cuatridimensional:

$$S = \int \mathscr{L}\left(q^i \frac{\partial q^i}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial q^i}{\partial t}, r, t\right) d^3x\, dt. \qquad \text{(Comp. III.11)}$$

En (Comp. III.10) y (Comp. III.11) hemos empleado los supraíndices. Pero en el caso dado no se numeran obligatoriamente los componentes covariantes de cierto 4-vector.

Comp. III.2. Forma lagrangiana de las ecuaciones de movimiento de un medio continuo. Ahora, aclaremos la cuestión acerca de cómo se debe formular el principio variacional para los sistemas continuos, con el fin de que de él se desprendan las ecuaciones de movimiento. Esto será hecho sobre la base de la analogía con la mecánica del punto material, que con detalle fue aclarada en el Comp. III.1.

Para un sistema continuo el papel de coordenadas generalizadas lo desempeñan las funciones del campo $q^i(r, t)$. Con el índice i y las coordenadas espaciales r se numeran ahora los

grados de libertad del sistema. Ellos consitutyen un conjunto continual. Para la variación de la acción las coordenadas generalizadas $q^i(r, t)$ deben recibir pequeños incrementos independientes $\delta q^i(r, t)$ que no están relacionados con la variación de las coordenadas y el tiempo, de forma semejante a cómo en la mecánica de los puntos materiales se introduce la variación $\delta q_n(t)$ en un momento fijado de tiempo y para el número de grados de libertad fijado n. En la frontera de la región de integración en (Comp. III.11), es decir, en la hipersuperficie tridimensional Σ, las coordenadas generalizadas deben tener el valor prefijado y sus variaciones se anulan:

$$\delta q^i(r, t)|_\Sigma = 0. \qquad \text{(Comp. III.12)}$$

Tomando en consideración estas indicaciones, llamadas a remarcar la analogía con la mecánica de un sistema de los puntos materiales, podemos ahora formular el principio variacional para un sistema continuo del modo siguiente.

La evolución real del sistema continuo en el espacio y el tiempo para los valores prefijados de sus coordenadas generalizadas en el límite de una región cuatridimensional se produce de manera que la acción S tiene valor estacionario, es decir, su primera variación se reduce a cero:

$$\delta S = 0. \qquad \text{(Comp. III.13)}$$

Pasando al cálculo de la primera variación de la acción, haremos aquí uso de las reducciones de las designaciones para las derivadas:

$$\frac{\partial q^i}{\partial x_\alpha} \equiv q^i_{,\alpha}\ (\alpha = 1, 2, 3); \frac{\partial q^i}{\partial t} \equiv q^i_{,t}.$$

Esto permite simplificar la anotación de las relaciones obtenidas.

Consideramos la acción como el funcional de las coordenadas generalizadas y calculamos la diferencia δq^i por el primer orden

$$\delta S = S[q^i(r, t) + \delta q^i(r, t)] - S[q^i(r, t)] =$$
$$= \sum_i \int \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i_{,t}} \delta q^i_{,t} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i_{,\alpha}} \delta q^i_{,\alpha} \right\} d^3x\, dt. \qquad \text{(Comp. III.14)}$$

Aquí entra la suma por todos los valores del índice i escrita de modo explícito (es decir, por todos los componentes de las funciones del campo), en tanto que en el último sumando bajo la integral la suma desde 1 hasta 3 por las coordenadas cartesianas x_α escrita no de modo explícito.

Aprovechando el hecho de que la operación de variación δ se realiza con r y t constantes y, por consiguiente, es conmutativa con la operación de diferenciación, escribimos

$$\delta q^i_{,t} = \frac{\partial}{\partial t} \delta q^i, \qquad \delta q^i_{,\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \delta q^i$$

e integramos los términos correspondientes en (Comp. III.14) por partes:

$$\int \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i_{,t}} \delta q^i_{,t} d^3x\, dt = \int d^3x \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i_{,t}} \delta q^i(r, t)|_\Sigma - \int \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i_{,t}} \right) \delta q^i(r, t) d^3x\, dt.$$

(Comp. III.15)

De manera análoga

$$\int \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i_{,\alpha}} \delta q^i_{,\alpha} d^3x\, dt = \int d^2S_\alpha dt \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i_{,\alpha}} \delta q^i(r, t)|_\Sigma - \int \left(\frac{d}{dx_\alpha} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i_{,\alpha}} \right) \delta q^i(r, t) d^3x\, dt.$$

(Comp. III.16)

Aquí d^2S_α es la proyección de un elemento de la superficie bidimensional sobre el eje x_α.

Los términos destacados que deben integrarse por la hipersuperficie tridimensional, se anulan debido a (Comp. III.12). La ecuación (Comp. III.13), tomando en consideración (Comp. III.14) — (Comp. III.16), toma la forma

$$\delta S = \int \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i_{,t}} - \frac{d}{dx_\alpha} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i_{,\alpha}} \right\} \delta q^i(r, t) d^3x\, dt = 0. \quad \text{(Comp. III.17)}$$

Como la región de integración, lo mismo que las variaciones de δq^i son arbitrarias, de (Comp. III.17) se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento del medio continuo en la forma lagrangiana *):

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i_{,t}} - \frac{d}{dx_\alpha} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i_{,\alpha}} = 0, \quad \text{(Comp. III.18)}$$

donde toma todo el conjunto de posibles valores (¡suma por α!).

Examinemos dos ejemplos de deducción de ecuaciones concretas de la evolución de los campos de onda de las ecuaciones de Lagrange (Comp. III.18).

1. Tomemos el lagrangiano (Comp. III.9). Hallamos

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_{,t}} = \mu \frac{\partial q}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_{,x}} = -E \frac{\partial q}{\partial x}$$

y la ecuación de movimiento

$$\mu \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0$$

que, como era de esperar, coincide con (Comp. III.6).

2. Investiguemos el campo escalar complejo $\psi(r, t) = q^1(r, t) + iq^2(r, t)$. Prefijemos un lagrangiano del tipo

$$\mathscr{L} = \frac{i\hbar}{2} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\alpha} + U \psi \psi^*, \quad \text{(Comp. III.19)}$$

donde m, $\hbar$ son constantes, $U(r, t)$ una función real prefijada de las coordenadas y el tiempo. El lagrangiano (Comp. III.19) y la acción S son reales a pesar de que ψ es una magnitud compleja. La ψ compleja es equivalente a dos campos reales q^1 y q^2. En lugar de considerar independientes las variaciones δq^1 y δq^2 es más cómodo elegir en calidad de tales sus combinaciones lineales:

$$\delta q^1 + i\delta q^2 = \delta\psi \text{ y } \partial q^1 - i\delta q^2 = \delta\psi^*.$$

La ecuación (Comp. III.18), al variar la acción por ψ^*, toma la forma

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^*} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^*_{,t}} - \frac{d}{dx_\alpha} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^*_{,\alpha}} = 0. \quad \text{(Comp. III.20)}$$

---

*) En las ecuaciones (Comp. III.15) — (Comp. III.18) escribimos, como esto debe ser, las derivadas directas d/dt y d/dx_α. Esto quiere decir, que en el lagrangiano $\mathscr{L}$ debe tomarse en consideración tanto la dependencia explícita de x_α y t, como la dependencia de estas variables por intermedio de q^i y sus derivadas. Pero x_α y t para el sistema continuo, a diferencia de la mecánica del punto material, son siempre variables independientes, por ello, p.ej.,

$$\frac{d}{dt} q^i \equiv \frac{\partial q(x_\alpha, t)}{\partial t}.$$

Calculando

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^*} = -\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial \psi}{\partial t} + U\psi, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^*_{,t}} = \frac{i\hbar}{2}\psi, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^*_{,\beta}} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial \psi}{\partial x_\beta}$$

hallamos la euación del campo

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi. \qquad \text{(Comp. III.21)}$$

Esta es la ecuación de Schrödinger para la función de onda de una partícula no relativista en el campo potencial $U(r, t)$ si $\hbar$ y m son la constante de Planck y la masa de la partícula.

Cuando el método lagrangiano se utiliza en la teoría del campo, la forma del lagrangiano no se deduce mediante el paso límite de la función de Lagrange de cualquier sistema mecánico, como lo hicimos en el caso del lagrangiano (Comp. III.9), ya que los campos electromagnéticos y otros no pueden ser reducidos a modelos mecánicos. La forma del lagrangiano se postula, por regla, sobre la base de unos u otros razonamientos. El lector tiene más arriba ejemplos de semejante enfoque (donde, sin embargo, el lagrangiano fue escrito sin ninguna clase de argumentos) y asimismo encontrará en el § 13. P.I, en donde con detalle se examina la elección del lagrangiano del campo electromagnético.

Comp. IV. Función delta de Dirac

Comp. IV.1. Definición y propiedades generales. Llegamos a la noción de la función delta al intentar describir la densidad de la carga $\rho(r)$ para una partícula puntual. Sea que la partícula se halla en el origen de coordenadas y tiene una carga e. Entonces será evidente que la función $\rho(r)$ debe poseer las siguientes propiedades:

1. $\rho(r) = 0$ para $r \neq 0$. (Comp. IV.1)
2. Si $r \to 0$ la densidad $\rho(r)$ debe crecer con tal rapidez que

$$\int_{(\Delta V)} \rho(r)d^3x = e, \qquad \text{(Comp. IV.2)}$$

es decir, la integral tomada por cualquier volumen ΔV que contiene el punto donde se encuentra la partícula, tiene valor finito igual a la carga e.

Después de escribir $\rho(r) = e\delta(r)$, de (Comp. IV.1) — (Comp. IV.2) obtenemos las condiciones que determinan la función delta tridimensional:

1. $\delta(r) = 0, r \neq 0,$
   $\delta(r) \to \infty, r \to 0.$ (Comp. IV.3)
2. $\int_{(\Delta V)} \delta(r)d^3x = 1.$ (Comp. IV.4)

Mediante las relaciones análogas se determina la función delta unidimensional:

$$\delta(x) = 0, x \neq 0, \delta(x) \to \infty, x \to 0; \qquad \text{(Comp. IV.5)}$$

$$\int_{\Delta} \delta(x)dx = 1,$$

donde Δ es el segmento del eje x que contiene el punto $x = 0$; la función delta se refiere a la clase de funciones singulares generalizadas. Adquiere exacto sentido bajo la integral. Examinemos la integral del producto de la función delta por la función $f(x)$ continua y acotada:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x)f(x)dx.$$

Como $\delta(x) = 0$ si $x \neq 0$, sólo proporciona aportación en la integral un pequeño entorno ε del punto $x = 0$, en el que $f(x)$ es constante e igual a $f(0)$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x)f(x)dx = f(0). \qquad \text{(Comp. IV.6)}$$

Seguidamente, sustituyendo la variable x por $x - a$, hallamos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x - a)f(x)dx = f(a) \qquad \text{(Comp. IV.7)}$$

si el intervalo (x_1, x_2) incluye el punto $x = a$. Las igualdades (Comp. IV.5), (Comp. IV.6) muestran que $\delta(x)$ es una función par de su argumento:

$$\delta(x) = \delta(-x). \qquad \text{(Comp. IV.8)}$$

Con ayuda de la última propiedad, introduciendo la variable $|\alpha| x = y$, nos cercioramos de la justeza de las relaciones

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(\alpha x)f(x)dx = \frac{1}{|\alpha|} f(0). \qquad \text{(Comp. IV.9)}$$

Por fin, examinemos la integral $\int_{x_1}^{x_2} \delta(g(x))f(x)dx$ en la que en el argumento de la función delta se halla cierta función suave $g(x)$. En la integral sólo ofrecen aportación los puntos en los que $g(x) = 0$, es decir, las raíces de la función $g(x)$. Designándolas con a_i podemos escribir

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(g(x))f(x)dx = \sum_i \int_{a_i-\varepsilon}^{a_i+\varepsilon} \delta(g(x))f(x)dx,$$

donde ε es un pequeño número. Si $f(x)$ es continua, en el segmento $[a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon]$ es posible sustituir $f(x)$ por $f(a_i)$ y aproximar $g(x)$ al primer término del desarrollo:

$$g(x) = g'(a_i)(x - a_i).$$

Como resultado, haciendo uso de (Comp. IV.9), obtenemos

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(g(x))f(x)dx = \sum_i \frac{1}{|g'(a_i)|} f(a_i). \qquad \text{(Comp. IV.10)}$$

Esta propiedad de la función delta puede ser escrita en forma de una igualdad simbólica

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(a_i)|} \delta(x - a_i). \qquad \text{(Comp. IV.11)}$$

Si $g'(a_i) = 0$, es decir, a_i es una raíz múltiple, las relaciones (Comp. IV.10) y (Comp. IV.11) pierden su sentido. De este mismo modo no tiene sentido el producto $\delta(x)f(x)$ si la función $f(x)$ tiene singularidad para $x = 0$.

También es posible determinar la derivada de la función delta. Su sentido exacto lo contiene la fórmula

$$\int_{x_1}^{x_1} f(x) \frac{\partial \delta(x-a)}{\partial x} dx = -\frac{\partial f(a)}{\partial a} \qquad \text{(Comp. IV.12)}$$

que se obtiene integrando por partes. De manera análoga se determinan las derivadas de órdenes superiores:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\delta^{(n)}(x-a)dx = (-1)^n f^{(n)}(a). \qquad \text{(Comp. IV.13)}$$

La función $\delta(x)$ puede considerarse como la derivada de la función escalonada $\Theta(x)$. Esto sigue de la evidente igualdad

$$\int_{x_1}^{x} \delta(x)dx = \Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad \text{(Comp. IV.14)}$$

donde el límite inferior de integración x_1 es cualquier número negativo. Diferenciando esta igualdad por x, obtenemos

$$\Theta'(x) = \delta(x). \qquad \text{(Comp. IV.15)}$$

La función delta tridimensional puede considerarse como el producto de tres funciones delta unidimensionales:

$$\delta(r-a) = \delta(x-a_x)\delta(y-a_y)\delta(z-a_z). \qquad \text{(Comp. IV.16)}$$

Por esta razón, todas las propiedades de las funciones delta unidimensionales, examinadas con anterioridad, se generalizan con facilidad en el caso tridimensional.

Comp. IV.2. Ciertas representaciones de las funciones delta. Una evidente representación de la función delta y de sus derivadas es posible de obtener examinando la gráfica de cierta función contina $\delta_\varepsilon(x-a)$, tal que

$$\int_{\Delta} \delta_\varepsilon(x-a)dx = 1.$$

El parámetro ε caracteriza la anchura del intervalo en el que $\delta_\varepsilon(x-a)$ es distinta de cero (fig. Comp. IV.1). La función delta y sus derivadas se determinan como los límites

$$\delta(x-a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x-a).$$

$$\frac{\partial \delta(x-a)}{\partial x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\partial \delta_\varepsilon(x-a)}{\partial x},$$

etc.

Las propiedades de la función delta son adquiridas por muchas funciones no singulares, dependientes del parámetro, para determinados valores de dicho parámetro. Son de la mayor utilización tales representaciones de la función delta:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x - i\varepsilon} - \frac{1}{x + i\varepsilon}\right). \qquad \text{(Comp. IV.17)}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{K \to \infty} \frac{\operatorname{sen} Kx}{x}, \qquad \text{(Comp. IV.18)}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{K \to \infty} \frac{\operatorname{sen}^2 Kx}{Kx^2}, \qquad \text{(Comp. IV.19)}$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon}. \qquad \text{(Comp. IV.20)}$$

De (Comp. IV.18) se obtienen las siguientes representaciones:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{K \to \infty} \int_{-K}^{K} e^{ikx} dk = \frac{1}{\pi} \lim_{K \to \infty} \int_{0}^{K} \cos kx \, dk. \qquad \text{(Comp. IV.21)}$$

Ellas pueden ser consideradas como el desarrollo de la función delta en la integral de Fourier. En ciertas ocasiones la fórmula (Comp. IV.21) se escribe omitiendo el signo de paso límite e integrando en límites infinitos.

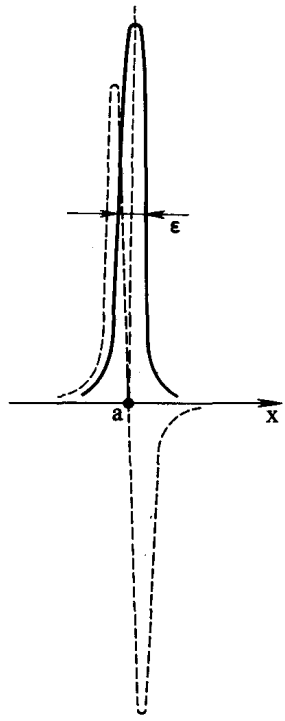

Fig. Comp. IV.1.

Es fácil cerciorarse que cualquiera de las representaciones (Comp. IV.17) — (Comp. IV.21) concuerdan con todas las propiedades (Comp. IV.5) — (Comp. IV.9), así como con la definición (Comp. IV.12) de la derivada de la función delta. Al calcular las integrales de la forma $\int f(x)\delta(x - a)dx$ con ayuda de las representaciones del tipo (Comp. IV.17) — (Comp. IV.21) hay que tener en cuenta que el paso límite debe realizarse después de la integración. P.ej., al hacer uso de (Comp. IV.18), tendremos

$$\int_{-a}^{+b} \delta(x) f(x) dx = \frac{1}{\pi} \lim_{K \to \infty} \int_{-bK}^{+bK} f\left(\frac{y}{K}\right) \frac{\operatorname{sen} y}{y} dy = f(0), \qquad \text{(Comp. IV.22)}$$

en tanto que el límite (Comp. IV.18) de por sí no existe.

Comp. IV.3. Representación de la función delta mediante las integrales de contorno en el plano complejo. Hagamos uso de la fórmula de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(x)}{x-a}\,dx = f(a), \qquad \text{(Comp. IV.23)}$$

donde $f(x)$ es una función que no tiene singularidades dentro de la región acotada por el contorno cerrado c y en el propio contorno por el que la integración se realiza en sentido antihorario. De la comparación de (Comp. IV.23) y (Comp. IV.7) sigue que $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{x-a}$ puede considerarse como la representación de $\delta(x)$ si acordamos realizar la integración por el contorno cerrado que rodea el punto $x = a$. En particular, el contorno c puede ser una circunferencia de pequeño radio.

Con frecuencia en los apéndices surge una integral por el eje real de la forma $\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a}\,dx$, donde $f(x)$ no tiene singularidades en el segmento $[x_1, x_2]$, en tanto que los límites x_1, x_2 pueden ser infinitos. Con a real, semejante integral no tiene valor determinado, ya que el integrando tiene polo en el contorno de integración. Al calcularla es necesaria información adicional que debe constar de las indicaciones de la regla de circulación del punto singular. La regla de circulación se establece, por regla, sobre la base de argumentos físicos:

$$\int_{c_{\mathrm{Re}}+c_r} \frac{f(x)}{x-a}\,dx = \int_{c_r} \frac{f(x)}{x-a}\,dx + \int_{c_{\mathrm{Re}}} \frac{f(x)}{x-a}\,dx.$$

Esto quiere decir que la integral en el primer miembro de la relación aducida más arriba, en la que la integración se realiza por todo el contorno, puede ser representada (véase la fig. Comp.

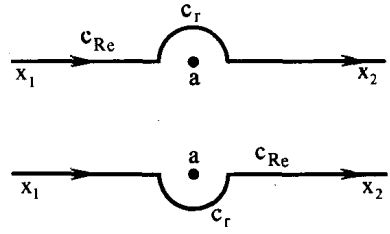

Fig. Comp. IV.2

IV.2) en forma de la suma de dos integrales. En la primera de ellas la integración se lleva a cabo bien por la circunferencia superior de pequeño radio c_r o bien por la inferior, en la segunda, por todo el resto del sector del contorno que va a lo largo del eje real (esta parte del contorno está designada con el símbolo c_{Re}).

La integral por la semicircunferencia de radio $\varepsilon \to 0$ proporciona la mitad del residuo (con signo menos ya que la circulación del polo tiene sentido horario):

$$\int_{c_r} \frac{f(x)}{x-a}\,dx = -i\pi f(a);$$

la integral por el eje real con el punto singular excluido, se calcula en el sentido del valor principal:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{x_1}^{a-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-a}\,dx + \int_{a+\varepsilon}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a}\,dx \right\} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a}\,dx.$$

Al circular el polo por la semicircunferencia inferior varía el signo del semiresiduo. Como resultado obtenemos las siguientes reglas de cálculo de la integral:

$$\frac{1}{x-a} = \mp i\pi\delta(x-a) + \mathscr{P}\frac{1}{x-a}, \qquad \text{(Comp. IV.24)}$$

donde el símbolo $\mathscr{P}$ significa el valor principal (el signo superior para el contorno a, el inferior para el b, véase la fig. Comp. IV.2).

En lugar de la deformación del contorno de integración es posible desplazar la posición del polo a una pequeña distancia del eje real. Esto se alcanza por medio de la adición al número a de una pequeña parte imaginaria: $a \to a \mp i\varepsilon$, $\varepsilon \to +0$. Para semejante sustitución la identidad (Comp. IV.24) toma la forma siguiente:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{x-a \pm i\varepsilon} = \mp i\pi\delta(x-a) + \frac{\mathscr{P}}{x-a}. \qquad \text{(Comp. IV.25)}$$

Las dos identidades (Comp. IV.24) y (Comp. IV.25) tienen carácter simbólico (operacional) y deben comprenderse en el sentido de que la integración de los miembros primero y segundo con cualquier función continua proporciona un mismo resultado.

Separando en el primer miembro de la igualdad (Comp. IV.25) las partes real e imaginaria de la expresión compleja, para $\delta(x-a)$ obtenemos la representación (Comp. IV.17) (con la sustitución de $x \to x-a$), en tanto que para el valor principal

$$\frac{\mathscr{P}}{x-a} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x-a}{(x-a)^2+\varepsilon^2}. \qquad \text{(Comp. IV.26)}$$

Una teoría matemática más rigurosa de la función delta y de otras funciones generalizadas se puede hallar en el manual de V.S. Vladímirov [30] (en ruso).

Comp. V. Conversión de las magnitudes eléctricas y magnéticas del sistema SI al de Gauss y viceversa

Tabla Comp. V.1

Fórmulas y ecuaciones [82]

Denominación	Sistema de Gauss	Sistema SI
Velocidad de la luz	c	$(\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$
Intensidad del campo eléctrico, potencial escalar	E, φ	$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}(E, \varphi)$
Inducción eléctrica	$D, \vec{\mathscr{D}}$	$\sqrt{4\pi/\varepsilon_0}(D, \vec{\mathscr{D}})$
Carga, densidad de la carga, corriente, densidad de corriente, polarización, momento dipolar eléctrico	q, ρ, J, j, P, p	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}(q, \rho, J, j, P, p)$

Tabla Comp. V.1 (continuación)

Denominación	Sistema de Gauss	Sistema SI
Inducción magnética, flujo magnético, potencial vectorial	B, Φ, A	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}\,(B, \Phi, A)$
Intensidad del campo magnético	H	$\sqrt{4\pi\mu_0}H$
Momento magnético, imantación	m, M	$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}\,(m, M)$
Constante dieléctrica, permeabilidad magnética (relativas)	ε, μ	ε, μ
Polarizabilidad eléctrica, susceptibilidad magnética	χ, k	$\frac{1}{4\pi}(\chi, k)$
Conductividad eléctrica	σ	$\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}$
Resistencia	R	$4\pi\varepsilon_0 R$
Capacidad	C	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}C$
Inductividad	L	$\frac{4\pi}{\mu_0}L$
Fuerza de Lorentz que actúa por unidad de carga	$E + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times B$	$E + \mathbf{v} \times B$
Densidad de energía del campo electromagnético en un medio no dispersante	$\frac{1}{8\pi}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$	$\frac{1}{2}(\varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2)$
Vector de Poynting	$\frac{c}{4\pi}E \times H$	$E \times H$
Ecuaciones de Maxwell	$\text{rot}\, E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$	$\text{rot}\, E = -\frac{\partial B}{\partial t}$
	$\text{rot}\, H = \frac{4\pi}{c}j + \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}$	$\text{rot}\, H = j + \frac{\partial D}{\partial t}$
Ecuaciones de Maxwell	$\text{div}\, D = 4\pi\rho$	$\text{div}\, D = \rho$
	$\text{div}\, B = 0$	$\text{div}\, B = 0$
Ecuaciones materiales	$D = \varepsilon E = E + 4\pi P$	$D = \varepsilon\varepsilon_0 E = \varepsilon_0 E + P$
	$B = \mu H = H + 4\pi M$	$B = \mu\mu_0 H = \mu_0(H + M)$
	$j = \lambda E$	$j = \lambda E$

Valores numéricos [82]

Denominación	Designación	Sistema SI	Sistema de Gauss
Longitud	l	1 m (metro)	10^2 cm
Masa	m	1 kg (kilogramo)	10^3 g
Tiempo	t	1 s (segundo)	1 s
Fuerza	F	1 N (newton)	10^5 dyn
Energía	$\mathscr{E}$, W	1 J (julio)	10^7 erg
Intensidad de radiación (potencia)	I	1 W (vatio)	10^7 ers/s
Presión	p	1 Pa (pascal)	10 dyn/cm^2
Intensidad de corriente	J	1 A (amperio)	$3 \cdot 10^9$ cm$^{3/2} \cdot$ g$^{1/2}$/s^2
Carga eléctrica	e, q	1 C (culombio)	$3 \cdot 10^9$ cm$^{3/2} \cdot$ g$^{1/2}$/s
Intensidad del campo eléctrico	E	1 V/m (voltio por metro)	$1/3 \cdot 10^{-4}$ g$^{1/2}$/cm$^{1/2} \cdot$ s
Potencial escalar	φ	1 V (voltio)	$1/3 \cdot 10^{-2}$ cm$^{1/2} \cdot$ g$^{1/2}$/s
Polarización	P	1 C/m^2 (culombio por metro cuadrado)	$3 \cdot 10^5$g$^{1/2}$/cm$^{1/2} \cdot$ s
Inducción eléctrica	D	1 C/m^2 (culombio por metro cuadrado)	$12 \cdot 10^5$g$^{1/2}$/cm$^{1/2} \cdot$ s
Capacidad eléctrica	C	1 F (faradio)	$9 \cdot 10^{11}$ cm
Resistencia eléctrica	R	1 Ω (ohmio)	$1/9 \cdot 10^{-11}$ s/cm
Conductividad eléctrica	λ	1 S/m (siemenio por metro)	$9 \cdot 10^9$ s^{-1}
Flujo magnético	Φ	1 Wb (weber)	10^8 μs
Inducción magnética	B	1 T (tesla)	10^4 Gs
Intensidad del campo magnético	H	1 A/m (amperio por metro)	$4 \cdot 10^{-3}$ E
Imantación	M	1 A/m (amperio por metro)	$1/4 \cdot 10^4$ Gs
Inductancia	L	1 H (henrio)	10^9 cm

Comp. VI. Acerca del tensor energía — impulso

Comp. VI.1. Simetría del tensor energía — impulso. En el § 16, P. I vimos que el tensor energía — impulso es simétrico

$$T^{ik} = T^{ki} \qquad \text{(Comp. VI.1)}$$

Esta propiedad no es casual: está relacionada con la conservación de una variable dinámica más, que hasta el momento no habíamos examinado — el momento de impulso. Determinemos el tensor de momento de impulso para un sistema continuo cerrado en el caso tridimensional:

$$K_{\alpha\beta} = \int (x_\alpha dp_\beta - x_\beta dp_\alpha), \qquad \text{(Comp. VI.2)}$$

donde la integración está difundida por todo el volumen dV del sistema, en tanto que la magnitud $dp_\beta = g_\beta dV$ es el componente del impulso en el volumen dV del sistema. La fórmula (Comp. VI.2) es la generalización natural de la definición del momento de impulso de un siste-

ma de partículas.

$$K_{\alpha\beta} = \sum_{a=1}^{N} (x_\alpha^{(a)} p_\beta^{(a)} - x_\beta^{(a)} p_\alpha^{(a)}) \qquad \text{(Comp. VI.3)}$$

en mecánica clásica. En lugar del tensor (Comp. VI.3), por regla, se hace uso del vector dual

$$K_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} K_{\beta\gamma} = \sum_a [r_a \times p_a]_\alpha.$$

Escribamos el momento de impulso cuatridimensional, generalizando (Comp. VI.2), en la forma

$$K^{ik} = \int (x^i dP^k - x^k dP^i), \qquad \text{(Comp. VI.4)}$$

donde dP^i es el 4-vector energía — impulso. Como sigue de (16, 26) la última magnitud se expresa del modo siguiente

$$dP^i = \frac{1}{c} T^{i0} dV$$

o bien en forma más simétrica

$$dP^i = \frac{1}{c} T^{il} dS_l,$$

donde dS_l es un elemento de la hipersuperficie tridimensional $t = \text{const}$, dirigido a lo largo de la normal a ella. En el sistema de coordenadas en el que $x^0 = ct$ tenemos para indicada hipersuperficie $dS_0 = dV$, $dS_\alpha = 0$ para $\alpha = 1, 2, 3$. Así, pues,

$$K^{ik} = \int\limits_{(S)} (x^i T^{kl} - x^k T^{il}) dS_l. \qquad \text{(Comp. VI.5)}$$

Comparemos las integrales de (Comp. VI.5) tomadas por las hipersuperficies $t_1 = \text{const}$ y $t_2 = \text{const}$. Como a distancias del espacio infinitamente grandes del sistema cerrado no hay campo podemos completar la diferencia de las integrales (Comp. VI.5) con una integral por la hipersuperficie lateral y escribir

$$K^{ik}(t_1) - K^{ik}(t_2) = \oint\limits_{(\Sigma)} (x^i T^{kl} - x^k T^{il}) dS_l,$$

donde dS_l está dirigido por la normal exterior a la hipersuperficie cerrada (es decir, en la hipersuperficie $t_1 = \text{const}$, $dS_0 = -dV$, en la hipersuperficie $t_2 = \text{const}$, $dS_0 = dV$).

Con ayuda del teorema de Ostrogradski — Gauss en la 4-forma de (Comp. II.3), hallamos

$$K^{ik}(t_1) - K^{ik}(t_2) = \int \frac{\partial}{\partial x^l} (x^i T^{kl} - x^k T^{il}) d^4x. \qquad \text{(Comp. VI.6)}$$

Calculando la divergencia, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x^l} (x^l T^{kl} - x^k T^{il}) = T^{ki} - T^{ik} + x^i \frac{\partial T^{kl}}{\partial x^l} - x^k \frac{\partial T^{il}}{\partial x^l}.$$

Como $\partial T^{kl}/\partial x^l = 0$ debido a la conservación de la energía — impulso de un sistema cerrado

$$K^{ik}(t_1) - K^{ik}(t_2) = \int (T^{ki} - T^{ik}) d^4x$$

y para la conservación del momento de impulso, $K^{ik}(t_1) = K^{ik}(t_2)$, es necesaria la simetría del tensor energía — impulso.

Los componentes $T^{\alpha 0}/c = g_\alpha$ forman el 3-vector de densidad del impulso, por lo tanto la parte espacial $K^{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}$ es el momento tridimensional de impulso que puede ser escrito en forma de un tensor dual $K_{\alpha\beta}$ del vector:

$$K = \int [r \times g] dV. \qquad \text{(Comp. VI.7)}$$

Para un sistema cerrado este vector se conserva.

La conservación de los componentes espaciales-temporales significa que

$$K^{\alpha 0} = -K^{0\alpha} = \int (x_\alpha \frac{w}{c} - ct\, g_\alpha) dV = \text{const.} \qquad \text{(Comp. VI.8)}$$

Como la energía total de un sistema cerrado $W = \int w\, dV$ también se conserva, es posible dividir (Comp. VI.8) por W e introducir las designaciones

$$R = \int rw\, dV / \int w\, dV, \quad V = c^2 \int g\, dV / \int w\, dV. \qquad \text{(Comp. VI.9)}$$

Entonces la igualdad (Comp. VI.8) toma el aspecto

$$R = Vt + R_0, \qquad \text{(Comp. VI.10)}$$

donde $R_0 = \text{const}$. Las magnitudes R y V son generalizaciones relativistas naturales de las coordenadas y la velocidad del centro de inercia del sistema constituido por partículas relativistas y campo electromagnético. La fórmula (Comp. VI.10) nos muestra que el centro de inercia de un sistema cerrado se mueve a velocidad constante.

En (Comp. VI.7) — (Comp. VI.10) entendemos por w y g la densidad de energía e impulso de las partículas y el campo. Al haber sólo partículas relativistas de (Comp. VI.9) obtenemos las fórmulas conocidas de mecánica clásica:

$$R = \sum_a m_a r_a \Big/ \sum_a m_a, \quad V = \sum_a m_a v_a \Big/ \sum_a m_a.$$

Comp. VI.2. Acerca de la unicidad de determinación del tensor energía — impulso del campo. En el § 16, P.I vimos que el tensor energía — impulso del campo electromagnético se determina no de modo único. La exigencia de simetría T^{ik}, fundamentada en el Comp. VI.1, tampoco conduce a la determinación unívoca de T^{ik}.

V.A. Fok [95] indica que para la determinación unívoca del tensor T^{ik} debemos superponer en él una condición más: exigir que él sea función de estado del sistema. Para el campo electromagnético esto significaría que el tensor T^{ik}_{campo} sólo debe depender de los vectores E y H que caracterizan plenamente el estado del campo. En particular, él no puede depender de sus derivadas. El estado del sistema de partículas se determina con la prefijación de las coordenadas r_a y las velocidades v_a de las partículas y el tensor T^{ik}_{part}, como sigue de (16.1), sólo se expresa mediante las magnitudes indicadas.

El principio formulado por V.A Fok conduce a la única elección del tensor energía — impulso del campo electromagnético en la forma (16.22).

Comp. VII. Funciones esféricas de Legendre*)

La función esférica del orden l, m depende de los ángulos polares ϑ, α y se determina mediante la fórmula**)

$$Y_{lm}(\vartheta, \alpha) = \delta_m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_{lm}(\cos\vartheta) e^{im\alpha}, \qquad \text{(Comp. VII.1)}$$

*) Aquí sin su deducción se aducen las relaciones fundamentales para las funciones esféricas.

**) La definición de las funciones esféricas se distinguen en las obras de diferentes autores por el valor del factor δ_m que por su módulo es igual a la unidad.

en la que $l = 0, 1, 2, \ldots, m = 0, \pm 1, \ldots, \pm l$, $\delta_m = (-1)^m$ para $m \geqslant 0$, $\delta_m = 1$ si $m < 0$. Con P_{lm} se designa el polinomio asociado de Legendre:

$$P_{lm}(x) = (1 - x^2)^{|m|/2} \frac{d^{|m|} P_l(x)}{dx^{|m|}}, \qquad \text{(Comp. VII.2)}$$

donde $P_l(x)$ es el polinomio corriente de Legendre. Él coincide con $P_{lm}(x)$ para $m = 0$:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l (x^2 - 1)^l}{dx^l} = P_{l0}(x). \qquad \text{(Comp. VII.3)}$$

Los polinomios asociados de Legendre satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2 - 1)\frac{dP_{lm}(x)}{dx}\right] + \left[l(l + 1) - \frac{m^2}{x^2 - 1}\right] P_{lm}(x) = 0. \qquad \text{(Comp. VII.4)}$$

Aducimos algunas fórmulas útiles para trabajar con las funciones esféricas:

$$Y_{lm}(0, 0) = \sqrt{\frac{2l + 1}{4\pi}}\,\delta_{m0}, \quad Y_{lm}(\vartheta, \alpha) = (-1)^l Y_{lm}(\pi - \vartheta, \pi + \alpha), \qquad \text{(Comp. VII.5)}$$

$$Y_{l0}(\vartheta) = \sqrt{\frac{(2l + 1)}{4\pi}} P_l(\cos\vartheta)$$

y con los polinomios de Legendre:

$$P_l(\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l + 1}}\, Y_{l0}(\vartheta, \alpha), \quad P_l(1) = 1,$$

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n},$$

$$P_{2n+1}(0) = 0, (l + 1)P_{l+1}(x) = (2l + 1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x), \qquad \text{(Comp. VII.6)}$$

$$(x^2 - 1)\frac{dP_l(x)}{dx} = l[xP_l(x) - P_{l-1}(x)].$$

Las funciones esféricas con $l = 0, 1, 2$ tienen la forma

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta, \quad Y_{1,\pm1} = \pm\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\, e^{\pm i\alpha},$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\vartheta - 1), \qquad \text{(Comp. VII.7)}$$

$$Y_{2,\pm1} = \pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta e^{\pm i\alpha},$$

$$Y_{2,\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,\mathrm{sen}^2\vartheta e^{\pm 2i\alpha}.$$

Las funciones esféricas forman en la superficie de una esfera un sistema de funciones completo ortonormado de ϑ, α. Esto quiere decir que

$$\int Y^*lm(\vartheta, \alpha)\, Y_{l'm'}(\vartheta, \alpha)\, d\Omega = \delta_{ll'}\cdot\delta_{mm'}, \qquad \text{(Comp. VII.8)}$$

donde $d\Omega = \operatorname{sen} \vartheta d\vartheta d\alpha$ es el elemento del ángulo sólido y que la función arbitraria de ϑ, α con el cuadrado del módulo que se integra, puede ser desarrollada en la serie:

$$f(\vartheta, \alpha) = \sum_{l, m} a_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \alpha). \qquad \text{(Comp. VII.9)}$$

Los coeficientes a_{lm} se determinan con las fórmulas

$$a_{lm} = \int Y^*_{lm}(\vartheta, \alpha) f(\vartheta, \alpha) d\Omega. \qquad \text{(Comp. VII.10)}$$

La función del tipo $r^{-l-1} Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$ y $r^l Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$ reciben el nombre de armónicas esféricas. Con ayuda de (Comp. VII.4) es fácil comprobar que las armónicas esféricas son soluciones particulares de la ecuación de Laplace en todos los puntos salvo $r = 0$:

$$\Delta[r^{-l-1} Y_{lm}(\vartheta, \alpha)] = 0, \quad \Delta[r^l Y_{lm}(\vartheta, \alpha)] = 0. \qquad \text{(Comp. VII.11)}$$

También es solución de la ecuación de Laplace la superposición de las armónicas esféricas con coeficientes arbitrarios:

$$\varphi(r, \vartheta, \alpha) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} (a_{lm} r^{-l-1} + b_{lm} r^l) Y_{lm}(\vartheta, \alpha). \qquad \text{(Comp. VII.12)}$$

Si $r(r, \vartheta, \alpha)$ y $r'(r', \vartheta', \alpha')$ son los radios vectores de dos puntos del espacio, con la particularidad de que $r > r'$ y el ángulo entre ellos está designado por γ, entonces

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma). \qquad \text{(Comp. VII.13)}$$

La función $1/R$ lleva el nombre de función generadora para los polinomios de Legendre. Tiene lugar el siguiente teorema de suma para las funciones esféricas:

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l + 1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\vartheta, \alpha) Y^*_{lm}(\vartheta', \alpha'). \qquad \text{(Comp. VII.14)}$$

Los ángulos ϑ, α y ϑ', α' entran en (Comp. VII. 14) de manera plenamente simétrica.

La sustitución de (Comp. VII.14) en (Comp. VII.13) conduce al desarrollo:

$$\frac{1}{|r - r'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{r'^l}{(2l + 1) r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \alpha) Y^*_{lm}(\vartheta', \alpha'). \qquad \text{(Comp. VII.15)}$$

Comp. VIII. Campo eléctrico continuo dentro de una cavidad esférica en un dieléctrico

Al deducir la fórmula principal en el § 16, P.II fue utilizada la relación (16.2)

$$E = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1} E_\infty, \qquad \text{(Comp. VIII.1)}$$

que liga el campo E condicionado por las fuentes exteriores, que surge en el interior de una esfera de radio macroscópico con el campo eléctrico E_∞ en los puntos de un dieléctrico ubicado a gran distancia de la esfera. Dicha relación se obtiene del modo siguiente.

El potencial φ del campo eléctrico tanto en el interior, como fuera de la esfera se determina con la ecuación $\Delta\varphi = 0$. Además, el potencial del campo dentro de la esfera (vamos a designarlo con el símbolo φ_{in}) cerca de la superficie interior de la esfera está ligado con el potencial φ_{ext} del campo fuera de la esfera cerca de su superficie exterior por medio de las codiciones de frontera

$$\varphi_{in}|_S = \varphi_{ext}|_S, \quad \left.\frac{\partial\varphi_{in}}{\partial r}\right|_S = \varepsilon \left.\frac{\partial\varphi_{ext}}{\partial r}\right|_S. \qquad \text{(Comp. VIII.2)}$$

El origen de coordenadas está elegido en el centro de la esfera. Por fin, el potencial a gran distancia de la esfera tiene la forma $-E_\infty r\cos\theta$.

Como ya sabemos de la parte primera del libro la solución axial-simétrica de la ecuación de Laplace $\Delta\varphi = 0$ puede ser representada en forma del desarrollo del polinomio de Legendre:

$$\varphi_{in} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{A_l^{(in)}}{r^{l+1}} + B_l^{(in)} r^l\right) P_l(\cos\theta), \qquad \text{(Comp. VIII.3)}$$

$$\varphi_{exp} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{A_l^{(ext)}}{r^{l+1}} + B_l^{(ext)} r^l\right) P_l(\cos\theta). \qquad \text{(Comp. VIII.4)}$$

Como el potencial en el origen de coordenadas debe ser limitado, $A_l^{(in)} = 0$ para todas l. De la condición asintótica a grandes distancias se desprende que $B_l^{(ext)} = -E_\infty$ si $l = 1$ y $B_l^{ext} = 0$ para todas las demás l. Así, pues, el potencial fuera de la esfera toma la forma

$$\varphi_{ext} = \left(\frac{A^{(ext)}}{r^2} - E_\infty r\right)\cos\theta. \qquad \text{(Comp. VIII.5)}$$

En esta fórmula sólo está contenido un coeficiente que debe ser determinado $A_1^{(ext)} = A^{(ext)}$. Como las condiciones de frontera (Comp. VIII.2) deben cumplirse en todos los puntos de la superficie, las partes angulares de φ_{ext} y φ_{in} deben coincidir. Por lo tanto, en (Comp. VIII.3), en la suma por l desde cero sólo un sumando con $l = 1$ es distinto de cero y

$$\varphi_{in} = B^{(in)} r\cos\theta. \qquad \text{(Comp. VIII.6)}$$

Esta fórmula también contiene sólo un coeficiente que ha de ser determinado $B_1^{(in)} = B^{(in)}$. Fijando las soluciones (Comp. VIII.5) y (Comp. VIII.6) con ayuda de las condiciones de frontera (Comp. VIII.2) para $r = a$, obtenemos un sistema de ecuaciones algebraicas

$$B^{(in)} a = \left(\frac{A^{(in)}}{a^2} - E_\infty a\right), \quad B^{(in)} = -\varepsilon\left(\frac{2A^{(ext)}}{a^3} + E_\infty\right)$$

de la cual se determinan los coeficientes $A^{(ext)}$ y $B^{(in)}$. De este modo obtenemos

$$\varphi_{in} = -\frac{3\varepsilon}{1+2\varepsilon} E_\infty r\cos\theta, \quad \varphi_{ext} = \left(\frac{1-\varepsilon}{1+2\varepsilon} E_\infty \frac{a^3}{r^2} - E_\infty r\right)\cos\theta,$$

y el campo eléctrico dentro de la esfera

$$E = E_{in} = -\nabla\varphi_{in} = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+1} E_\infty. \qquad \text{(Comp. VIII.7)}$$

Comp. IX. Campo reactivo en un dieléctrico

Si tomamos una esfera aislada uniformente polarizada, en la que la densidad de polarización es igual a P, la intensidad del campo eléctrico continuo en el interior de dicha esfera será igual a $4/3\pi P$. Si ubicamos nuestra esfera en un medio ilimitadamente dieléctrico con constante dieléctrica ε, manteniendo invariable el momento dipolar de la esfera, la intensidad del campo eléctrico dentro de la esfera variará. La diferencia de los valores nuevo y viejo del campo recibe el nombre de *campo reactivo*. Éste puede ser calculado de la manera siguiente.

El potencial φ del campo eléctrico tanto dentro como fuera de la esfera se satisface con la ecuación $\Delta\varphi = 0$. La solución de esta ecuación tomada dentro de la esfera será designada con el símbolo φ_{in} y fuera de la esfera, con el símbolo φ_{ext}. Estas dos soluciones deben ser fijadas en la superficie de la esfera (cuyo radio vamos a considerar igual a a). La primera condición de fijación que se desprende de la continuidad del componente tangencial del vector de intensidad del campo eléctrico, tiene la forma

$$\varphi_{in}|_{r=a} = \varphi_{ext}|_{r=a}.$$

La segunda condición se deduce de la continuidad del componente normal a la superficie de separación del vector de la inducción eléctrica. Como dentro de la esfera este vector tiene la forma $D = E + 4\pi P$ (donde P es una magnitud fijada) y fuera de ella, $D = \varepsilon E$, la segunda condición de fijación toma el aspecto

$$4\pi P\cos\theta - \left.\frac{\partial\varphi_{in}}{\partial r}\right|_{r=a} = -\varepsilon\left.\frac{\partial\varphi_{ext}}{\partial r}\right|_{r=a}.$$

Desarrolando las funciones φ_{in} y φ_{ext} en una serie según el polinomio de Legendre (este desarrollo tiene el mismo aspecto que en (Comp. VIII.3) y (Comp. VIII.4) vemos que la condición de limitación del potencial dentro de la esfera conduce a la desaparición de los sumandos proporcionales al coeficiente $A_l^{(in)}$. La desaparición del campo a grandes distancias de la esfera provoca a que desaparezcan en φ_{ext} los sumandos con $B_l^{(ext)}$. Así, pues, tendremos

$$\varphi_{in} = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^l P_l(\cos\theta),\ \varphi_{ext} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta). \qquad \text{(Comp. IX.1)}$$

De la primera condición de fijación sigue que $\sum_l B_l a^l P_l(\cos\theta) = \sum_l \frac{A_l}{a^{l+1}} P_l(\cos\theta)$.

De esta forma, se obtiene la ligazón entre los coeficientes A_l y B_l:

$$B_l a^{2l+1} = A_l. \qquad \text{(Comp. IX.2)}$$

La segunda condición de fijación proporciona:

$$4\pi P\cos\theta - \sum_{l=1}^{\infty} lB_l a^{l-1} P_l(\cos\theta) = \varepsilon \sum_l (l+1)\frac{A_l}{a^{l+2}} P_l(\cos\theta).$$

Por esta razón,

$$4\pi P - B_1 = 2\varepsilon\frac{A_l}{a^3},\ -lB_l a^{2l+1} = \varepsilon(l+1)A_l \text{ si } l \neq 1. \qquad \text{(Comp. IX.3)}$$

Si $l = 1$, de la correlación (Comp. IX.2) y (Comp. IX.3) tenemos:

$$A_1 = \frac{4\pi P a^3}{2\varepsilon + 1} \quad \text{y} \quad B_1 = \frac{4\pi P}{2\varepsilon + 1}.$$

Con $l \neq 1$ obtenemos $-l = \varepsilon(l + 1)$. Esta última relación no puede realizarse para ε arbitraria. Por ello, en φ_{in} y φ_{ext} todos los sumandos con $l \neq 1$ se reducen a cero. Así, pues, obtenemos la solución

$$\varphi_{in} = \frac{4\pi P}{2\varepsilon + 1} r \cos\theta \qquad \text{(Comp. IX.4)}$$

que corresponde al campo $E_{in} = -\nabla\varphi_{in} = -e_z \frac{4\pi P}{2\varepsilon + 1}$. Si la esfera no estuviera rodeada de un dieléctrico, el campo correspondiente sería obtenido con el paso límite antes aducido $\varepsilon \to 1$. La diferencia de estos dos campos

$$E_{in} = 4\pi P \frac{2}{3} \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1} e_z \qquad \text{(Comp. IX.5)}$$

es el campo reactico buscado.

Comp. X. Lugar de la electrodinámica clásica en el cuadro físico del universo

Electrodinámica clásica describe un enorme conjunto de fenómenos físicos. En el presente libro las propiedades tanto del campo como de la sustancia, al estudiar su modelo concreto (plasma, dieléctricos, etc.), se describían de manera clásica. No obstante, las propiedades cuánticas del campo elecromagnético y los de la sustancia se manifiestan en diversas condiciones con distinto grado. Por regla, el campo electromagnético puede ser aún descrito de modo clásico cuando ya es preciso tomar en consideración las propiedades cuánticas de la sustancia. P.ej., el funcionamiento de los generadores cuánticos del campo electromagnético, láseres y máseres, está sustancialmente relacionado con las propiedades cuánticas de la sustancia, pero con ello el campo electromagnético puede, por regla, describirse de forma clásica. Semejante descripción de una realidad física, cuando el campo se describe con las ecuaciones clásicas de Maxwell, en tanto que la sustancia cuantomecánicamente, es decir, la constante dieléctrica se calcula por métodos de mecánica cuántica, recibe el nombre de *semiclásica*. Con aproximación semiclásica es posible examinar un extenso círculo de fenómenos físicos del ámbito de interacción del campo electromagnético con la sustancia.

Sólo en un círculo relativamente pequeño de fenómenos se manifiestan las propiedades cuánticas del campo electromagnético, cuando es preciso tener en cuenta que al variar la intensidad del campo su energía cambia no continuamente, sino por porciones discretas, o sea, se cuantifica. La magnitud de un cuanto de energía (fotón) es $\hbar\omega$, donde $\hbar$ es la constante de Planck y ω, la frecuencia del campo. Las propiedades de un sistema cuántico se aproximan a las clásicas en aquellos casos cuando los números cuánticos, que determinan los niveles estacionarios de energía, son grandes en comparación con la unidad. Con esto, las transiciones entre niveles vecinos cambian la energía del sistema en una pequeña magnitud, es decir, cuasicontinuamente. En lo que se refiere al campo electromagnético libre esto significa que deben ser grandes los números cuánticos de los osciladores, con otras palabras, el número de fotones.

Cualquier medición requiere determinado tiempo. Esto es equivalente a la mediación de las intensidades del campo en el trancurso de un pequeño intervalo de tiempo Δt. Claro está, que notoria aportación al valor medio de las intensidades del campo sólo será proporcionada por aquellos componentes de Fourier del campo, cuyas frecuencias satisfacen la desigualdad $\omega\Delta t \lesssim 1$. Por ello, deben ser grandes los números cuánticos de aquellos osciladores cuyas frecuencias satisfacen la desigualdad escrita más arriba.

El número de osciladores con frecuencias entre cero y $\omega \approx 1/\Delta t$ debe ser igual al orden de su valor (véase la fórmula (31.20))

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \approx \frac{1}{(c\Delta t)^3}. \qquad \text{(Comp. X.1)}$$

Con ello, el volumen que contiene el campo era considerado igual a la unidad. Dividiendo la energía del campo, que por el orden de su valor es igual a E^2, por el número de osciladores (Comp. X.1) y por la energía de un oscilador con cierta frecuencia media, del orden de ω, obtenemos el orden del valor del número de fotones

$$N \approx \frac{E^2}{\hbar\omega}\left(\frac{c}{\omega}\right)^3. \qquad \text{(Comp. X.2)}$$

La condición de cuasiclasicidad $N \gg 1$ quiere decir que

$$|E| \gg \hbar^{1/2} c^{-3/2} (\Delta t)^{-2}. \qquad \text{(Comp. X.3)}$$

La desigualdad (Comp. X.3) muestra a que condiciones podemos describir el campo para las ecuaciones clásicas de Maxwell. Como vemos mientras mayor sea el intervalo de mediación, menor puede ser la intensidad del campo. En particular, los campos estáticos y de baja frecuencia siempre es posible describirlos de manera clásica. En lo que atañe a los efectos cuánticos, éstos serán sustanciales en el caso de campos débiles de muy bajas frecuencias. En semejantes casos la interacción del campo con las partículas cargadas debe describirse por los métodos de electrodinámica cuántica.

En los últimos tiempos ha sido establecida la ligazón entre el electromagnetismo con otra región notoriamente diferente a primera vista: las llamadas interacciones débiles.

Es sabido que en la naturaleza existen cuatro interacciones fundamentales además del electromagnetismo, cuya teoría clásica se ha analizado en este libro con detalle, hay también interacciones fuerte, débil y gravitacional. La primera se produce en los núcleos atómicos asegurando su estabilidad, así como durante las colisiones de múltiples partículas elementales. En ella toman parte las partículas elementales llamadas *hadrones*. A la familia de los hadrones pertenecen los protones y neutrones, así como también múltiples mesones e hiperones. La interacción fuerte actúa a distancias de un orden de 10^{-13} cm. La interacción débil es responsable, fundamentalemente, de la desintegración de las partículas elementales y núcleos atómicos y actúa a distancias hasta de 10^{-15} cm. La interacción gravitacional es universal, en ella toman parte todas las partículas elementales. Pero en cierto sentido ella es la más débil y sólo es sustancial al haber grandes masas de la sustancia ubicadas a distancias considerables unas de otras (en comparación con las distancias nucleares o atómicas).

Hasta el momento todas estas interacciones fundamentales eran consideradas independientes. Sin embargo, hace poco se ha establecido que por lo menos dos de ellas están íntimamente ligadas entre sí y pueden ser descritas en los márgenes de una misma teoría. La descripción de los efectos condicionados por las interacciones electromagnéticas y débiles, a base de una misma teoría, ha sido un importante paso adelante comparable con el que hace más de cien años realizó Maxwell al crear una teoría única de los fenómenos eléctricos, ópticos y magnéticos. La teoría de Maxwell puede ser, hablando en general, un ejemplo de qué se debe comprender por agrupación de las interacciones. De acuerdo con la electrodinámica clásica los fenómenos eléctricos no se reducen a los magnéticos y viceversa, pero tanto unos como otros son diversas manifestaciones de la interacción electromangnética. De modo análogo las interacciones electromagnéticas y débiles, que tan poco se parecen entre sí, son, como ha resultado, diferentes manifestaciones de una misma interacción eléctrica débil.

Para comprender la esencia de la teoría de las interacciones eléctricas débiles hay que tener conocimientos de mecánica cuántica. Por ello, aquí sólo podemos hablar de los fundamentos del enfoque que dio la posibilidad de confeccionar la teoría de las interacciones unificadas. Incluso esto será útil debido a que ayudará al lector a vencer la barrera terminológica y familiarizarlo con uno de los más impresionantes logros de física teórica de los últimos tiempos.

Una de las importantísimas singularidades de la teoría de Maxwell consiste en la invariancia de calibración que con detalle fue examinada en la I parte de nuestro libro. Sin embargo, no sólo las ecuaciones de Maxwell son invariantes por calibración, sino que también lo son las ecuaciones de mecánica cuántica que describen la respuesta de la sustancia en el campo. Como la mecánica cuántica incluye asimismo la clásica como caso particular, todo lo que vamos a exponer más abajo tiene absoluto carácter general.

Las ecuaciones de mecánica cuántica para las partículas determinan la función de onda ψ. La magnitud $|\psi|^2$ tiene sentido físico, por lo que la función de onda está, en principio, determinada con una precisión salvo el factor de fase exp $(i\delta)$. La variación de la magnitud δ en este factor de fase no varía la probabilidad de hallar la partícula en el punto dado del espacio, que es proporcional a $|\psi|^2$. Si δ en el grado del exponente es una magnitud constante, hablamos de una transformación de fase global. Pero si $\delta(\vec{r}, t)$ es función de las coordenadas y el tiempo, semejante transformación lleva el nombre de local.

Las ecuaciones de mecánica son diferenciales. Por esto, para la transformación de fase local en las ecuaciones de mecánica cuántica aparecerán sumandos adicionales condicionados por las derivadas de la función $\delta(\vec{r}, t)$. De acuerdo con el sentido de la transformación de fase, esta transformación no debe cambiar las ecuaciones de mecánica cuántica. Estas últimas no variarán en realidad si los sumandos condicionados por las derivadas de la función $\delta(\vec{r}, t)$ se compensan en el término «de fuerza» de las ecuaciones introduciendo un campo de fuerza compensador.

Uno de los primeros principios de la teoría de la interacción eléctrica débil consiste, de este modo, en la afirmación que cualquiera invariación local (o bien como suele decirse, simetría) de ecuaciones dinámicas debe responder a cierto campo físico de fuerza. Desde este punto de vista, el hecho de la existencia del campo electromagnético también está condicionado por la simetría de calibración de la mecánica cuántica de las partículas cargadas.

Otro ejemplo de transformación que fue examinado en el libro y respecto del cual, en determinado sentido, resultan simétricas las ecuaciones de mecánica y electrodinámica es la transformación de Lorentz. Pero existen asimismo simetrías de otro género completamente diferente. Como ejemplo podemos aducir la simetría isotópica en física nuclear. En correspondencia con ella, todos los procesos que transcurren con la participación de sólo interacciones fuertes, no varían al sustituir los protones por neutrones y viceversa. Con otras palabras, con relación a la interacción fuerte el protón y neutrón se comportan de modo similar. Pero estas partículas se diferencian por la carga eléctrica, debido a lo que la toma en consideración de los procesos electromagnéticos conduce a la violación de la simetría isotópica. En tales casos se habla de que hay simetría isotópica, pero se ha violado la ligazón con la existencia de la interacción electromagnética.

El que el protón y neutrón puedan ser considerados como dos estados de una misma partícula, que puede denominarse nucleón, significa que la función de onda del protón (designada con el símbolo $|p\rangle$) y función de onda del neutrón $|n\rangle$, basándonos en el principio de superposición, es posible representarla en la forma

$$|p\rangle = \alpha_{11}|p'\rangle + \alpha_{12}|n'\rangle, \; |n\rangle = \alpha_{21}|p'\rangle + \alpha_{22}|n'\rangle. \qquad \text{(Comp. X.4)}$$

La transformación (Comp. X.4) puede ser considerada como la rotación en el espacio isotópico. Las magnitudes α en (Comp. X.4) son las características de este proceso. La simetría isotópica consiste en la invariancia de las ecuaciones de la teoría con relación al paso de la función $|n\rangle$ y $|p\rangle$ a las funciones $|n'\rangle$ y $|p'\rangle$. Si los parámetros dependen de las coordenadas y el tiempo, ellos responden a la transformación local. La invariancia de la teoría de la interacción fuerte, en relación con las transformaciones isotópicas globales, ya era conocida en la década de los 30, la invariancia con relación a las transformaciones isotópicas locales comenzó a estudiarse sólo en las últimas décadas.

Como la rotación se describe con tres parámetros, la simetría de la teoría en lo que atañe a las rotaciones isotópicas conduce a la aparición de tres campos compensadores. De otro modo los denominan campos de calibración o de Yang — Mills. En la teoría cuántica a cada campo se le contrapone una determinada partícula. Es posible cerciorarse de que a los indicados cam-

pos deben contraponerse tres partículas con momento interno (espín) igual a la unidad, si lo medimos en las unidades de la constante de Planck $\hbar$. Semejantes partículas reciben el nombre de partículas Bose o bien bosones (llamadas así en honor del físico hindu Bose que estudió la etadística de dichas partículas). De forma semejante a los fotones, ellos tienen masa nula en reposo y pueden ser considerados como transportadores de las interacciones.

La idea de los campos de calibración ha resultado ser muy fructífera al ser aplicada a la interacción débil. Además de los hadrones (partículas que toman parte en las interacciones fuertes) en la interacción débil participan también los leptones (partículas que no participan en las interacciones fuertes). Por lo tanto aquí debemos hablar no del espacio isotópico corriente, sino de la simetría del llamado espín isotópico débil que también está ligado con el electrón miones, neutrino y leptones τ. A esta simetría corresponden tres bosones de calibración que se designan con los símbolos W^+, W^- y W^0. Además, existe también la simetría de fase corriente, la misma que en electrodinánica, y ella conduce a la aparición de un bosón más de calibración B^0. De ese modo, en la teoría surgen cuatro bosones de calibración, dos cargados y dos neutrales W^+, W^-, W^0 y B^0.

De acuerdo con el principio de superposición pueden mezclarse los estados que corresponden a una misma carga. En nuestro caso se mezclarán los bosones neutrales W^0 y B^0. El grado en que deben estar mezclados los bosones W^0 y B^0 para obtener partículas observadas en la realidad, se establece en la actualidad de modo fenomenológico y se describe con el llamado *ángulo de Vainberg* θ_W:

$$\begin{aligned} \gamma &= B^0 \cos \theta_W + W^0 \operatorname{sen} \theta_W, \\ Z^0 &= -B^0 \operatorname{sen} \theta_W + W^0 \cos \theta_W. \end{aligned} \qquad \text{(Comp. X.5)}$$

La primera de estas magnitudes, γ, es un fotón corriente, la segunda, un bosón neutral de calibración Z^0. El experimento conduce al valor del ángulo de Vainberg $\theta_W = 29°$. El hecho de que el ángulo de Vainberg tiene valor que no es igual a cero determina, precisamente, la ligazón entre la interacción electromagnética y débil.

Para semejante enfoque las masas de todos los bosones de calibración, lo mismo que la masa del fotón, deberán ser iguales a cero. Pero a la masa nula del bosón corresponde el efecto de largo alcance, como sucede en el caso del fotón y en correspondencia con la ligazón cuántica entre el radio R de acción de las fuerzas y la masa de M bosones, transportadores de la interacción:

$$R \approx \Lambda = \hbar/Mc. \qquad \text{(Comp. X.6)}$$

Aquí Λ es la longitud de onda de Compton a la que ya nos referimos más arriba (véanse los §§ 22, 38).

De hecho, el radio de la interacción débil es menor que incluso el de la interacción fuerte. Esto significa que los bosones $W^{\pm}$ y Z^0 deben tener gran masa. La aparición de tal masa en los bosones de calibración está condicionada por la llamada perturbación espontánea de la simetría local. El mecanismo de semejante perturbación fue descubierto por Higgs. Siendo tal perturbación de la simetría, el lagrangiano tiene simetría, mientras que el estado físico con la energía mínima, es decir, el vacío, no posee ésta. En principio, semejante situación no debe provocar gran asombro. P.ej., una bola en el fondo de una botella de cerveza con fondo convexo está bajo el efecto de fuerzas simétricas, pero cuando rueda desde el centro del fondo el sistema se hace no simétrico.

De otro ejemplo sirven los materiales ferromagnéticos. Durante la interacción del medio ferromagnético no hay una dirección destacada de antemano, pero cuando se realiza el estado ferromagnético, de forma aleatoria, se obtiene la dirección destacada de imantación y la simetría espacial resulta no perturbada. La violación de la simetría para interacciones débiles conduce a la aparición de masa en los bosones $W^{\pm}$ y Z^0, pero deja al fotón sin masa.

Hace muy poco tiempo, los bosones de calibración fueron descubiertos por vía experimental. La masa de los bosones $W^{\pm}$ resultó ser de un orden de 80 GeV/s^2 y la de los Z^0, de un orden de 95 GeV/s^2. Para comparar indicaremos que el electrón tiene una masa igual a $5 \cdot 10^{-4}$

GeV/s^2 y el protón, 0,9 GeV/s^2. La observación experimental de estos bosones ha convertido la unificación de las interacciones electromagnéticas y débiles en un hecho científico.

La confección de teoría unificada comenzó por la idea de la invariancia de calibración nacida en electrodinámica, y que condujo a la unificación del electromagnetismo con otra interacción fundamental, es decir, la débil. En la actualidad se hacen intentos de confeccionar una teoría única de todas las interacciones fundamentales, incluidas la fuerte y gravitacional. No obstante, semejante teoría de la «gran unificación» no ha hallado hasta el momento confirmación experimental decisiva. Una representación más completa acerca de la región interesantísima de las ciencias, o sea, la física de las partículas elementales y las teorías unificadas de las interacciones fundamentales, puede ser obtenida al leer la exposición de estos problemas de forma accesible para los estudiantes y colaboradores científicos en el libro de L.B. Okuñi «Física de las partículas elementales» (en ruso).

Bibliografía

1. *Агранович В.М., Гинзбург В.Л.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. — М., Наука, 1979.
   V.M. Agranóvich, V.L., Guinzburg. Cristaloóptica tomando en consideración la dispersión espacial y la teoría de exitones.
2. Академик *Л.И. Мандельштам.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. — М., Наука, 1972.
   Académico *L. I. Mandelshtám.* Conferencias de óptica, teoría de la relatividad y mecánica cuántica.
3. *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы электродинамики плазмы. — М., Высшая школа, 1978.
   A. F. Alexándrov, L.S. Bogdankévich, A.A. Rujadce. Fundamentos de electrodinámica del plasma.
4. *Алексеев А.И.* Сборник задач по классической электродинамике. М., Наука, 1977.
   A.I. Alekséiev. Problemas de electrodinámica clásica.
5. *A. Lightman, W. Press, R. Price, S. Teukolsky.* Problem Book in Relativity and Gravitation. Princeton, 1975.
6. *Альфвен Г., Фельтхаммер К.Г.* Космическая электродинамика. М., Наука, 1967.
   H. Alfven, K.H. Felthammer. Electrodinámica cósmica.
7. *Аскарьян Г.* Эффект самофокусировки. — УФН, 1973, т. III, с. 249.
   G. Askarián. Efecto de autoenfoque.
8. *Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф.* Излучение релятивистских частиц в монокристаллах. — УФН, 1982. т. 137, с. 561.
   A.I. Ajiezer, N.F. Shulga. Radiación de partículas relativistas en monocristales.
9. *Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.* Квантовая электродинамика. М., Наука, 1981.
   A. I. Ajiezer, V.B. Berestetski. Electrodinámica cuántica.
10. *Базылев В.А., Жеваго Н.К.* Генерация интенсивного электромагнитного излучения релятивистскими частицами. — УФН, 1982, т. 137, с. 605.
    V.A. Bazilev, N.K. Zhevago. Generación de radiación electromagnética intensa por partículas relativistas.
11. *Байер В.Н., Катков В.М., Фадин В.С.* Излучение релятивистских электронов. — М., Атомиздат, 1973.
    V. N. Báyer V.M. Katkov, V.S. Fadin. Radiación de electrones relativistas.
12. *Бараш Ю.С., Гинзбург В.Л.* О выражении для плотности энергии и выделяющегося тепла в электродинамике. — УФН, 1976, т. 118, с. 523.
    Yu.S. Barash, V.L. Guinsburg. Expresiones para la densidad de energía y el calor desprendido en electrodinámica.

31–948

13. *Бараш Ю.С.* О макроскопическом описании действующего поля в некоторых диэлектриках. — ЖЭТФ, 1980, т. 79, с. 2271.
Yu.S. Barash. Acerca de la descripción macroscópica de campo en acción en algunos dieléctricos.
14. *J. Burfoot.* Ferroelectrics. An Introduction to the Physicales. Princeton, 1967.
15. *Барышевский В.Г.* Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях. — Минск, изд-во Белор. гос. ун-та, 1982.
V.G. Barishevski. Canalización, emisión y respuesta en los cristales con altas energías.
16. *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Сборник задач по электродинамике. — М., Наука, 1970.
V.V. Batiguin, I.N. Toptiguin. Problemas de electrodinámica.
17. *N. Blombergen.* Nonlinear Optics. A Lecture Note, New York, 1965.
18. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Квантовые поля. — М., Наука, 1980.
N.N. Bogoliubov, D.V. Shirkov. Campos cuantificados.
19. *Болотовский Б.М., Столяров А.П.* Современное состояние электродинамики движущихся сред. — УФН, 1974, т. 114, с. 569.
B.M. Bolotovski, A.P. Stoliarov. Estado contemporáneo de electrodinámica de medios en movimiento.
20. *Борисенко А.И., Тарапов И.Е.* Векторный анализ и начала тензорного исчисления. — М., Высшая школа, 1966.
A.I. Borisenko, I.E. Tarapov. Análisis vectorial y fundamentos de cálculo tensorial.
21. *M. Born.* Einstein's Theory of Relativity. New York, 1962.
22. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М., Наука, 1970.
M. Born, E. Volf. Fundamentos de la óptica.
23. *W. Braun,* Jr. Dielectrics. W. Berlin, 1956.
24. *L. Brillouin.* Relativity Reexamined. New York. 1970.
25. *E. Byckling, K.Kajantie.* Particle Kinematica, London, 1973.
26. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. — М., Советское радио, 1957.
L.A. Vainshtein. Ondas electromagnéticas.
27. *Вайнштейн Л.А.* Распространение импульсов. — УФН, 1976, т. 118, с. 339.
L.A. Vainshtein. Propagación de impulsos.
28. *Вакман Д.Е., Вайнштейн Л.А.* Амплитуда, частоты, фаза — основные понятия теории колебаний. — УФН, 1977, т. 123, с. 657.
D.E. Vakman, L.A. Vainshtein. Amplitud, frecuencia, fase — nociones fundamentales de la teoría de oscilaciones.
29. *Вакс В.Г.* Введение в микроскопическую теорию сегнетоэлектриков. — М., Наука, 1973.
V.G. Vaks. Introducción a la teoría microscópica de las sustancias ferroeléctricas.
30. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — М., Наука, 1967.
V.S. Vladímirov. Ecuaciones de física matemática.
31. *Вонсовский С.В.* Магнетизм микрочастиц. — М., Наука, 1973.
S.V. Vonsovski. Magnetismo de las micropartículas.
32. *Гинзбург В.Л.* Теоретическая физика и астрофизика: Дополнительные главы. — М., Наука, 1981.
V.L. Guínsburg. Física y astrofísica teóricas.
33. *Гинзбург В.Л.* О теории относительности. — М., Наука, 1979.
V.L. Guínsburg. Acerca de la teoría de la relatividad.
34. *Гинзбург В.Л., Угаров В.А.* Несколько замечаний о силах и тензоре энергии — импульса в макроскопической электродинамике. — УФН, 1976, т. 118, с. 175.
V.L. Guínsburg, V.A. Ugarov. Ciertas observaciones sobre las fuerzas y el tensor de energía — impulso en electrodinámica macroscópica.
35. *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. — М., Наука, 1967.
V.L. Guínsburg. Propagación de ondas electromagnéticas en el plasma.

36. *Гинзбург В.Л.* О законах сохранения энергии и импульса при излучении электромагнитных волн (фотонов) в среде и о тензоре энергии — импульса в макроскопической электродинамике. — УФН, 1973, т. 110, с. 309.
V. L. Guínsburg. Acerca de las leyes de conservación de la energía y el impulso con la rediación de ondas electromagnéticas (fotones) en un medio y sobre el tensor energía — impulso en electrodinámica macroscópica.
37. *Гинзбург В.Л.* Об излучении и силе радиационного трения при равномерноускоренном движении заряда. — УФН, 1969, т. 98, с. 569.
V.L. Guínsburg. Sobre la radiación y fuerza del rozamiento de radiación con el movimiento uniformemente acelerado de la carga.
38. *Гинзбург В.Л., Цытович В.Н.* Переходное излучение и переходное рассеяние. — М., Наука, 1984.
V.L. Guínsburg, V.N. Tsitovich. Radiación y dispersión transitorias.
39. Optique et electronique quantiques. Quantum Optics and Electronics, New York, 1965.
40. *Голант В.Е., Жилинский А.П., Сахаров И.Е.* Волны в изотропной плазме. Распространение волн в магнитоактивной плазме. — Л., Изд-е Политехн. ин-та, 1977.
V.E. Golant, A.P. Zhilinski, I.E. Sájarov. Ondas en el plasma isotrópico. Propagación de ondas en el plasma magnetoactivo.
41. *Горобченко В.Д., Максимов Е.Г.* Диэлектрическая проницаемость взаимодействующего электронного газа. — УФН, 1980, т. 130, с. 65.
V.D. Gorobchenko, E.G. Maxímov. Constante dieléctrica de un gas electrónico en interacción.
42. *Де Гроот С., Сатторп Л.Г.* Электродинамика. — М., Наука, 1982.
S. De Groot, L.G. Sattorp. Electrodinámica.
43. *Демиховский В.Я., Протогенов А.П.* Электромагнитные возбуждения в металлах и полуметаллах в сильном магнитном поле. — УФН, 1976, т. 118, с. 101.
V.Ya. Demijovski, A.P. Protoguénov. Excitaciones electromagnéticas en metales y semimetales en un campo magnético fuerte.
44. *J. Jackson.* Classical Electrodynamics. New York, 1962.
45. *Долгов О.В., Максимов Е.Г.* Эффекты локального поля и нарушение соотношений Крамерса — Кронига для диэлектрической проницаемости. УФН, 1981, т. 135, с. 441.
O.V. Dolgov, E.G. Maxímov. Efectos del campo local y violación de la relación Kramers — Krönig para la constante dieléctrica.
46. *R. James.* The Optical Principles of the Diffraction of X — Rays. London, 1950.
47. *Иверонова В.И., Реекевич Г.П.* Теория рассеяния рентгеновских лучей. — М., Изд-во МГУ, 1972.
V.I. Iverónova, G.P. Reekevich. Teoría de dispersión de los rayos X.
48. *Канер Э.А., Скобов В.Г.* Электромагнитные волны в металлах в магнитном поле. — УФН, 1966, т. 89, с. 367.
E.A. Kaner, V.G. Skobov. Ondas electromagnéticas en los metales en el campo magnético.
49. *Каулинг Т.* Магнитная гидродинамика. — М., Атомиздат, 1978.
T. Kauling. Hidrodinámica magnética.
50. *Киржниц Д.А.* Всегда ли справедливы соотношения Крамерса — Кронига для диэлектрической проницаемости вещества? — УФН, 1976, т. 119, с. 357.
D.A. Kirzhnits. ¿Son siempre justas las relaciones de Kramers — Krönig para la constante dieléctrica de la sustacia?
51. *Колпаков А.В., Бушуев В.А., Кузьмин Р.Н.* Диэлектрическая проницаемость в рентгеновском диапазоне частот. — УФН, 1978, т. 126, с. 479.
A.V. Kolpakov, V.A. Bushúev, R.N. Kuzmin. Constante dieléctrica en la banda de frecuencias de rayos X.

52. *Компанеец А.С.* Курс теоретической физики, т. 1: Элементарные законы. — М., Просвещение, 1972.
A.S. Kompanieyets. Curso de física teórica, t. 1: Leyes elementales.
53. *Компанеец А.С.* Курс теоретической физики, т. 2. Статистические законы. — М., Просвещение, 1975.
A.S. Kompanieyets. Curso de física teórica. t. 2: Leyes estadísticas.
54. *Константинов О.В., Перель В.И.* О возможности прохождения электромагнитных волн через металл в сильном магнитном поле. — ЖЭТФ, 1960, т. 38, с. 161.
O.V. Konstantínov, V.I. Perel. Acerca de la posibilidad del paso de ondas electromagnéticas por un metal en un campo magnético fuerte.
55. *Кумахов М.А.* О возможном существовании эффекта спонтанного излучения γ-квантов релятивистскими каналированными частицами. — ДАН СССР, 1976, т. 230, с. 1077.
M.A. Kumajov. Acerca de la posible existencia del efecto de radiación espontánea de cuantos γ por partículas relativistas canalizadas.
56. *Кринчик Г.С.* Физика магнитных явлений. — М., Изд-во МГУ, 1976.
G.S. Krinchik. Física de los fenómenos magnéticos.
57. *A. Lightman, W. Press, R. Price, S. Teukolsky.* Problem Book in Relativity and Gravitation. Princeton, USA, 1975.
58. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. — М., Наука, 1973.
L.D. Landau, E.M. Lifshits. Teoría del campo.
59. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. — М., Наука, 1982.
L.D. Landau, E.M. Lifshits. Electrodinámica de medios continuos.
60. *Lindhard J.* On the properties of gas of charged particles. — Det. Kong. Danske Vid. Selskab. Dan. Mat. Fys. Medd., 1954, v. 28, № 8.
61. *Линдхард Й.* Влияние кристаллической решетки на движение быстрых заряженных частиц. — УФН, 1969, т. 99, с. 249.
I.Lindhard. Influencia de la red cristalina sobre el movimiento de partículas rápidas cargadas.
62. *Левин М.Л., Рытов С.М.* Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. — М., Наука, 1967.
M.L. Levin, S.M. Ritov. Teoría de las fluctuaciones térmicas en equilibrio en electrodinámica.
63. *Логунов А.А.* Лекции по теории относительности. — М., Изд-во МГУ, 1983.
A.A. Logunov. Conferencias sobre la teoría de la relatividad.
64. *Лоренц Г.А.* Теория электронов. — М., Гостехиздат, 1956.
H.A. Lorentz. Teoría de los electrones.
65. *Луговой В., Прохоров А.М.* Теория распространения мощного лазерного излучения в нелинейной среде. — УФН, 1973, т. 111, с. 203.
V.Lugovoi, A.M. Prójorov. Teoría de propagación de una radiación láser potente en un medio no lineal.
66. *Матвеев А.Н.* Электродинамика. — М., Высшая школа, 1980.
A.N. Matvéiev. Electrodinámica.
67. *D. Mattis.* The Theory of Magnetism. New York, 1965.
68. *Медведев Б.В.* Начала теоретической физики. — М., Наука, 1977.
B.V. Medvédev. Fundamentos de física teórica.
69. *Мёллер К.* Теория относительности. — М., Атомиздат, 1975.
Ch. Möller. Teoría de la relatividad.
70. *Ch. Misner, K.Thorne, J. Wheeler.* Gravitation. San Francisco, 1973.
71. *Новожилов Ю.В., Яппа Ю.А.* Электродинамика. — М., Наука, 1978.
Yu.V. Novozhílov, Yu.A. Yappa. Electrodinámica.
72. *Павлов В.И.* К дискуссиям по проблемам пондермоторных сил. — УФН, 1978, т. 124, с. 345.

V.I. Pávlov. Respecto de la discusión sobre las fuerzas pondemotrices.
73. *Пановский В., Филипс М.* Классическая электродинамика. — М., Наука, 1968.
V. Panovski, M. Philips. Electrodinámica clásica.
74. *Паули В.* Теория относительности. — М., — Л., ГИТТЛ, 1947.
W. Pauli. Teoría de la relatividad.
75. *J. Perina.* Coherence of Light. London — Praga, 1972.
76. *Пинскер З.Г.* Динамическое рассеяние рентгеновских лучей в идеальных кристаллах. — М., Наука, 1974.
Z.G. Pinsker. Dispersión dinámica de los rayos X en cristales ideales.
77. Принцип оносительности. Сборник работ по специальной теории относительности. (Составитель *А.А. Тяпкин.*) — М., Атомиздат, 1973.
Principio de la relatividad. Compendio de obras de la teoría especial de la relatividad. Confeccionado por *A.A. Tiapkin.*
78. *Ритус В.И.* Сдвиг массы ускоренного заряда. — ЖЭТФ, 1981, т. 80, с. 1288.
V.I. Ritus. Desplazamiento de masa de una carga acelerada.
79. *A. Rose — Innes. E. Rhoderick.* Introduction to Superconductivity, Oxford, 1969.
80. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Часть 1: Случайные процессы. — М., Наука, 1976.
S.M. Rítov. Introducción a radiofísica estadística. P.I: Procesos aleatorios.
81. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Часть II: Случайные поля. — М., Наука, 1978.
S.M. Rítov, Yu.A. Kravtsov, V.I. Tatarski. Introducción a radiofísica estadística. P.II: Campos casuales.
82. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Том III: Электричество. — М., Наука, 1977.
D.V. Sivujin. Curso de física general T. III: Electricidad.
83. *Силин В.П., Рухадзе А.А.* Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. — М., Госатомиздат, 1961.
V.P. Silin, A.A. Rujadse. Propiedades electromagnéticas del plasma y medios seudoplásmicos.
84. *J. Smart.* Effective Field Theories of Magnetism. Philadelphia, 1966.
85. *Смоленский Г.А., Крайник Н.Н.* Сегнетоэлектрики и антисегнетоэлектрики. — М., Наука, 1968.
G.A. Smolienski, N.N. Krainik. Sustancias ferroeléctricas y antiferroeléctricas.
86. *Соколов А.А., Тернов И.М.* Релятивистский электрон. — М., Наука, 1983.
A.A. Sokolov, I.M. Ternov. Electrón relativista.
87. *Сыроватский С.И.* Магнитная гидродинамика. — УФН, 1957, т. 52, с. 247.
S.I. Sirovatski. Hidrodinámica magnética.
88. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. — М., Наука, 1976.
I.E. Tamm. Fundamentos de la teoría de electricidad.
89. *E. Taylor, J. Wheeler.* Spacetime Physics, San Francisco, 1966.
90. *Тинкхам М.* Введение в сверхпроводимость. — М., Атомиздат, 1980.
M. Tinkham. Introducción a la superconductividad.
91. *Толмен Р.* Относительность, термодинамика и космология. — М., Наука, 1974.
R. Tolmen. Relatividad, termodinámica y cosmología.
92. *Топтыгин И.Н.* Космические лучи в межпланетных магнитных полях. М., Наука, 1983.
I.N. Toptiguin. Rayos cósmicos en los campos magnéticos interplanetarios.
93. *Угаров В.А.* Специальная теория относительности. — М., Наука, 1977.
V.A. Ugárov. Teoría especial de la relatividad.
94. *Утияма Р.* Теория относительности. — М., Атомиздат, 1979.
R. Utiyama. Teoría de la relatividad.
95. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. — М., ГИТТЛ, 1955.
V.A. Fok. Teoría del espacio, tiempo y gravedad.

96. *Френкель Я.И.* Собрание избранных трудов. Том. I: Электродинамика (общая теория электричества). — М., — Л., Изд-во АН СССР, 1956.
Ya.I. Frénkel. Compendio de obras escogidas. T. I: Electrodinámica (teoría general de la electricidad).
97. *H. Fröhlich.* Theory of Dielectrics, Oxford, 1958.
98. *Chemla D.S.* Non-linear optical properties of condensed matter. — Rep. Prog. Phys., 1980, v. 43, p. 1191.
99. *Шмидт В.В.* Введение в физику сверхпроводников. — М., Наука, 1982.
V.V. Shmidt. Indtroducción a la física de superconductores.
100. *M. Schubert, B. Wilhelmi.* Einführing in die Nichlineare Optik, Teil 1. Klassische Beschreibung. Leipzig, 1971.
101. *A. Einstein.* The Meaning of Relativity, Princeton, 1953.
102. *Эйнштейн А.* К электродинамике движущихся тел. — Собрание научных трудов. — М., Наука, 1965, т. 1, с. 7.
A. Einstein. Respecto de la electrodinámica de cuerpos en movimiento.
103. *Эйнштейн А., Лауб Я.* Замечание к нашей работе «Об основных уравнениях электромагнетизма в движущихся средах». — В кн.: *А. Эйнштейн.* Собрание научных трудов. — М., Наука, 1965, т. 1, с. 126.
A. Einstein, Ya. Laub. Observación a nuestro libro "Sobre las ecuaciones fundamentales de electromagnetismo de cuerpos en movimiento".
104. *Baranova N.B., Zeldovich B.Ya.* On the expansion of radiotion intensity into a/α power series in electrodynamics. — Optic Communications, 1977, v. 22, p. 53.

Índice alfabético de materias

Absorción de dos fotones, 444
Alejado en absoluto, 38
Amortiguamiento de Landau, 395
Ángulo de Brewster, 390
Antipartícula, 59
Apantallado del campo de Coulomb, 272
Aproximación cuasiestacionaria, 347
— de dos ondas en la teoría de la difracción, 416
— — la óptica geométrica, 188
Área de coherencia, 164
Armónicas esféricas, 473
Asintótica de baja frecuencia de la constante dieléctrica, 250
Asociación estadística, 161

Calibración de Coulomb, 108
— — potenciales de Lorentz, 108
Campo cuasiestacionario, 197, 212
— casual, 158
— de ondas de radiación, 197, 198
— depolarizador, 334
— eficaz de Weiss — 354
— electromagnético macroscópico, 236
— molecular de Weiss, 354
— reactivo de un dieléctrico, 323
— seudoeuclidiano, 35
Canalización de las partículas cargadas en los cristales, 437
Carga eléctrica, 58, 59
— elemental, 58
Centro de inercia de un sistema relativista, 471
Coeficiente de capacidad eléctrica, 306
— del campo molecular, 354
— de inducción eléctrica, 306
Coeficientes cinéticos, 325, 351
Condición de Fok para el tensor energía-impulso,
— — frontera de Leontóvich, 374
— — radiación de Vavílov — Cherenkov, 432
Condiciones de frontera de Neuman, 115
— — — de Dirichlet, 115
— — — en electrostática de dieléctricos, 308
— — — — — — medios en movimiento, 408
— — — para los vectores del campo en un medio, 244, 246
"Congelación" del campo magnético en la sustancia, 404
Cono luminoso, 36, 37
Constante dieléctrica compleja, 249, 253
— — longitudinal del plasma sin colisiones, 392
— — — y transversal, 258, 259
— — transversal del plasma sin choques, 342

Constante de Verdet, 410
Conservación de la carga eléctrica, 86
Contracción de escalas de Lorentz — Fitzgerald, 26
— — un tensor, 450
Contraste de la figura de interferencia, 166
Coordenada generalizada de un medio continuo, 459
Corriente de desplazamiento, 92
— magnetizante, 242
— de polarización, 241
— superficial, 97
Cristales uniaxiales, 366
Cualidad hermitiana de la constante dieléctrica de un medio transparente, 408, 409
4 — vector energía-impulso de una partícula, 48

Decremento de las oscilaciones del campo magnético longitudinal, 395
Densidad de energía del campo cuasimonocromático, 280
Desarrollo de Guinsburg — Dewonshir, 337
Diamagnetismo, 339
Difracción de Bragg, 415
— cinemática, 416
— dinámica, 417
— de Laue, 415
Dipolo eléctrico elemental, 119
Direcciones principales (ejes principales) del tensor simétrico de II rango, 452
Dispersión difusa de los rayos X, 422
Dispersión especular y difusa de los electrones en la superficie, 376
Divergencia cuatridimensional, 44

Ecuación de Bragg — Woolf, 415
— cinética para la función de distribución de las partículas cargadas en el medio, 238, 270
— — — las funciones de distribución de los electrones en el metal, 295, 334, 339
— — — un sistema sin choques, 267, 269
— de Fresnel, 364
— fundamental de óptica de vidrio, 364
— de Hamilton — Jacobi, 67
— — Helmholtz, 182
Ecuación de Laplace, 110
— — Laue, 415
— — Lindhar, 259
— — onda (ecuación de D'Alembert), 87, 144
— — Poisson, 110
— — Schrödinger, 462
Ecuaciones del campo electromagnético en medios, 258
— de dispersión, 360, 361, 364, 407
— materiales de electrodinámica, 243
— de Minkowski, 286, 287
— — movimiento del medio continuo en la forma lagrangiana, 461
Efecto Borman, 417
— Faraday, 410, 444
— Hall, 351
— Kerr, electronóptico estadístico cuadrático, 444
— longitudinal Doppler, 151
— Meissner — Ochsenfeld, 358
— Nerst, 351
— (óptico) Kerr, 444
— pelicular anormal, 379
— Pockels, 444
— Righi — Leduc, 351
— transversal Doppler, 151
Energía del campo cuasimonocro-

mático, 280
— en reposo, 49
— interna de un dieléctrico, 311
— libre de un dieléctrico, 313
Entropía del medio en un campo eléctrico, 315
Ergodicidad, 161
Escalar (invariante) en el espacio cuatridimensional seudoeuclídeo, 40
— — — — — tridimensional euclidiano, 448
Espectroscopia coherente antistokes, 444
Experimento de Young, 163

Fórmula de Clausius — Mossoti, 303
— — Drude, 332
— — Larmor para la potencia de radiación de una partícula no relativista, 202
— — Lorentz — Lorentz, 303
Fórmulas de Fresnel, 389
Fotones (cuantos) del campo electromagnético, 164
Frecuencia ciclotrónica, 71, 411
— de plasma, 252, 360
— giromagnética, 71
Futuro absoluto, 38
Función avanzada de Green, 182
— de Green, 115, 116, 178
— — Langevin, 349, 354
— mutua de coherencia, 165
Función potencial de un circuito con corriente en el campo magnético, 143
— de respuesta, 248
— retardada de Green, 180
Funciones de Lagrange para la densidad, 459
Fuerza de Abragam, 298
— coercitiva, 334, 337
Fuerza del oscilador, 263
— de rozamiento radiante, 223
— electromotriz, 91, 92
Factor atómico, 423
— Debye — Waller, 424
— de absorción del medio, 362
— estructural, 423
— de Lorentz, 286

Generación de las segundas armónicas de las ondas que se propagan en el medio, 379, 383
Generalización relativista de la fórmula de Larmor, 203, 439
Girorradio o radio de Larmor, 72
Girotropía del medio, 364
Gradiente cuatridimensional, 42, 43
Grado complejo de coherencia, 167
— de depolarizacion de una onda, 169, 171
— — polarización de una onda, 169, 171
Grosor de la capa pelicular, 373

Homogeneidad del espacio y el tiempo, 17

Impedancia superficial, 373
Índice de refracción, 361
Inducción electromagnética, 92
Integral de Kirchhoff, 187
Intensidad diferencial de radiación, 205
Interferómetro de Michelson, 162
Intervalo, 35
— cuasiespacial, 36
— cuasitemporal, 36
Invarianza de la fase de una onda plana monocromática, 150

Invariante de las transformaciones de Lorentz, 40
Isotropía del espacio, 17, 20

Lagrangiano del campo electromagnético, 80, 91
— (densidad de la función de Lagrange), 459
Ley de Coulomb, 58, 91
— — Curie, 344
— — Curie — Weiss, 336
— — dispersión de las ondas electromagnéticas en el vacío, 148
— — Joule — Lenz, 324
— — Ohm, 238, 324
Línea universal, 33
Longitud de onda de Compton, 124

Matriz de giro en el espacio tridimensional euclidiano, 449
— inversa de giro, 449
Mediación estadística por la asociación, 161
Módulo de Young, 458
Momento cuatridimensional de impulso, 470
— magnético (de espín), 138
— mecánico, 138
— tridimensional de impulso, 471
Momentos multipolares, 119, 121
Monopolo magnético de Dirac, 91

Número de electrones dispersos, 263

Onda de Alfven, 407
— del tipo *TE*, 386
— electromagnética extraordinaria, 366
— — ordinaria, 366
— *TH*, 370
Ondas electromagnéticas en el plasma de múltiples componentes, 400, 401
— — — un guíaondas rectangular, 386
— — transversales, 146
— helicoidales (espirales) en los metales, 412
— iónico-acústicas, condición de existencia, 397
— móviles planas, 146
— planas no homogéneas, 362
Operador de D'Alembert, 44
Orden de corto alcance, 58
— — largo alcance, 57
Oscilaciones plasmáticas iónicas, 402

Paramagnetismo, 339
— ideal, 344
Parámetros de Stokes, 171
Paquete de ondas, 148, 160
Parte antihermitiana del tensor de conductividad, 274
— hermitiana del tensor de conductividad, 273
Pasado absoluto, 38
Piroeléctricos, 333
Polarización circular de una onda electromagnética plana, 152
— elíptica de una onda plana, 152
— lineal de una onda plana, 152
Polinomio asociado de Legendre, 472
Plano de fase constante, 149
Plasmones superficiales, 437
— voluméticos, 431
Posición exacta de reflexión en la teoría de difracción, 421
Precesión larmoriana, 77

Presión magnética, 405
Principio de correspondencia, 47
— — causalidad, 263
— — de relatividad de Einstein, 20
— — — de mecánica clásica, 17
— — simetría de los coeficientes cinéticos, 325
— — superposición de los campos, 80
Producto escalar de 4-vectores, 40
Propiedades analíticas de la constante dieléctrica compleja, 253
Potencial avanzado, 183
— de polarización (vector de Hertz), 215
Potenciales retardados, 182

Radiación de un dipolo eléctrico elemental, 214
Radio clásico del electrón, 124
— inverso de apantallamiento de Debye, 428
Rectificación óptica, 443, 447
Reflejos en la teoría de difracción, 416, 420
Reflexión de las ondas electromagnéticas, 389
Región de transparencia de la sustancia, 236
Relación entre la frecuencia, inductancia y capacidad del circuito oscilante al haber dispersión, 296
— de dispersión, 154, 262, 263
Resistencia de radiación, 218
Rotator magnético, 214
Rotor cuatridimensional, 44
Señal analítica, 153
Símbolo de Kronecker, 370
Sincronización de los relojes, 21
Sistema inercial de referencia, 15
Susceptibilidad diamagnética molar, 339
— diélectrica, 229, 309

Temperatura de Curie, 352
— — Debye, 425
— ferroeléctrica de Curie, 334
Tensor afín, 38
— antihermitiano, 451
— antisimétrico, 451
— de conductividad, 330
— hermitiano, 451
— métrico, 42
— del momento cuadripolar, 118
— piezoeléctrico, 332
— de polarizabilidad de un cuerpo conductor, 308
— simétrico, 451
— de tensiones en un dieléctrico situado en el campo externo, 292, 293
— unitario antisimétrico de IV rango, 42
— — — — III rango, 452
— — simétrico de II rango, 42, 451
Teorema de fluctuación-disipación en electrostática, 320
— — reciprocidad en electrostática, 305
— — suma para las funciones esféricas, 473
Tiempo absoluto, 16
— de correlación o de coherencia, 160
— — "difusión" del campo magnético, 404
— — relajación, aproximación en la teoría de conductividad, 329
Trabajo de salida, 129
Transformación de potenciales de calibración (gradiental), 63
Transformaciones de Galileo, 16
— — Hilbert, 154
Transición de fase de I orden en ferroeléctricos, 338
— — — — II orden en ferroeléctricos, 334

Variación de la energía del campo electrostático con la deformación del medio, 291
Vector axial, 454
— dual, 452
— de inducción eléctrica, 243
— — — magnética, 237
— polar (o real), 454
— de polarización, 215
— — la red inversa en un cristal, 413
Vectores principales del tensor simétrico de II rango, 452
Velocidad de Alfven, 407
— — fase, 361
— máxima (límite), 20
Viscosidad magnética, 405
Volumen de coherencia, 164
Volumen físicamente pequeño, 236
— marcoscópicamente pequeño, 82

Zona de onda, 204

A nuestros lectores:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, GSP, I-110, URSS.

Libros de nuestro sello editorial:

Kasatkin A.

FUNDAMENTOS DE ELECTROTECNIA

(2ª edición)

El progreso científico-técnico moderno es inconcebible sin la electrificación, la cual es base del desarrollo de todas las ramas de la economía nacional.

El presente manual expone los conceptos teóricos sobre corriente continua y alterna, magnetismo e inducción electromagnética, de los que se trata en los capítulos: Circuitos de corriente continua, Capacidad y aislamiento de los dispositivos electrotécnicos, y Sistema trifásico de corrientes alternas. En el libro se examinan el principio de funcionamiento, la estructura y los tipos de transformadores, máquinas eléctricas asincrónicas y sincrónicas de corriente alterna, así como los de máquinas y generadores de corriente continua, dispositivos semiconductores, electrónicos e iónicos, rectificadores electrónicos, amplificadores y generadores, lo mismo que los de aparatos de medida eléctrica.

Se dedican algunos capítulos a los problemas relacionados con la producción, transmisión y distribución de la energía eléctrica.

El manual está destinado a los alumnos de escuelas técnicas medias (escuelas industriales, etc.), por lo cual el autor ha incluido al final de cada capítulo un cuestionario que permite evaluar fácilmente la asimilación del material expuesto.

Kirilin V., Sichev V., Sheindlin A.

TERMODINÁMICA TÉCNICA (2ª edición)

Trátase de un curso completo de la termodinámica técnica. Entre las características esenciales de este libro destaca la exposición bien detallada de los problemas fundamentales de la termodinámica y, en primer lugar, de los que permiten al estudiante asimilar con facilidad los métodos generales de la termodinámica que se utilizan para el análisis de diferentes fenómenos físicos.

Además de los apartados tradicionales de la termodinámica técnica, los autores proporcionan una información básica acerca de los problemas cuya aparición se debe al desarrollo de la técnica moderna (por ejemplo, diferentes métodos de la conversión directa del calor en energía eléctrica, métodos contemporáneos del análisis de la rentabilidad de los ciclos de la instalaciones de fuerza a vapor, problemas de la termodinámica de gases disociados e ionizados, etc.

Teniendo muy presente que en nuestros días los diferentes procesos acompañados de reacciones químicas ocupan un lugar destacado los autores incluyeron en su obra un capítulo especial donde exponen con brevedad la termodinámica química, para que el lector tenga una idea acerca de los métodos utilizados en la descripción termodinámica de los procesos químicos.

Este libro de texto está dirigido para los estudiantes y postgraduados que cursan especialidades energéticas en las escuelas técnicas superiores. El libro puede ser utilizado por los estudiantes de otras especialidades que se interesan por el uso de diferentes procesos y aparatos térmicos.

Starzhinski V.

MECÁNICA TEÓRICA

El manual que ofrecemos presenta el curso completo de mecánica teórica para centros de enseñanza técnica superior. En el manual se tratan cuestiones de la estática de cuerpos sólidos, cinemática y dinámica. Una serie de apartados del libro se expone en una forma poco habitual para los centros anteriormente señalados. La cinemática de los cuerpos sólidos se basa en el teorema de Euler sobre el movimiento instantáneo de dichos cuerpos, entendiendo como tal la distributición de velocidades de los puntos de un cuerpo en movimiento en un momento dado de tiempo. En la exposición de los teoremas generales de la dinámica del sistema de puntos materiales, el autor sigue los métodos utilizados en los cursos universitarios de N. Zhukovski, S. Chapliguin y N. Chetaev. Esta exposición permite no introducir la dinámica de las reacciones de enlaces perfectos si estas últimas no deben determinarse. El libro presenta 200 ejercicios y problemas de los cuales 120 vienen resueltos y para el resto se dan orientaciones para su resolución y las respuestas. Ellos son típicos no sólo para la ilustración de todo el material, sino también, para el trabajo individual de los estudiantes. Este manual está destinado a estudiantes de todas las especialidades de los centros de enseñanza técnica superior así como para los que desean estudiar por su cuenta.